

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXXVIII - ANNO CXLX

(2011)



LIGUORI EDITORE

Comitato di Redazione
del Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche

Scienze Biologiche: V. Balzani, H. Bern, G. Bernardi, E. Boncinelli, G. Caputo, G. Chieffi, G. D'Alessio, J.M. Denucé, M. de Vincentiis, A. Di Donato, G. Geraci, A. Giuditta, C. Polito, R.K. Rastogi, C. Rigano, A. Virzo De Santo

Scienze Chimiche: A. Ballio, G. Barone, C. Colella, E. Fattorusso, L. Mangoni, G. Marrucci, L. Mayol, L. Mazzarella, L. Nicolais, A. Panunzi, C. Pedone, O. Schettino, R. Sersale, A. Zambelli

Scienze Fisiche: M. Capaccioli, A. Coniglio, G. Cortini, G. Franceschetti, G. Marmo, L. Merola, B. Preziosi, L. Radicati di Brozolo, M. Rigutti, G. Scarpetta, G. Sedmak, V. Silvestrini, S. Solimeno, G. Tamman

Scienze Geomineralogiche: A.W. Bally, L. Brancaccio, R. Catalano, V. Cotecchia, B. D'Argenio, P. De Castro, G. Luongo, A. Mottana, T.S. Pescatore, A. Rapolla, R. Shroeder, L. Simone, D. Stanzione

Scienze Matematiche: A. Alvino, A. Avantageggiati, A. Basile, S. Buoncristiano, A. Canfora, L. Carbone, Ciro Ciliberto, E. Cosenza, V. Coti Zelati, M. Curzio, F. De Giovanni, A. de Luca, P. de Lucia, P. Fergola, V. Ferone, R. Fiorenza, J. Flavin, N. Fusco, R. Grassini, T. Iwaniec, P.L. Lions, F. Mazzocca, A. Murli, P. Renno, S. Rionero, A. Romano, G. Romano, R. Russo, L. Salvadori, C. Sbordone, B. Straughan, M. Troisi, G. Trombetti, G. Zappa, A. Zitarosa, J.D.M. Wright

(2011)

LIGUORI EDITORE

La pubblicazione è stata resa possibile dai contributi

- della Regione Campania
- della Fondazione Banco di Napoli
- del Dipartimento di Matematica e Applicazioni dell'Università di Napoli "Federico II"
- del Ministero dell'Istruzione, Università e Ricerca
- del Ministero per i Beni Culturali
- dell'associazione "Amici della Società Nazionale di Scienze Lettere e Arti in Napoli"

N. 78 - Dicembre 2011

ISSN 0370-3568

Nessuna parte di questa pubblicazione può essere tradotta, riprodotta, copiata o trasmessa senza l'autorizzazione scritta dell'Editore. Il regolamento per l'uso dei contenuti e dei servizi forniti dalla Casa Editrice Liguori disponibile al seguente indirizzo internet:

http://www.liguori.it/politiche_contatti/default.asp?c=legal

Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascuna pubblicazione. Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiore al 15% per pubblicazione, solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, via delle Erbe, n. 2, 20121 Milano, telefax 02 809506, e-mail segreteria@aidro.org

Direttore responsabile: Carlo Sbordone

© 2011 by Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche

Tutti i diritti sono riservati

Prima edizione italiana Dicembre 2011

Finito di stampare in Italia nel mese di Dicembre 2011 da OGL - Napoli

Autorizzazione del Tribunale di Napoli n. 780 del 14/08/1954

ISBN-13 978 - 88 - 207 - 5804 - 2

La carta utilizzata per la stampa di questo volume è inalterabile, priva di acidi, a pH neutro, conforme alle norme UNI EN Iso 9706 ∞ , realizzata con materie prime fibrose vergini provenienti da piantagioni rinnovabili e prodotti ausiliari assolutamente naturali, non inquinanti e totalmente biodegradabili.

INDICE

R. Sersale – <i>Mitigazione della reazione Alkali-Silice (ASR) in malte e calcestruzzi di cemento.</i>	pag. 1
N. Palladino, A.M. Mercurio – <i>La corrispondenza di Giuseppe Battaglini a Luigi Cremona</i>	» 7
R. Sersale – <i>Attività pozzolanica di piroclastiti incoerenti e litoidi e di altri prodotti cementizi supplementari.</i>	» 69
G. Barone, E. Sassi – <i>The United Nation Conferences on Climate Change.</i>	» 79
N. Messina – <i>Base Changes of B(1)-Butler groups: a Z_2 linear and graph theory approach.</i>	» 89
R. Sersale – <i>Inquinamento ambientale ed effetti sulle opere d'arte e sui calcestruzzi.</i>	» 113
R. Sersale – <i>Calcestruzzo per ricettacoli di rifiuti radioattivi.</i>	» 119
L. Carbone, M.R. Enea, R. Gatto – <i>I carteggi Cesàro-Torelli, Landau-Torelli.</i>	» 125
N. Palladino, A.M. Mercurio – <i>La corrispondenza Giovanni Novi - Enrico Betti.</i>	» 223
G. Barone – <i>A new hole in the stratospheric ozone on Arctic Ocean.</i>	» 293
R. Sersale – <i>La scoria da siviera: caratterizzazione ed utilizzazione.</i>	» 299
A. Romano – <i>A Review on Relative and Absolute Laws in General Relativity</i>	» 305
A. Giuditta – <i>Sull'origine filogenetica della mente umana.</i>	» 345
A. Mazzearella, R. Di Cristo, R. Viola – <i>L'Osservatorio Meteorologico di San Marcellino - Napoli Centro: i dati dell'anno 2011</i>	» 351

MITIGAZIONE DELLA REAZIONE ALCALI-SILICE (ASR) IN MALTE E CALCESTRUZZI DI CEMENTO.

MITIGATION OF ALKALI-SILICA REACTION (ASR) IN CEMENTITIOUS MORTARS AND CONCRETES.

Nota di Riccardo Sersale

(Adunanza del di 4 Febbraio 2011)

Riassunto. Al fine di contrastare l'ammaloramento di manufatti in calcestruzzo di cemento, dovuto all'espansione e fessurazione prodotte dalla reazione alcali-aggregato, se ne studia la possibile mitigazione mediante taglio del clinker di cemento con prodotti cementizi supplementari.

Si esamina la validità dei metodi di prova recentemente proposti per accertare l'idoneità di un aggregato, talvolta contaminato da costituenti silicei reattivi, ad esser miscelato con cemento Portland e si delinea il meccanismo d'azione in base al quale prodotti cementizi supplementari (pozzolane naturali, zeolititi, scorie d'alto forno, ceneri volanti, metacaolino), in miscele binarie e ternarie, operano il contenimento del degrado e l'innalzamento della durabilità dei manufatti.

Parole chiave: Alcali-reazione. Mitigazione.

Summary. In order to hinder concrete structures deterioration, due to expansion and cracking induced by alkali-aggregate reaction, its possible mitigation through cement clinker cuts with supplementary cementitious materials, has been examined. Soundness of test methods recently suggested for checking the suitability of an aggregate, sometimes polluted by siliceous reactive compounds, to be mixed with Portland cement, has been investigated, together with the mechanism of supplementary cementitious materials (natural pozzolanas, zeolitites, blast-furnace slags, fly ashes), in binary and ternary blends responsible for deterioration restraint and structures durability lengthening.

Key words: Alkali-silica reaction. Mitigation.

L'espansione generata dalla reazione alcali-aggregato nei manufatti cementizi costituisce una causa di ammaloramento molto sentita nel comparto delle costruzioni. Essa si manifesta con fuoruscita di materia gelatinosa che assume aspetto di efflorescenza, si irrigidisce e denuncia carattere amorfo, senza comparsa, in un primo momento, di fessurazioni visibili ad occhio nudo. Esse però compaiono più tardi e si dispongono a reticolo.

Con il crescere dell'impiego di aggregati reperibili sul posto, di cementi a più alto tenore di alcali – per la necessità, imposta da ragioni ecologiche, di riciclare i fumi nei forni a cemento –, di manufatti a dosaggio di cemento sempre più alto – ciò che favorisce una più alta concentrazione di cationi alcalini nella soluzione dei pori della pasta di cemento –, e con il possibile contatto dei manufatti con fonti esterne di alcali (agenti disgelanti, acqua di mare, ecc.), la dannosa reazione espansiva è divenuta sempre più frequente.

Le ricerche da tempo condotte (1), (2), non si interrompono, al fine di far luce più compiutamente sul meccanismo di base che presiede all'espansione e sulla natura del prodotto di neoformazione, anche se le conoscenze raggiunte sono abbastanza appaganti (3). E' infatti generalmente assunto che non si tratta di una reazione che decorre fra ioni sodio, potassio, e silice reattiva, bensì una reazione che si svolge mediante un processo d'idrolisi della silice reattiva promosso dagli ioni ossidrili, con formazione di un gel alcali-silice che, in uno stadio successivo, adsorbe acqua, rigonfia ed aumenta di volume. L'idratazione del cemento genera infatti una soluzione contenenti ioni Na^+ , K^+ , Ca^{++} ed OH^- . La loro concentrazione dipende dal contenuto di sodio e potassio del clinker ed anche dall'esposizione ai sali alcalini provenienti dall'ambiente esterno. L'impiego di

prodotti cementizi supplementari che rimpiazzano aliquote di clinker di cemento Portland hanno mostrato di mitigare l'espansione che fa seguito all'alcali-reazione (4).

I possibili meccanismi secondo i quali tali prodotti abbattano la temuta espansione sono:

1. la formazione di silicati di calcio idrati supplementari e, nel caso di prodotti che recano anche allumina, alluminati ed allumosilicati di calcio idrati, mediante reazione con la calce d'idrolisi che si genera per idratazione del cemento Portland. La loro formazione comporta una ridotta permeabilità, che limita l'ingresso dall'esterno di umidità e di alcali, per effetto di una maggiore compattezza della frazione pasta di cemento e della zona di transizione interfacciale.
2. la formazione di prodotti idrati supplementari incrementa l'adsorbimento e la fissazione degli alcali recati dai componenti del calcestruzzo, o di quelli che possono provenire dall'ambiente esterno, sottraendoli alla reazione con gli aggregati reattivi ed in tal modo limitando la produzione del gelo alcali-silice.
3. il rimpiazzo di clinker con prodotti cementizi supplementari che recano bassi contenuti di alcali comporta la loro diluizione e la conseguente diminuzione del loro tenore nel calcestruzzo.
4. la reazione "pozzolanica" dei prodotti cementizi supplementari addizionati al clinker, impegna calce ed abbassa pertanto il quantitativo di ioni calcio nella soluzione dei pori della pasta di cemento, limitando il rigonfiamento del gelo.
5. gli alcali abbassano il rapporto calce/silice nel silicato di calcio idrato gelatinoso generato per reazione "pozzolanica", migliorando la potenziale loro fissazione

I prodotti cementizi supplementari recano discreti quantitativi di alcali totali, che inizialmente sono legati nella matrice vetrosa e possono esser rilasciati nella soluzione dei pori della pasta di cemento (5). E' pertanto imperativo effettuare un bilancio, fra la quantità di alcali rilasciata nella soluzione dei pori e quella fissata nei prodotti d'idratazione

Scorie d'alto forno, ceneri volanti di classe F (a basso contenuto di calce), pozzolane naturali, metacaolino, fumo di silice, rispettivamente, mitigano con successo l'espansione, quando ciascun prodotto supplementare viene accuratamente caratterizzato ed addizionato in corretta misura.

La Fig. 1 mostra che l'espansione di malte di cemento Portland può esser mitigata per taglio del clinker con prodotti a comportamento "pozzolanico" in proporzioni variabili dal 20 al 40%, mentre il medesimo risultato è conseguibile con addizione del 60-70% di scoria d'alto forno granulata (7). Le prove sono state eseguite secondo la Norma ASTM C 441-81, e, per la stagionatura, secondo la Norma C 227-81.

E' verosimile che le ceneri volanti e la scoria d'alto forno granulata agiscano, in un primo tempo, principalmente come diluenti, mentre il fumo di silice, per effetto dell'alta finezza, esplichi già la sua azione sulla reazione alcali-silice quando la miscela è ancora fresca.

Particolare interesse nella mitigazione dell'alcali-reazione riveste l'impiego degli equivalenti zeolitizzati delle vere pozzolane: i tufi litoidi polverizzati, come rimpiazzo di aliquote di clinker.

I cementi Portland-zeolitici – classificabili a pieno titolo come cementi pozzolanici, secondo la Norma Italiana (Gazzetta Ufficiale n.180 (1968) – hanno infatti dimostrato di abbattere l'espansione anche meglio dei cementi Portland-pozzolana, esibendo pure una resistenza a compressione leggermente più alta (8). Risultati ancora migliori possono esser ottenuti con l'impiego di tufi vulcanici, preventivamente attivati mediante trattamento termico alla temperatura d'incipiente collasso del reticolo cristallino (9).

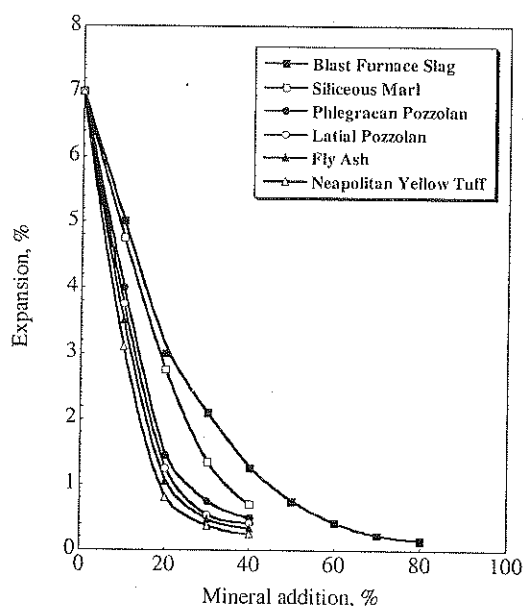


Fig. I - Reazione alcali-aggregato. Espansione di barre di malta dopo due anni, in funzione del tipo e del tenore di prodotto cementizio supplementare di rimpiazzo.

L'eccellente comportamento degli equivalenti zeolitizzati delle pozzolane naturali è ragionevolmente attribuibile ad una maggiore reattività del solido microporoso. I minerali zeolitici offrono infatti all'attacco della soluzione alcalina una superficie specifica più ampia di quella del vetro pozzolanico bolloso, favorendo in tal modo la neoformazione di fasi idrate. La più rapida e più compiuta rottura dei legami Si-O-Si, prodotta dalla calce in soluzione, è poi responsabile a sua volta, di una maggiore e più celere formazione di silicato di calcio idrato geliforme, meno basico e pertanto più idoneo ad incorporare una più alta quantità di alcali, altrimenti disponibili per la dannosa espansione. Gli alcali vengono infatti incorporati all'interno degli strati della fase C-S-H, principalmente mediante neutralizzazione dei gruppi -SiOH . Il tenore d'idrossido alcalino incorporabile aumenta poi al diminuire del rapporto molare CaO/SiO_2 del silicato di calcio idrato gelatinoso di neoformazione.

L'ulteriore riduzione dell'espansione, prodotta dal trattamento termico d'attivazione dei tufi zeolitici – un trattamento inefficace per l'equivalente non zeolitizzato: la pozzolana naturale – può ragionevolmente addebitarsi alla formazione di legami liberi alla superficie del solido, dopo fuoriuscita dell'acqua legata dai pori e dai canali del minerale zeolitico, nonché ad una sorta di mobilitazione dei costituenti chimici della roccia, per effetto del collasso della originaria struttura a pori e canali, alla quale subentra un solido amorfo, ad ampia area superficiale, memore della singolare struttura del progenitore.

In presenza di aggregati alcali-reattivi, i prodotti zeolitici che tagliano aliquote di clinker di Portland, possono pertanto consentire l'impiego di clinkers a contenuto d'alcali ben superiore al limite imposto dalla Norma ASTM C 441-81 (Na_2O eq. 0.6%), per i cementi destinati alla produzione di calcestruzzi con aggregati reattivi, in consonanza con gli avanzamenti della tecnologia di produzione dei clinkers.

Non deve preoccupare infine il possibile vantaggio dell'impiego di una pozzolana incoerente, in luogo di un tufo litoide da sottoporre a macinazione. Il consumo di energia di comminazione risulta più o meno equivalente in entrambi i casi, grazie alla struttura a grana fine dei tufi vulcanici.

Il consumo specifico di energia per entrambi i prodotti si aggira intorno ad 8-10 kWh/ton, a fronte delle 30 kWh/ton, richieste per la macinazione del clinker. L'essiccazione poi della pozzolana o del tufo richiede inoltre 200-250 kcal/kg (10).

Una recente ricerca (11) ha esaminato l'attitudine a mitigare l'alcali-reazione di due tipi di metacaolino, differenti per distribuzione delle dimensioni delle particelle (11.2 e 25.4 m²/g, rispettivamente) e di una cenere volante di classe C (ad alto contenuto di calce) che, in aggiunta a quelle "pozzolaniche", possiede di per sé stessa alcune proprietà cementanti. Tali prodotti sono stati impiegati come sostituti di aliquote di clinker di Portland in miscele binarie ed anche ternarie, al fine di porre in luce un eventuale comportamento sinergico.

La cenere volante di classe C è stata prescelta principalmente per il contributo, relativamente alto, allo sviluppo delle prime resistenze meccaniche rispetto alla cenere di classe F, nonché per l'aumentata lavorabilità ed il basso costo, a confronto di altri prodotti cementizi supplementari.

Il metacaolino è stato scelto invece per l'alta attività "pozzolanica" e l'alto contenuto d'allumina, fattori che concorrono a consumare più Ca(OH)₂, a render più densa la microstruttura ed ancor più disponibile ad inglobare alcali e sviluppare le prime resistenze meccaniche.

Obiettivi della ricerca (11) sono stati: – la valutazione dell'efficienza del metacaolino, della distribuzione delle sue particelle e della cenere volante di classe C, sulla mitigazione dell'alcali-reazione; – il controllo dell'applicabilità dei metodi di prova (12), (13), anche quando i manufatti incorporano prodotti cementizi supplementari.

Per valutare il rischio potenziale dell'alcali-reazione sono state sviluppate una pluralità di metodologie e si è registrata una vera e propria proliferazione di metodi di prova, anche per ridurre i lunghi tempi che tali prove richiedono.

Recentemente la RILEM ha nominato una Commissione ad hoc, composta di cinquanta studiosi di tutti i continenti ed ha messo a punto una prova accelerata su barre di malta (12) ed una su prismi di calcestruzzo (13). Principio del metodo accelerato (12) è l'immersione della barra di malta, confezionata con l'aggregato sospetto, in una soluzione molare di NaOH ad 80°C, monitorando l'espansione per 14 giorni. Principio della prova su prismi di calcestruzzo (13) è la stagionatura a 38°C e 100% U.R., monitorando l'espansione per 1 anno. I limiti di espansione variano da 0.04 a 0.1% ad 1 anno. Il paragone con un provino di riferimento è fortemente raccomandato.

Il comportamento dei due metacaulini e della cenere volante di classe C è stato valutato con le suddette prove (12), (13), eseguendo le misure nel corso di due anni.

Per la preparazione delle miscele binarie e ternarie è stato impiegato un cemento Portland commerciale ASTM C tipo I/II. Le relative composizioni sono riportate in Tab.1.

Tabella 1.

	Cemento I/II	Metacaolino (s.s. 11.2 m ² /g)	Metacaolino (s.s. 25.4 m ² /g)	Cenere volante C
SiO₂	20.66	51.37	52.10	36.89
Al₂O₃	5.22	44.60	44.03	18.11
Fe₂O₃	3.64	0.46	0.92	6.08
CaO	62.80	0.23	0.47	24.82
MgO	1.56	0.03	0.13	5.85
Na₂O	0.13	0.39	0.02	1.88
K₂O	0.45	0.07	0.14	0.51
SO₃	2.88	–	–	1.69
P.a.f.	2.01	0.51	0.56	0.10

Le miscele sono state preparate con sabbia altamente reattiva agli alcali e, per le prove su prismi in calcestruzzo, con aggregato grosso, non reattivo. I provini sono stati stagionati per ore differenti in camera a nebbia a 23°C, prima della sformatura e dell'inizio delle misure d'espansione.

I provini di malta sono stati immersi in una soluzione di NaOH 1N ad 80°C, per accelerare l'espansione per alcali-reazione.

I prismi di calcestruzzo sono stati preparati per aggiunta di NaOH all'acqua d'impasto, per aumentare il tenore di Na_2O eq.

E' stato posto in luce (11) che l'impiego di metacaolino esercita, in generale, un'azione più efficace della cenere volante di classe C nella limitazione dell'espansione, rilevata con entrambi i metodi di prova (12), (13). Tale migliorata efficacia dipende sostanzialmente dalle dimensioni più piccole delle particelle, rispetto a quelle della cenere C, da una maggiore reattività, nonché dalla composizione chimica che, contribuendo a ridurre il tenore di $\text{Ca}(\text{OH})_2$, origina una minor permeabilità, una migliore attitudine a legare alcali e, dunque, una ridotta espansione.

Una più alta area superficiale del metacaolino si rivela meno efficace nell'abbattimento dell'espansione di miscele binarie, probabilmente per le dimensioni medie più piccole del metacaolino a più bassa area superficiale.

Le miscele ternarie (cemento Portland+metacaolino+cenere volante C), saggiate con i metodi di prova (12), (13), non sembrano offrire vantaggi significativi sull'abbattimento dell'espansione, rispetto alle miscele binarie con solo metacaolino. Tale risultato è probabilmente influenzato dall'accresciuta espansione, a tempi brevi, prodotta dall'addizione di cenere volante di classe C alle miscele ternarie.

L'accettabilità dell'aggregato, rilevata con i metodi di prova (12), (13) impiegando le composizioni cementizie esaminate nella ricerca (11), è risultata affidabile per alti livelli di espansione, ma carente quando il tenore di materiale cementizio supplementare viene innalzato e l'espansione si avvicina ai limiti d'accettabilità dell'aggregato.

Conclusioni.

L'impiego sempre più esteso di cementi Portland a più alto contenuto d'alcali, conseguenza degli avanzamenti nella tecnologia di produzione dei clinkers, di aggregati per calcestruzzo reperibili in prossimità delle zone dove verranno realizzate le costruzioni, nonché la produzione di manufatti a contenuto sempre più alto di cemento, rendono frequente l'ammaloramento delle strutture dovuto ad alcali-reazione.

Sulla possibile mitigazione di tale reazione esiste una vasta bibliografia (14), (15), (16). Particolare attenzione è stata rivolta all'impiego di prodotti cementizi supplementari (zeoliti, pozzolane naturali, scorie d'alto forno granulate, ceneri volanti di classe F, metacaolino, fumo di silice) per la preparazione di miscele binarie, al fine di chiarire i meccanismi in base ai quali viene mitigata la neoformazione di un voluminoso gelo di silicato alcalino idrato, causa d'espansione. Pari attenzione è stata rivolta a mettere a punto affidabili metodi di prova, per valutare l'accettabilità degli aggregati (2).

Per ridurre il rischio di ammaloramento delle strutture cementizie per alcali-reazione conviene pertanto: – saggiare la potenziale reattività dell'aggregato prescelto, anche con le limitazioni riscontrate nei metodi di prova oggi disponibili; – ricorrere al taglio di clinker di Portland con prodotti cementizi supplementari, qualificati a ridurre l'espansione mediante abbassamento della concentrazione di ioni: alcalini, alcalino-terrosi ed ossidril, presenti nella pasta di cemento; – realizzare manufatti di massima compattezza, regolando opportunamente il rapporto acqua/cemento, uno dei parametri che controllano la permeabilità ed altre proprietà di trasporto.

Bibliografia

1. Degrado del calcestruzzo per alcali-reazione e prevenzione. Convegno Aggregati per Calcestruzzo. La Normativa Europea. Requisiti e Metodi di Prova. UNI Club. Napoli, 7 Nov. (2000).
2. Pr. EN 12620. Aggregati per Calcestruzzo. Norma Europea. Versione Marzo (2000).
3. Sersale R. La reazione alcali-silice e l'attacco solfatico interno: due ulteriori cause di degrado chimico del calcestruzzo. Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli, 68, 119-27 (2001).
4. Sersale R. Influenza delle aggiunte attive sull'alcali-reazione e sulla resistenza a compressione del risultante cemento. Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli, 56, 61-69 (1989).
5. Barlow D.F., Jackson P.J. The release of alkalis from pulverized-fuel ashes and ground granulated blast-furnace slags in the presence of Portland cement. Cement Concrete Res., 18, 2, 235 (1988).
6. Canham I., Page C.L., Nixon P.J. Aspects of the pore solution chemistry of blended cements related to the control of alkali silica reaction. Cement Concrete Res., 17, 5, 839 (1987).
7. Sersale R., Frigione G. On the minimization of the alkali-aggregate reaction. Influence of pozzolanas, powdered volcanic tuffs, blast-furnace slag and fly ash. Proc. 7th Int. Conference on Alkali-Aggregate Reaction. P.E. Grattan-Bellew Ed., Ottawa Canada (1986).
8. Sersale R., Frigione G. Portland-zeolite cement for minimizing alkali-aggregate expansion. Cement Concrete Res., 17, 404-410 (1987).
9. Sersale R. Blended cements manufactured with activated zeolitic additions. La Chimica e l'Industria, 67, 10, 537-541 (1985).
10. Sersale R. Natural zeolites for minimizing concrete expansion due to alkali-aggregate expansion. Boll. Associaz. Ital. Zeoliti, 21, 10-15. De Frede Ed. Napoli (2003).
11. Moser R.D., Jayapalan A.R., Garas V.Y., Kurtis K.E. Assessment of binary and ternary blends of metakaolin and class C fly ash for alkali-silica reaction mitigation in concrete. Cement Concrete Res., 40, 1664-1672 (2010).
12. ASTM C 1567. Standard test method for determining the potential alkali reactivity of combination of cementitious materials and aggregate. (Accelerated mortar-bar test). American Soc. for Testing and Materials. West Conshohocken PA. (2008).
13. ASTM C 1293. Standard test method for determining of length change of concrete due to alkali-silica reaction. American Soc. for Testing and Materials. West Conshohocken. PA (2006).
14. Multon S., Sellier Pr., Cyr M. Chemo-mechanical modeling for prediction of alkali-silica reaction expansion (ASR). Cement Concrete Res., 39, 490 (2009).
15. Ichikawa T. Alkali-silica reaction, pessimum effects and pozzolanic effect. Cement Concrete Res., 39, 8, 716-726 (2009).
16. Feng X., Thomas M.D.A., Bremner T.W., Folliard K.J. New observation on the mechanism of lithium nitrate against alkali-silica reaction (ASR). Cement Concrete Res., 40, 1, 94-101 (2010).

La corrispondenza di Giuseppe Battaglini a Luigi Cremona

Nota di Nicla Palladino* e Anna Maria Mercurio**

Presentata dal socio Luciano Carbone
(Adunanza del 4 Marzo 2011)

Key words: Battaglini, Cremona, corrispondenza, Giornale di Battaglini.

Abstract – In this paper, we studied the 45 letters that Giuseppe Battaglini wrote to Luigi Cremona between 1862 and 1892. The correspondence is now stored at the *Istituto Mazziniano - Museo del Risorgimento*- in Genova, *Legato Italia Cremona in Cozzolino*. It allows us to follow several interesting aspects of Battaglini's personal life and scientific activity, at a crucial point for the formation of the new Italian state. In particular, in the correspondence Battaglini talks about the financial situation of his «Giornale di Matematiche» and various competitions at Italian universities.

Riassunto – Presso l'*Istituto Mazziniano* -Museo del Risorgimento- di Genova, nel *Legato Italia Cremona in Cozzolino*, sono conservate 45 lettere che Giuseppe Battaglini scrisse a Luigi Cremona nel periodo compreso tra il 1862 ed il 1892. Esse consentono di seguire nei dettagli vari momenti della vita personale di Battaglini e, soprattutto, molti aspetti della sua attività scientifica, in un momento cruciale per la formazione del nuovo stato italiano. In particolare, nella corrispondenza si parla della situazione finanziaria del «Giornale di Matematiche» e di vari concorsi istituiti presso università italiane.

1 – PRESENTAZIONE

Le figure di Luigi Cremona e Giuseppe Battaglini, per la loro rilevanza nella storia scientifica italiana, sono state ben esaminate sia in biografie d'epoca, sia in studi più recenti, connessi per lo più a pubblicazioni di parte dei loro epistolari.¹ Le 45 lettere scritte da Battaglini a Cremona che qui per la

* Professore a contratto presso l'Università degli Studi di Napoli Federico II.

** Via Santoro 12, Baronissi (SA).

¹ A questo proposito, si vedano le note bibliografiche contenute nei cenni biografici riportati al termine del paragrafo.

prima volta si pubblicano,² e che vanno dal 1862 al 1892, consentono di seguire nei dettagli non solo vari momenti della vita personale di Battaglini, ma soprattutto molti aspetti della sua attività scientifica, in un momento cruciale per la formazione del nuovo stato italiano. Così, assumono un ruolo preponderante le notizie relative al “Giornale di Battaglini” che, nel 1863, Battaglini fonda, assieme a Vincenzo Janni e Nicola Trudi (1811-1884), con l’esplicativo sottotitolo di “Ad uso degli studenti delle Università italiane”. Dal 1866 fino al 1893, con l’eccezione degli anni 1872 e 1873 –quando il *Giornale* fu pubblicato per cura dei professori Battaglini ed Emanuele Fergola, in unione ai professori Enrico D’Ovidio, Gabriele Torelli (1849-1931) e Ciro Sardi–, Battaglini ne fu il solo direttore e per tale motivo la rivista veniva usualmente chiamata anche *Giornale di Battaglini*.

Il *Giornale* viene ad inserirsi in un quadro di riviste matematiche specializzate che proprio nella seconda metà del XIX secolo si diffondono e acquistano importanza in Italia –ma anche negli altri paesi europei– con la finalità di contribuire in modo concreto al progresso scientifico e culturale della nascente nazione di cui si iniziava a fare parte. Fu questo un periodo di grandi slanci ed ideali, per i quali personalità di spicco tra i cultori delle scienze matematiche diedero numerosi e fondamentali contributi per la formazione di uno stato unitario, agendo in prima persona nell’azione politico-istituzionale e nella vita scientifica, attrezzando di nuove necessarie strutture, nuovi mezzi culturali e nuove regole, il nascente stato. Tra le riviste matematiche dell’epoca, grande rilievo ricoprivano gli *Annali di Tortolini*,³ che soddisfacevano alle esigenze del suo ideatore, molto rivolto al modello dei giornali stranieri: quando fondò il suo giornale, Tortolini aveva già contribuito con circa cinquanta articoli all’edizione di riviste italiane e straniere, tra le quali c’era il *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, dell’editore Walter de Gruyter, fondato a Berlino nel 1826 da August Leopold Crelle (1780-1855) che l’aveva diretto fino alla sua morte avvenuta nel 1855 e perciò conosciuto come *Giornale di Crelle*, e i *Nouvelles annales de mathématique* che Olry Terquem (1782-1862), insieme a Camille Gerono (1799-1892), aveva fondato in Francia nel 1842. Tortolini sottolineava l’importanza di “internazionalizzare” i risultati matematici: un giornale simile in Italia, egli pensava, avrebbe permesso agli studiosi di dare maggior visibilità ai propri lavori e di renderli noti anche all’estero; allo stesso tempo, avrebbe munito i matematici europei di un altro giornale in cui pubblicare i propri risultati.

² Sul luogo e lo stato di conservazione delle stesse, si rimanda ai criteri di edizione al termine del paragrafo.

³ La rivista era stata fondata a Roma da Barnaba Tortolini (1808-1874) nel 1850 col nome di *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche*.

L'iniziativa di Tortolini coincise con l'esigenza della nuova generazione di matematici italiani che erano in contatto anche con gli studiosi d'oltralpe, come Francesco Brioschi ed Enrico Betti, o lo stesso Battaglini, che più volte aveva pubblicato negli *Annali*. Alla loro fondazione, la rivista conteneva articoli che ricoprivano diverse branche delle scienze pure e applicate, ma già nei primi anni di vita, oltre a veder ridurre il numero degli associati, aveva assunto un carattere più specificatamente matematico.⁴

È proprio al già menzionato *Giornale di Crelle* che già si ispira anche Brioschi quando, nel 1857, con Cremona, Betti e Angelo Genocchi (1817-1889), decide di portare avanti il "progetto intorno ad un giornale di matematica Italiano da surrogarsi agli *Annali* del Tortolini, quando non potesse essere una continuazione di questi", come scrive in una lettera a Genocchi nel maggio del 1857.⁵ Di fatti, il *Giornale di Crelle* era curato da un comitato di redazione costituito da matematici residenti in luoghi diversi, così come Brioschi pensava potesse farsi per la nuova rivista che aveva in mente. Fu così che i nuovi *Annali di Matematica pura ed applicata* divennero la prima vera rivista italiana di matematica.⁶

Ancora sul modello del *Giornale di Crelle*, in Francia, già nel 1836, Joseph Liouville aveva fondato il *Journal de mathématiques pures et appliquées*, meglio conosciuto come *Giornale di Liouville*, molto apprezzato anche all'estero, come conseguenza di un bisogno sentito comune di un giornale specializzato.

Il *Giornale* di Battaglini, nelle intenzioni del suo ideatore, aveva un carattere diverso rispetto alle prospettive di larga visione internazionale che in Italia era prerogativa degli *Annali*, pur contenendo traduzioni di importanti lavori che venivano pubblicati all'estero.⁷ Lo scopo principale restava quello di dare agli studenti e ai giovani ricercatori uno spazio in cui poter esprimere e discutere le proprie ricerche, incrementare la diffusione dei risultati che venivano a Napoli raggiunti, e sottoporli al giudizio del pubblico e, viceversa, poter ricevere e pubblicare le scoperte fatte altrove, in perfetta simbiosi con la visione della pratica didattica di Battaglini, concepita come "strumento non secondario mirante a far comprendere nel loro articolato spessore le nuove teorie e a far aprire nuovi orizzonti conoscitivi: spiegare le novità emergenti nel campo delle scienze matematiche significava fornire appunto strumenti più idonei per cambiare i punti di vista già codificati. Tutta la sua attività di

⁴ Per un approfondimento sulla questione, si può consultare [MARTINI 2006].

⁵ La lettera è contenuta in [CARBONE *et al.* 2006], pp. 273-274.

⁶ Per una rassegna dettagliata dei settori matematici e degli autori degli articoli pubblicati negli *Annali* a partire dal 1858, si rimanda a [MARTINI 2006].

⁷ Il *Giornale di Matematiche* fu, tra le altre cose, una sorta di "organo ufficiale per la geometria non-euclidea", secondo la valutazione di R. Bonola, fatta in [BONOLA 1906], p. 117.

«scienziato militante» era guidata da questo principio e prerequisito di base, che trova la sua ragion d'essere anche nella sua partecipazione alle vicende risorgimentali con forte senso di responsabilità e di passione civica”, secondo la visione di Battaglini come matematico e uomo risorgimentale che offre Mario Castellana.⁸

Il *Giornale*, pensato per l'intera gioventù studiosa italiana, aperto alle novità scientifiche che maturavano nel mondo, visse fino al dopoguerra seguito alla Seconda Guerra Mondiale (fino al 1967, per la precisione). Eppure, esso aveva rischiato di non vedere affatto la luce, insidiato, ancor prima che nascesse, dal progetto di pubblicare un diverso giornale, come testimonia una lettera di Battaglini a Enrico Betti, del 31 ottobre del 1862:⁹

Sento con piacere la proposta di associarmi ai Prof. del Beccaro e Casorati nella pubblicazione di un Giornale di Matematica. I Prof. Trudi e Janni avevano già stabilito con me di pubblicare qui in Napoli un Giornale ad uso degli studenti di Matematica delle Università italiane, con lo stesso intendimento del Prof. del Beccaro; si è trovato un editore che ne intraprenderebbe a suo rischio e pericolo la pubblicazione (la quale dovrebbe incominciare nel prossimo Gennaio) promettendo di compensare i collaboratori quando avesse raggiunto il numero di centocinquanta associati. Ora avendo fatto conoscere la vostra proposta ai miei soci, essi non hanno voluto rinunziare a che la redazione e la pubblicazione del Giornale si facesse a Napoli.

Nel 1865 viene sospesa la pubblicazione degli *Annali di Matematica pura ed applicata*, che verrà ripresa nel 1867 a Milano, su iniziativa di Brioschi e Cremona;¹⁰ in tale occasione, viene proposto a Battaglini di aderire alla fondazione del nuovo giornale. Nella lettera a Cremona del 31 gennaio 1867, Battaglini declina l'invito motivando così la sua decisione: dopo il primo fruttuoso anno di pubblicazione, le sorti economiche del *Giornale* erano iniziate a decadere, mentre intanto, “speranzosi”, Trudi e Janni avevano insistito per la costituzione di una società con l'editore Benedetto Pellerano, società che fu subito dismessa allorquando si intravide che essa non sarebbe stata proficua quanto era parso potesse essere durante il primo anno di attività. A partire dal terzo anno, l'editore non fu più in grado di dare un compenso ai redattori, essendosi ritrovato in *deficit*, e Battaglini era rimasto solo alla redazione della rivista, sollecitando contemporaneamente Pellerano a continuarne la pubblicazione, nonostante, probabilmente, i dubbi a proseguire. Battaglini era così rimasto moralmente vincolato all'editore il quale,

⁸ In [CASTELLANA *et al.* 1996], p. 244.

⁹ [GATTO 1996 b], pp. 187-189.

¹⁰ A tale proposito, si veda anche la lettera del 12 gennaio del 1867 di Luigi Cremona a Thomas Archer Hirst, pubblicata in [NURZIA 1999 a], pp. 115-117.

continuando la pubblicazione del *Giornale* anche per il quarto anno, sperava di riparare in qualche modo ai danni subiti.

Ben presto, però, Battaglini si ritrova nell'ardua impresa di portare avanti, praticamente solo, la pubblicazione della sua rivista: non avendo altri collaboratori se non l'editore stesso, svolge diverse mansioni, da impaginatore a correttore di bozze, a spedizionerie, come si legge nelle lettere del 7 gennaio 1864, dell'8 aprile 1866, dell'8 aprile 1869.

Un secondo importante elemento che emerge dalla lettura dell'epistolario è quello della costituzione di una nuova università in una Roma appena annessa all'Italia unificata. In questa iniziativa convergono gli sforzi dell'intera comunità scientifica italiana e, nel 1871, anche Battaglini decide per il trasferimento a Roma, accettando l'invito ministeriale, su suggerimento di Brioschi, mirante a costituire nella capitale una Facoltà di Matematica formata dai più eminenti studiosi italiani. A tale scopo, il Ministro della Pubblica Istruzione Cesare Correnti (1815-1888) scrive alla facoltà napoletana:¹¹

Non è certo senza rammarico che questi egregi uomini si staccano dalle loro cattedre e dai loro scolari come non senza rincrescimento il Ministero è costretto a privarne l'Università cui appartengono, ma il pensiero del bene dell'istruzione vince in essi ogni altro sentimento come ne renderà meno doloroso l'allontanamento. Tra questi è il prof. Giuseppe Battaglini il quale fu ora chiamato a dare l'insegnamento di Geometria superiore nella Regia Università di Roma.

Per inciso, il suo trasferimento pone, ancora una volta, il *Giornale* in una condizione di disagio; scrive Battaglini a Jules Hoüel, il 31 ottobre del 1871:¹²

Vi scrivo in procinto di partire per Roma, dove vado a stabilirmi essendo stato inviato dal Ministero a dettar lezioni di Geometria superiore in quella Università. [...] Un risultato di questo mio passaggio a Roma sarà probabilmente la cessazione del Giornale di Matematiche, a meno che l'Editore Pellerano non trovi altra persona che voglia assumere, senza alcun compenso, come ho fatto io sinora, la noia della pubblicazione del Giornale in tutti i suoi dettagli.

Il motivo del trasferimento di Battaglini è riconducibile anche alle allettanti condizioni che sembravano prospettarsi, tra cui un onorario più elevato, avendo ricevuto promessa da parte del Ministro di poter a Roma ricoprire contemporaneamente più incarichi; aveva infatti richiesto di poter cumulare l'insegnamento ordinario di Geometria superiore con altri insegnamenti affini, come quello di Geometria analitica o Geometria descrittiva. La condizione

¹¹ [AMODEO 1906], pag. 15.

¹² La lettera è pubblicata in [CALLERI *et al.* 1996], pag. 125.

vissuta da Battaglini in quell'università non fu, però, in linea con le sue aspettative, se si legge la lettera che manda a Houël nel gennaio del 1872.¹³

La mia traslocazione in Roma è stata per me una rovina, ed accettandola ho commesso un grandissimo errore. Fui abbagliato dalle velleità che mostrò il Ministro della pubblica istruzione di fare dell'Università di Roma un'Università degna della Capitale d'Italia, ma il fatto (almeno sinora) non ha corrisposto per nulla alle previsioni. Si sono chiamati è vero a dettar lezioni molte persone illustri, ma non appartenenti ai cultori delle Scienze positive, e quel che è peggio persone politiche, le quali hanno tutt'altro pel capo che la scienza. Le Biblioteche sono sfordite di tutto ciò che è moderno, né il Governo pensa a fornirle di fondi per l'acquisto di opere nuove.

Nelle due lettere che spedisce a Cremona il 4 ed il 5 agosto del 1874, durante il periodo in cui egli stesso è reggente dell'università romana, si legge ancora delle cattive condizioni in cui versa la biblioteca universitaria.

L'epistolario mette in evidenza molto nitidamente un notevole cambiamento che si ebbe nella vita di Battaglini, cambiamento che inizia a mostrarsi proprio in questi anni e che raggiunge un momento drammatico nel 1876: le condizioni economiche di Battaglini, comunque mai floridissime, vanno man mano aggravandosi, fino a spingere al suicidio uno dei fratelli. Nel 1870 Battaglini si scusava con Betti per essere costretto a rifiutare l'invito a spostarsi all'Università di Pisa, scrivendogli il 19 aprile di quell'anno:¹⁴

Sono dolente con tutta l'anima che le mie circostanze esteriori mi pongono nella necessità di non poter accettare tale onorevolissima proposta [...]. Ad onta di tutto ciò, i miei interessi economici essendo talmente legati con quelli del resto della mia famiglia, che una separazione dai miei fratelli sarebbe a tutti noi nociva, fa tacere le mie particolari inclinazioni, ed assoggettarmi alla necessità.

Nel novembre del '71, scriveva ancora a Betti:¹⁵

Intanto questo mio passaggio qui, alla piega che prendono le cose, minaccia di essere per me una novena. Io accettai il trasferimento fiducioso nelle seguenti parole che si contenevano nella lettera d'invito che scriveva il Ministro «Il Ministro poi cercherà di provvedere affinché ella abbia, unitamente alla cattedra della quale Le ha fatto offerta, un incarico per altro insegnamento, che potrebbe essere quello della Geometria analitica, e del calcolo differenziale ed integrale».

Le difficoltà economiche lo inducono ad accettare un incarico all'Istituto tecnico di Roma; scrive a Betti, nel settembre del 1873, di essere "ridotto ad una macchina da lezioni".¹⁶

¹³ Vedi [CALLERI et al. 1996], pag. 126.

¹⁴ [GATTO 1996 b], pp. 195-196.

¹⁵ [GATTO 1996 b], pp. 201-202.

Da ciò che si legge nella lettera del 19 novembre 1876 che Battaglini manda all'amico Cremona, sembrerebbe sia stato proprio il suicidio del suo amato fratello il motivo decisivo per cui Cremona sceglie di rinunciare alla cattedra di Geometria Superiore presso la Scuola d'Applicazione, in favore di Battaglini:

Grazie di cuore per la vostra cooperazione in questa dolorosissima circostanza; mi date una prova di amicizia, che non dimenticherò mai. Martedì incomincerò le mie lezioni.

La gravità delle condizioni a cui è ridotta la famiglia, vengono meglio espresse forse in una lettera che Battaglini spedisce a Houël il 28 gennaio 1878, in cui scrive che da circa 14 mesi è stato colpito da una

*gravissima sciagura, che ha rovinato economicamente la mia famiglia, ed ha spinto a violenta volontaria morte un mio amatissimo fratello!!!*¹⁷

Nel carteggio che si va pubblicando, assumono, ancora, notevole rilievo diverse lettere in cui si discute di "affari" intorno a concorsi ed incarichi universitari. Una prima questione si presenta nel 1864: nella lettera del 7 gennaio del '64, qui pubblicata, Battaglini fa riferimento, quasi certamente, alla risposta alla lettera che aveva mandato a Betti il 17 dicembre 1863¹⁸ in cui chiede aiuto per ottenere, presso l'Università di Napoli, la cattedra di Meccanica razionale, tenuta, dal 1860, da Fortunato Padula (si ricorda che Betti era deputato di Pistoia alla Camera dell'appena costituito Regno d'Italia). La "irregolarità" di Padula nel ricoprire contemporaneamente quattro incarichi ufficiali comportava la difficoltà per Battaglini ad ottenere la cattedra desiderata; Cremona si sarebbe poi trasferito a Napoli sulla cattedra di Geometria superiore da lui lasciata libera. Il progetto non andò in porto: nel 1864 Padula perse una soltanto delle sue cariche e dunque Battaglini restò sulla cattedra di Geometria superiore a Napoli mentre Cremona rimase su quella di Bologna, nonostante quanto si legga qui nella lettera del 7 settembre 1864.

Battaglini ritorna all'Università di Napoli nel 1885; con il suo rientro nella città partenopea, spera di ritrovare la sua antica fibra, perduta a seguito dell'intensificarsi dei sintomi di una malattia che verrà diagnosticata come anemia, come si può leggere nella lettera del 27 maggio del 1891.

Il ritorno di Battaglini a Napoli coincide con l'inizio di un importante momento di transizione all'interno del mondo matematico italiano: la generazione di studiosi che hanno visto l'unificazione del Paese va scomparendo e comincerà ad essere sostituita dalla prima generazione formatasi nell'Italia ormai unificata. Il metodo che si seguirà in questo processo

¹⁶ [GATTO 1996 b], pp. 203-204.

¹⁷ La lettera è contenuta in [CALLERI *et al.* 1996], pp. 155-156.

¹⁸ La lettera è pubblicata in [GATTO 1996 a], pp. 190-192.

di sostituzione sarà ben diverso da quello seguito nella fase immediatamente postunitaria: in questa essenzialmente è stato il ministro pro tempore dell'Istruzione a scegliere i nuovi docenti; ora si apriranno complesse partite nelle quali giocheranno un ruolo importante le facoltà universitarie che chiedono la copertura della cattedra, le commissioni giudicatrici dei concorsi, il consiglio superiore della Pubblica Istruzione e ancora il ministro pro tempore. Già nella lettera del 10 aprile del 1886 a Cremona, viene dato un primo quadro della situazione universitaria napoletana riguardante il settore matematico. A partire dal 1890 viene compiuta una serie di mosse atte a favorire questo ricambio generazionale, che coinvolge l'assetto dell'insegnamento della matematica all'Università di Napoli, unica, come è ben noto, in quegli anni nell'Italia meridionale peninsulare. La partita comincia col desiderio di Battaglini di cambiare gli insegnamenti che egli ha. Nella lettera dell'8 giugno 1890, segnala che si apre a Napoli il problema di coprire la cattedra di Calcolo differenziale e integrale che egli sta per lasciare. Al momento del suo ritorno a Napoli, come professore ordinario di Calcolo differenziale e integrale, la cattedra di Algebra complementare, era tenuta da Alfredo Capelli (1855-1910), già professore ordinario dell'Università di Palermo; Nicola Salvatore Dino nel 1888 passa dall'Università di Roma a quella di Napoli, sulla cattedra di Geometria. Nella lettera menzionata, Battaglini chiede di poter cambiare gli insegnamenti all'università napoletana, desideri che furono esauditi, come anche è confermato nella lettera del 16 giugno 1890. Così, egli prende la cattedra di Analisi superiore lasciata libera da Fergola passato all'insegnamento di Astronomia.

Salvatore Dino cambia la sua cattedra in quella di Geometria analitica; rimaneva pertanto scoperto l'insegnamento di Calcolo differenziale ed integrale. La Facoltà napoletana ritenne allora concreta la possibilità di irrobustire il settore dell'*Analisi* mediante l'utilizzazione di studiosi che erano maturati nella stessa Facoltà. I favoriti erano Ernesto Pascal (1865-1940) e Gabriele Torelli. D'altra parte, Ernesto Cesàro (1859-1906), che già nel 1886 aveva visto anteporsi Capelli sulla cattedra di Algebra complementare a Napoli e che era andato proprio in quell'anno a Palermo quale successore dello stesso Capelli, intravede la possibilità di realizzare il suo trasferimento. Il brano riportato (è la lettera del 7 agosto 1890 che il ministro Boselli invia a Cremona e che Cremona trasmette poi a Cesàro¹⁹), fornisce testimonianza sullo svolgersi di questa vicenda concorsuale:

Come sarà noto alla S. V. Ill.ma la Facoltà matematica dell'Università di Napoli ha già proposto l'apertura del concorso per la nomina di Professore straordinario alla Cattedra vacante di Calcolo infinitesimale, ma poiché il

¹⁹ Pubblicata in [CARBONE *et al.* 1996].

Ministero, per ragioni economiche non ha ancora bandito quel concorso, per far cosa grata alla S. V. Ill.ma, ho trasmesso al Rettore dell'Università l'istanza del Prof. Cesàro, da Lei raccomandatami perché la sottoponga alla Facoltà stessa nel caso essa intendesse di modificare la sua precedente proposta.

Segue la lettera del 7 luglio 1890 di Francesco Gerbaldi (1858-1934) a Cesàro:²⁰

[...] Intanto il Dino non se ne sta con le mani alla cintola, e sta armeggiando in modo che Lei ottenga di andare a Napoli, favorendo ad un tempo il Torelli. Questi è ormai deciso, per far carriera, di andare in qualunque residenza, e tanto gli fa di andare a Torino come a Palermo, purché ottenga un posto all'Università. Ciò posto, ecco che cosa il Dino intenderebbe di fare; sospendere l'apertura del Concorso di Napoli fino a che sia deciso il Concorso di Torino, dove il Torelli si è presentato; frattanto la Facoltà, vista l'impossibilità (per mancanza di tempo) di avere per l'anno entrante il professore di Calcolo, nominerebbe il Torelli come incaricato. Intanto se nel concorso di Torino il Torelli risulta (come è presumibile) pari al primo o di poco sotto al primo, si può fare in modo che la Commissione segnali il Torelli al Ministro, perché questi assegni un posto all'Università al Torelli appena si presenti l'opportunità senza bisogno di un concorso. Allora si andrebbe intesi con Torelli, che questi rinuncerebbe ad ogni idea su Napoli, per andarsene a Palermo, e giungerebbe il tempo di interpellare la Facoltà pel suo trasferimento. E la Facoltà visto da una parte che al Torelli è stata aperta una via di scampo, e d'altra parte che diventa inutile insistere per il concorso, perché se si presenta Lei il Torelli è spacciato, accetterà facilmente il trasferimento [...].

Battaglini avrebbe favorito Pascal o Torelli (in particolare Torelli, poiché Pascal era già stato nominato, dal dicembre 1890, professore straordinario di Calcolo infinitesimale all'Università di Pavia) e non Cesàro, pur non avendo remora sul suo valore di scienziato. La stessa lettera di Gerbaldi a Cesàro rivela però il ripensamento dello stesso Battaglini nei confronti di Cesàro:

[...] Il Battaglini poi aggiungeva che era inutile interpellare la Facoltà circa il suo trasferimento, perché molti professori erano male prevenuti per Lei in causa del suo carattere; ed ho subito compreso che tra i male prevenuti vi era il Battaglini stesso; allora io mi sono permesso di entrare in alcuni dettagli sulla vita ritirata e studiosa che Lei conduce; e di spiegare la malignità e la falsità di alcune voci che erano corse, ecc.; ed osservai che il Battaglini con vero compiacimento si ricredette [...].

²⁰ Pubblicata in [CARBONE *et al.* 1996].

Queste posizioni di Battaglini spiegano probabilmente i motivi del suo silenzio sulla questione nelle lettere spedite a Cremona. In effetti, quest'ultimo è deciso a sostenere i desideri di Cesàro anche per allontanarlo dalla sede di Palermo, ov'erano nati aspri contrasti e varie questioni anche giudiziarie.

Grazie al valore scientifico di Cesàro e all'appoggio di figure di spicco tra i matematici napoletani e italiani, la Facoltà matematica napoletana si orientò verso una soluzione suggerita da Dino: trasferire Cesàro da Palermo a Napoli e trovare per Pascal e Torelli un'altra sede. Cesàro passò alla cattedra di Calcolo infinitesimale all'Università di Napoli, senza concorso, ma su parere del Consiglio della Pubblica Istruzione, in applicazione dell'articolo 69 della Legge Casati che consentiva nomine per "chiara fama". L'articolo permetteva la nomina diretta a professore ordinario, senza concorso, a chi si fosse particolarmente distinto nella scienza e nella didattica (in seguito questo tipo di nomina venne appunto definito "per chiara fama"²¹).

Rimaneva ancora aperto il problema di trovare delle posizioni adeguate per Torelli e Pascal; tra il 1890 ed il 1891, essi parteciparono a tre concorsi: quello di professore straordinario di Calcolo infinitesimale presso l'Università di Torino; quello di professore straordinario di Algebra complementare presso l'Università di Padova; quello di professore ordinario di Algebra complementare presso l'Università di Palermo. In particolare, Pascal ambiva al posto a Palermo. Gli esiti per Torelli e Pascal furono i seguenti: a Torino, Pascal risultò primo, insieme a Giuseppe Peano (1858-1932), mentre Torelli giunse secondo; a Padova, Pascal giunse secondo con punti 48/50 (primo risultò Gregorio Ricci -1853-1925- con punti 49/50) e Torelli giunse terzo con punti 46/50; infine a Palermo risultò vincitore Pascal con punti 41/50, mentre Torelli giunse secondo con punti 40/50. Il Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione propose che l'eventuale nomina di Pascal alla cattedra di Palermo fosse soltanto per professore straordinario e che, qualora Pascal avesse rinunciato, la nomina sarebbe passata a Torelli, come in effetti avvenne.²²

Nell'ottobre del 1890 Pascal invia a Betti una lettera²³ sugli esiti del concorso di Torino esplicitando la sua idea per una nomina all'università di Pavia:

La Commissione che giudicava il concorso di calcolo a Torino mi ha messo in primo posto a pari merito di Peano.

²¹ Precisamente, l'articolo 69 della Legge Casati recita: "Il Ministro potrà proporre al Re per la nomina, prescindendo da ogni concorso, le persone che per opere, per iscoperte, o per insegnamenti dati, saranno venute in meritata fama di singolare perizia nelle materie cui dovrebbero professare".

²² Per l'intera vicenda, si vedano [CARBONE *et al.* 1996] e [CARBONE *et al.* 2002].

²³ La lettera, inedita, è tra le sei lettere di Pascal a Betti custodite presso la *Scuola Normale Superiore di Pisa*, nel "Fondo Betti".

Sono lietissimo di questo risultato che mi fa uscire con assai onore da questo concorso, e sono assai riconoscente ai membri della Commissione, massime al Brioschi che si sarà tanto occupato della causa mia.

Però io credo fermamente che il Consiglio Superiore proporrà il Peano al posto di Torino, e allora io, sebbene classificato il primo, rimarrei ancora per un altro anno senza posto.

Io Le scrivo questa lettera per pregarla caldamente di occuparsi della cosa in Consiglio Superiore e di cercare se mi si può concedere il posto di Pavia dove andrei col massimo entusiasmo.

Dal momento che sono risultato in primo posto io credo che è inutile insistere per esaurire un'altra lunga pratica di concorso a Pavia per la quale si perderebbe un altro anno e forse due come è successo per Torino.

Nel caso poi (che non credo probabile) che il posto di Pavia fosse già diversamente impegnato, io mi faccio ardito di sottometerle ancora un'altra combinazione.

Ella sa che la Facoltà di Palermo ha già per due volte di seguito chiesto il concorso di analisi superiore. Il Consiglio Sup.^{re} rispose nell'Aprile scorso che si sarebbe provveduto coi risultati dei concorsi precedenti. Non Le pare che sarebbe dunque il caso di ricordarsi di questo? Bisognerebbe però che in Consiglio Superiore qualcuno prendesse l'iniziativa di questa proposta.

Le cerco mille scuse, mio caro Senatore, della libertà colla quale Le ho espresse queste mie preghiere, ma io La conosco da tanto tempo e so che Ella si degna accordarmi una benevolenza della quale mi sento orgoglioso.

Ella compatirà certamente il desiderio vivissimo che ho io di acquistare finalmente una posizione che possa farmi dare tutto intero e con calma a quegli studii ai quali ho dedicata la vita; un anno ancora di aspettazione potrebbe essere di gran danno al corso dei miei studii.

Ella non avrà dimenticato che una delle principali basi di tutto l'edifizio della mia cultura, mi fu posta in cotesta celebre Università sotto la paziente e amorevole scorta di Lei e dei suoi colleghi.

Ed io non dimenticherò mai di annoverare quell'anno in cui fui a Pisa come l'anno più bello dei miei studii.

Mio caro Senatore, la prego caldamente; si occupi ancora delle povere cose mie e s'abbia la inalterabile riconoscenza del Suo Pascal.

La cattedra di Calcolo infinitesimale presso l'Università di Torino era stata tenuta da Genocchi dal 1864-'65 fino alla sua morte, avvenuta il 7 marzo del 1889. Negli ultimi anni di vita di Genocchi, il suo assistente, Giuseppe Peano, l'aveva sostituito nell'insegnamento. Il concorso per professore straordinario fu espletato nel 1890 e ad esso parteciparono Giulio Giuliani (1859-1940); Pascal, allievo di Battaglini, che dopo la laurea aveva seguito corsi di perfezionamento a Pisa e a Göttingen, dedicandosi soprattutto alla teoria delle funzioni; Carlo

Somigliana (1860-1955), che dal 1887 era assistente sulla cattedra di Analisi all'Università di Pavia; Torelli, coadiutore di Battaglini presso la cattedra di Calcolo infinitesimale a Napoli; Giulio Vivanti (1859-1949), che divenne in seguito professore di Calcolo infinitesimale a Messina. Naturalmente, tra i concorrenti vi era, infine, Peano, che intanto copriva, in qualità di incaricato, la stessa cattedra di Calcolo infinitesimale messa a concorso. La commissione, composta da Brioschi, Beltrami, Salvatore Pincherle (1853-1936), Alberto Tonelli e Vito Volterra (1860-1940), giudicò tutti i concorrenti "eleggibili" e formulò la seguente graduatoria: 1° Peano e Pascal, come già detto, *ex aequo* con punti 48/50; 2° Torelli con punti 43/50; 3° Somigliana e Vivanti *ex aequo* con punti 40/50; 4° Giuliani con punti 30/50. La cattedra fu assegnata a Peano, che la tenne fino al 1925.

Per gli esiti della richiesta di Pascal a Pavia, invece, si può leggere un'altra lettera che lo stesso Pascal invia a Betti il 14 novembre del 1890:²⁴

Ho saputo quello che Ella ha fatto in mio favore in Consiglio Superiore e Le sono assai riconoscente.

Ora mi si annuncia da Pavia che quella Facoltà ha deliberato la mia nomina a straordinario di calcolo. Credo e spero che il Ministero non troverà altre difficoltà.

Quindi fra poco tempo avrò il piacere di venire a ringraziarla a voce.

Le assicuro che sono davvero orgoglioso di pensare che la mia carriera è legata intimamente al Suo gran nome, e Le prometto che mi renderò degno della Sua fiducia.

L'ultima delle lettere di Battaglini a Cremona riguardanti affari concorsuali è quella del 4 ottobre 1892, sul concorso indetto il 16 aprile del 1892, a professore straordinario per la cattedra di Meccanica razionale all'Università napoletana. I concorrenti furono: Michele Gebbia (1854-1929), Vivanti, Somigliana, allora incaricato a Pavia dell'insegnamento di Fisica matematica, Roberto Marcolongo (1862-1843). Si aggiunse, infine, Francesco Siacci, allora professore ordinario di Meccanica superiore a Torino. Quest'ultimo aveva assunto da poco la carica di senatore del Regno e quella di colonnello nell'esercito e poiché il grado, più avanzato, di colonnello era incompatibile con quello di professore universitario, era stato costretto a dare le dimissioni da militare; era maturata così l'esigenza, da parte sua, di un trasferimento che gli avrebbe consentito di contemperare meglio l'incarico di professore con quello di senatore. Dopo un tentativo presso l'Università di Roma, Siacci aveva presentato domanda all'Università di Napoli, per la cattedra di Meccanica razionale. La commissione, formata dai professori Ferdinando Paolo Ruffini (1823-1908), Valentino Cerruti, Ernesto Padova, Giacinto Morera (1856-1909)

²⁴ Anche questa lettera, inedita, come la precedente di Pascal a Betti, è custodita presso la *Scuola Normale Superiore di Pisa*, nel "Fondo Betti".

e Volterra, esaminate le domande dei partecipanti, aveva riscontrato che in quella di Siacci non erano state osservate le prescrizioni dell'articolo 104 del Regolamento del 26 ottobre 1890, riconoscendo per altro che in assenza di vizi formali sarebbe stata unanime nel preporre Siacci agli altri concorrenti. La commissione dichiarava poi "eleggibili" all'unanimità i candidati Carlo Somigliana e Roberto Marcolongo e, a maggioranza, Michele Gebbia; stilava la seguente graduatoria: 1° Somigliana, 2° Marcolongo, 3° Gebbia. Inoltre, osservava che, qualora Somigliana non avesse voluto occupare il posto, esso poteva passare a Marcolongo, su nomina della commissione stessa, senza ulteriore concorso. Il Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione approvò le conclusioni della commissione. Tutto sembrava favorire Marcolongo: da una parte c'era stata l'esclusione di Siacci, dall'altra Somigliana era risultato primo anche al concorso per Pavia per la cattedra di Fisica matematica. Gli eventi però si evolsero in maniera ben diversa rispetto a ciò che Marcolongo sperava. Il 10 novembre del 1892, si tenne una riunione della Facoltà di Matematica nella quale fu deliberato di chiedere al ministro della Pubblica Istruzione che la cattedra di Meccanica fosse assegnata a Siacci. Vi era peraltro la generale convinzione che il ministro non avrebbe tenuto conto delle opposizioni formali mosse alla candidatura di Siacci. La proposta fu accolta e Marcolongo dovette ripiegare, nel 1895, su una cattedra di Meccanica razionale a Messina. Nel 1908, alla morte di Siacci, la Facoltà di Matematica dell'Università di Napoli deliberò infine il trasferimento di Marcolongo ancora sulla cattedra di Meccanica razionale.²⁵

Nelle ultime lettere della corrispondenza, Battaglini lamenta la sua sofferenza a dover rimanere lontano dalla sua attività di professore: la sua salute, col passare del tempo, declina sempre più rapidamente. A tal proposito, le più eloquenti sono le lettere che scrive nel maggio del 1890, nel settembre del 1891, in cui dichiara di essere costretto a declinare gran parte degli impegni presi, nel 4 ottobre 1892. Giuseppe Battaglini, nonostante la sue condizioni di salute, continua la pubblicazione di alcune memorie fino a che, gradualmente, la malattia gli impedisce totalmente di dedicarsi ai suoi studi e al suo lavoro di professore. Muore a Napoli il 29 aprile del 1894.

IL FONDO E I CRITERI DI EDIZIONE

Le 45 lettere di Battaglini a Cremona sono conservate presso l'Istituto Mazziniano - Museo del Risorgimento - di Genova, Legato Itala Cremona in Cozzolino; si tratta delle carte che sono state depositate presso l'Istituto, da Itala Cremona in Cozzolino (figlia del matematico). Il motivo di tale

²⁵ Per l'intera vicenda, si veda [CARBONE *et al.* 1994].

collocazione va individuato nei forti legami della famiglia Cremona (più specificatamente, di sua moglie Elisa Ferrari) con la famiglia Mazzini. In effetti, a Venezia, Cremona conobbe Nicola Ferrari, stretto collaboratore di Mazzini, con cui legò stretta amicizia; nel 1854 ne sposò la sorella Elisa. Per dare un'idea dei legami tra le famiglie Ferrari e Mazzini, basti dire che nel 1852 lo zio di Elisa, Napoleone Ferrari, divenne esecutore testamentario della madre di Mazzini.

Le lettere ritrovate sono in buono stato e la grafia di Battaglini è abbastanza chiara, pertanto l'interpretazione presenta pochissimi dubbi, annotati con un punto interrogativo tra parentesi quadre. Qualche raro errore di Battaglini è stato invece notato apponendo il termine *sic* tra parentesi quadre. Tra parentesi quadre sono state anche inserite parole chiaramente omesse per disattenzione, qualche volta seguite dalla sigla *n.d.r.* per indicare aggiunte esplicative al testo.

Le sigle *s.l.* e *s.d.* stanno, rispettivamente, per "*senza luogo*" e "*senza data*". La ricostruzione dell'esatto luogo e dell'esatta data, laddove omessi, è stata frutto di osservazioni tratte da riferimenti interni alle lettere, di confronti tra le lettere stesse o, ancora, di confronti con lettere ad altri corrispondenti. In ogni caso, le deduzioni sono state inserite in parentesi quadre.

CENNI BIOGRAFICI DI GIUSEPPE BATTAGLINI.²⁶

Battaglini nacque a Napoli l'11 gennaio 1826. Trascorse la sua prima fanciullezza a Martina Franca (Lecce) nella casa del nonno paterno presso cui compì i suoi primi studi. Ritornato a Napoli, studiò privatamente matematica e nel 1844 entrò nella Scuola di ponti e strade: uscì ingegnere nel 1848, accettò un posto di assistente presso l'Osservatorio astronomico di Capodimonte (Napoli), offertogli dal direttore Ernesto Capocci di Belmonte. Pochi mesi più tardi, in seguito alla reazione borbonica contro i moti e gli ordinamenti liberali, essendosi rifiutato di firmare una domanda al re Ferdinando II perché abolisse la costituzione poco prima giurata, si dimise volontariamente.

Per dodici anni, rimasto senza posto governativo, continuò a coltivare privatamente la matematica, imparò tra l'altro le lingue inglese e tedesca per seguire il progresso delle scienze matematiche. Con la riforma dell'Università, avvenuta nel 1860, Battaglini fu nominato consigliere della Pubblica Istruzione e professore di Geometria superiore all'università di Napoli, cattedra che ebbe l'onore di inaugurare in quanto allora istituita.

²⁶ Per un'approfondita biografia di Battaglini, si vedano [AMODEO 1906], [D'OVIDIO 1894] e la voce biografica di Battaglini scritta da N. VIRGOPIA per il [DBI]. Buona parte delle corrispondenze di Battaglini è raccolta nel volume [CASTELLANA *et al.* 1996]. Non si hanno, invece, notizie delle lettere di Cremona né, in generale, di altri corrispondenti, a Battaglini.

Nel 1872, fu chiamato a insegnare nell'università di Roma: fu per un anno Rettore di quell'Università, nel '73-'74, e per dieci anni preside della Facoltà di Matematica, dal '75-'76 all'84-'85. Nel 1885 ritornò a Napoli, dove riprese gli antichi insegnamenti e vi rimase sino alla morte.

Nel 1863 fondò il *Giornale di matematica ad uso degli studenti delle Università italiane*, di cui fu sempre direttore e collaboratore. Fu, tra l'altro, socio dell'Accademia dei Lincei, dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli e dell'Accademia delle scienze di Torino; membro della Società italiana delle scienze, detta dei XL; socio corrispondente dell'Istituto lombardo di scienze, lettere, arti, dell'Istituto veneto e dell'Istituto bolognese; membro onorario della Società delle scienze di Bordeaux e di quella di Praga; professore onorario dell'Università di Kazan; cavaliere dell'ordine civile di Savoia.

Le memorie di Battaglini, pubblicate in gran parte negli *Atti* e nei *Rendiconti* dell'Accademia dei Lincei e in quelli dell'Accademia di scienze fisiche e matematiche di Napoli, si trovano quasi tutte ripubblicate nel *Giornale* da lui fondato.²⁷

CENNI BIOGRAFICI DI LUIGI CREMONA.²⁸

Cremona nacque a Pavia il 7 dicembre 1830 da Gaudenzio, un novarese di famiglia assai agiata poi caduta in rovina, e da Teresa Andreoli. S'indirizzò verso gli studi classici frequentando il liceo-ginnasio della propria città dove ebbe come compagni Enrico e Giovanni Cairoli. Allo scoppio della prima guerra d'indipendenza, abbandonò gli studi per arruolarsi nel battaglione volontari "Italia libera". Partecipò alla difesa di Venezia, dove rimase sino alla capitolazione (agosto 1849). Tornato a Pavia privo di mezzi di sussistenza (nel frattempo erano deceduti entrambi i genitori) e affetto da una grave forma tifoidea, dopo qualche tempo riprese gli studi interrotti. Si iscrisse quindi al corso di laurea in Matematica presso l'università della propria città, dove ebbe come maestro Francesco Brioschi.

Conseguito nel 1853 il titolo di "dottore negli studi d'ingegnere civile ed architetto", iniziò la carriera dell'insegnamento. Fu dapprima professore nel ginnasio di Cremona, poi dal 1859 nel liceo "Beccaria" di Milano. Nel '60, avvenute nel frattempo le nozze con Elisa Ferrari, dalla quale ebbe tre figli, gli fu affidata la cattedra di Geometria superiore presso l'Università di Bologna,

²⁷ Per un elenco completo degli scritti di Giuseppe Battaglini, si possono consultare le già citate commemorazioni [D'OVIDIO 1894] e [AMODEO 1906].

²⁸ Una documentata biografia di Luigi Cremona ed una buona parte del suo epistolario sono contenuti in [GASCA *et al.* 1992], [MENGHINI *et al.* 1994], [MENGHINI *et al.* 1996], [NURZIA *et al.* 1999], [CARBONE *et al.* 2001], [CARBONE *et al.* 2002], [CERRONI *et al.* 2007] e nella voce biografica curata da U. BOTTAZZINI e L. ROSSI per il [DBI].

cattedra istituita appositamente per lui (fu la prima in Italia). Nel 1867, fu nominato professore di Geometria superiore e Statica grafica nell'Istituto tecnico superiore di Milano e quindi, nel 1873, fu chiamato a Roma dal ministro della Pubblica Istruzione Scialoja a sovrintendere la Scuola d'applicazione per gli ingegneri, dove teneva anche l'insegnamento di Statica grafica oltretutto, per incarico, quello di Geometria superiore.

Cremona, più di tutti gli altri "matematici risorgimentali", si adopera, esplicando la sua energica attività, per l'unificazione reale dell'Italia: un segno può essere considerato il "viaggio di ispezione" che compie in vari luoghi del Meridione d'Italia, dal Gennaio del 1863; esso non è soltanto una sorta di ideale prosecuzione dei rapporti da lui avuti con i volontari "napoletani" nella comune difesa di Venezia dal ritorno degli austriaci -1849- ma ha il sapore di una ricognizione fatta da un uomo che vuole direttamente conoscere per poter meglio agire. Testimonianze del viaggio e riflessioni intorno ad esso, sono sparse nelle lettere qui raccolte; ma, soprattutto, le riflessioni riguardano le preoccupazioni che Battaglini esprime nei confronti dell'amico a doversi interessare di affari concernenti "cotesto pernicioso paese" (lettera del 9 maggio 1863) e "le sofferenze alle quali siete stato soggetto nel vostro giro" (lettera del 13 giugno 1863).

Cremona arriverà ad essere, sebbene per un periodo brevissimo della perennemente agitata vita politica italiana, Ministro della Pubblica Istruzione, nel 1898, ed eserciterà, prima e dopo la sua nomina a senatore, una forte influenza nella definizione del sistema educativo italiano postunitario. Nel 1879 gli fu conferita la nomina a senatore per speciali meriti scientifici. Muore a Roma il 10 giugno del 1903.

2 – LE LETTERE

Lettera I

Napoli, 18 Novembre 1862

Mio carissimo Cremona.

Pochi giorni prima che ricevessi la vostra lettera, in cui mi parlate della sottoscrizione Matteucci,¹ si era tenuta dal Corpo Accademico di questa Università una riunione importantissima, a motivo del nuovo Regolamento Universitario.² Moltissimi tra gli onorevoli colleghi essendo mossi più da passione che da retto giudizio, si venne nella determinazione di nominare una Commissione, la quale ponesse in vista *le incongruenze, gli attentati alla libertà dell'insegnamento, le violazioni della Legge etc. etc.* che si credevano trovare nel detto Regolamento; in questa Commissione ha preso parte il De

Renzi. Comprendete che in tale disposizione degli animi la proposta della sottoscrizione per la medaglia al Ministro non poteva essere accolta favorevolmente: ne ho parlato al Rettore³ e ad altri Professori, ma essendomi accorto della indifferenza loro, non ho creduto dignitoso d'insistere maggiormente. Sono rimasto però d'accordo col Prof. Panceri di rivolgerci per le sottoscrizioni ai nostri soli amici. Per parte mia non ho potuto raccogliere che nove azioni di lire dieci ciascuna; vi spedisco perciò con lo stesso ordinario un vaglia postale di lire novanta, di cui vi prego accusarmi ricezione: nella stessa lettera che racchiude il vaglia postale troverete indicati i nomi dei sottoscrittori.

Ho ricevuto la vostra bellissima opera sulla teoria delle curve,⁴ e ve ne sono immensamente grato. L'impressione che ho provato alla prima lettura di essa è stato un profondo sentimento della mia piccolezza; in molti punti non ho veduto le cose con chiarezza; ma è necessario che io rilegga ancora, e studi con molta attenzione la vostra opera, per potervene dare un adeguato giudizio. Quello che per ora io credo si è, che un lavoro simile per la generalità delle proposizioni, e la semplicità con la quale sono dimostrate non si trovi in alcuna altra lingua, e che estendere il lavoro con lo stesso sistema alla teoria delle superficie,⁵ e delle curve storte non farebbe che accrescere i vostri titoli alla stima dei più distinti Geometri attuali.

Il prof. Rubini vi ringrazia moltissimo per l'esemplare della vostra opera, che gentilmente gli avete inviato; lo stesso desidererebbe conoscere se avete ricevuto alcune aggiunte o correzioni alla sua Algebra.⁶

Il Prof. Panceri vi ossequia distintamente.

Addio, mio carissimo amico. Credetemi sempre

V. Aff.mo G. Battaglini

¹ Presso l'Università di Bologna (che aveva allora tra i suoi professori Luigi Cremona), si era costituito un comitato per raccogliere sottoscrizioni fra i professori delle università italiane allo scopo di offrire una medaglia al ministro Carlo Matteucci, come segno di gratitudine per il *Regolamento generale delle università del Regno d'Italia* (cfr. nt. 2), col quale s'intendeva dare, tra le altre cose, un ordinamento unico a tutte le università italiane. Sulla questione, si possono vedere le lettere di Cremona a Genocchi poste ai n° 22, 23 e 24 di [CARBONE *et al.* 2001] e la lettera di Cremona a Betti datata 8 novembre 1862 pubblicata in [GATTO 1996 a].

² Si tratta del *Regolamento generale delle università del Regno d'Italia*, noto come *Regolamento Matteucci*, approvato nel 1862 mediante il *Regio Decreto n. 842 del 14 Settembre 1862 di approvazione del Regolamento universitario e di quelli delle Facoltà di giurisprudenza, di medicina e chirurgia, di scienze fisiche matematiche e naturali e di filosofia e lettere* pubblicato nella *Raccolta ufficiale delle leggi e dei decreti del Regno d'Italia*, Torino, Stamperia Reale, 1862, pp. 2226-2280. Al riguardo si veda pure [POLENGHI 1993], capitolo IV, *La tentazione dell'accentramento*, pp. 240-289.

³ Giuseppe De Luca.

⁴ Quasi sicuramente si tratta del lavoro [CREMONA 1862]. Esso fu pure stampato, ancora a Bologna e nello stesso anno, in un opuscolo a parte per i Tipi Gamberini e Parmeggiani, con una

ledica che Luigi Cremona indirizza al suo maestro Francesco Brioschi. Lo stesso lavoro è inserito in [CREMONA 1914], t. I, pp. 313-466.

In effetti, Luigi Cremona pubblicherà, qualche anno dopo, il lavoro [CREMONA 1866], diviso in due parti, inserito poi in [CREMONA 1914], t. II (1915), pp. 279-387. Esso fu stampato anche in un opuscolo recante i seguenti luoghi editoriali: Bologna, Tipi Gamberini e Parmeggiani, 1866.

Il riferimento potrebbe essere al volume [RUBINI 1861]. Seguiranno, negli anni successivi, altre edizioni di questo volume; in particolare: [RUBINI 1864], [RUBINI 1866], [RUBINI 1867].

Lettera 2

Napoli, 10 Aprile 1863

Carissimo Cremona.

Con grandissimo piacere io ed i miei abbiamo inteso il vostro felice arrivo a Napoli; di Tagliabue neanche noi abbiamo avuto notizie, spero per altro che si sia rimesso con la mano.

Nel mese entrante anderò con la famiglia ad abitare sopra Capodimonte, dove penso di rimanere fino a Novembre; vi dico questo affinché se venite a passare i mesi di Settembre ed Ottobre qui con la vostra Signora¹ ed i ragazzi,² vi facessi trovare un quartino a me prossimo, e così andremmo a studiare insieme Geometria superiore nel bosco Reale.

Tante cose per parte dei miei a voi ed alla vostra Signora; ricevete poi un abbraccio dal

Vostro aff.mo G. Battaglini

D. S.³ Vi mando un mio ultimo scritto,⁴ con due esemplari dello stesso per Ghelini e Beltrami, che saluto caramente.

Elisa Ferrari, andata in sposa a Luigi Cremona nel 1854.

Il riferimento è ai primi due figli di Luigi Cremona: Elena (nata nel 1856) e Vittorio, secondogenito. Tra i figli di Cremona che raggiunsero l'età adulta, l'ultima fu Itala che nacque, cfr. anche lettera n° 8), nel 1865 a Bologna e morirà a Genova nel 1939. Sembra, inoltre, che Luigi Cremona ed Elisa ebbero una quarta figlia, Luisa, nata nell'Ottobre del 1866 ma che morirà l'anno seguente a causa di un'infezione. Per qualche dettaglio su quest'ultima notizia, si può vedere [BRIGAGLIA et al. 2009], pp. 353-388.

Locuzione utilizzata da Battaglini al posto della latina *Post Scriptum*.

Si potrebbe trattare di una parte del lavoro [BATTAGLINI 1863 a] che ebbe una continuazione negli articoli [BATTAGLINI 1865 a] e [BATTAGLINI 1866].

Lettera 3

Napoli, 9 Maggio 1863

Mio caro Cremona.

Fummo tutti in famiglia in grandissimo pensiero per voi dopo la vostra partenza per Palermo,¹ a motivo del pessimo tempo di mare; il vostro biglietto

ha **confermato** i nostri presentimenti. Non c'è che fare; spero che ora stiate bene, **vi** prego solo di guardarvi dal sole, e da *varie altre cose* in cotesto pernicioso paese.

Ho corso pericolo di andare a Genova per alcuni esami nel Collegio di **Marina**;² fortunatamente è stata sospesa per ora la mia partenza, ed attendo altri ordini.

Mi pare di aver trovato qualche cosa circa le *magagne* dei teoremi di Jonquière;³ ve ne scriverò un'altra volta, volendomi assicurare meglio della cosa.

Sono in debito col Sig.^r de Spuches per la poesia del Vigo, di cui non mi ha fatto **sapere** il prezzo; se voi lo vedete vi prego dei miei saluti per lui.

Addio, mio caro Cremona; tanti saluti dai miei; tornate presto, e dateci vostre notizie.

Tutto vostro G. Battaglini.

D. S. Vi porgo i saluti di Kronecker.

¹ Luigi Cremona era stato inviato in Sicilia in qualità di ispettore delle scuole secondarie dal Ministero della Pubblica Istruzione. Sulla questione si possono consultare tre lettere di Cremona a Betti, pubblicate in [GATTO 1996 a], pp. 14 e 15.

² Il Collegio di Marina di Genova sorse nel 1816, dopo l'annessione della Repubblica di Genova al Regno di Sardegna, come *Regia Scuola di Marina* (per trasferimento della piemontese *Regia Scuola per Ufficiali di Marina* istituita a Villafranca, presso Nizza, nel 1762). Dopo l'Unità d'Italia, la Scuola di Genova operò contemporaneamente al *Collegio di Marina* di Napoli, che era un'eredità del Regno delle Due Sicilie. Entrambe nel 1878 confluirono nell'*Accademia Navale*, con sede in Livorno.

³ I teoremi qui menzionati sono inseriti in [DE JONQUIERES 1861]. Sul *Giornale di Matematiche*, al vol. I (1863), alla p. 128, vi è pubblicata, su richiesta di Luigi Cremona, una lettera, del 6 Febbraio 1863, di E. de Jonquière a lui indirizzata, in cui è scritto: "[...] Vous avez eu la bonté, dans votre *Introduction à la théorie des courbes planes* [si tratta di [CREMONA 1862]], de citer quelques théorèmes, qui j'ai donnés dans un article inséré au tome VI (2.^e série) du Journal de M.^r Liouville, pour 1861. J'ai l'honneur de vous faire remarquer que plusieurs de ces théorèmes sont énoncés par moi en termes *trop absolus*, quand il s'agit des séries de courbes d'ordre n et d'indice N [...]". Al termine della lettera, vi è anche il seguente avvertimento dello stesso Cremona: "Non potendo ora occuparmi dell'argomento, colla pubblicazione di questa lettera dell'esimio geometra francese, intendo anche di mettere in guardia i giovani lettori della mia *Introduzione* contro le *magagne* dei teoremi che concernono le serie di curve d'indice *qualsivoglia*". Giuseppe Battaglini, in [BATTAGLINI 1863 b], espone delle considerazioni che confermano le modifiche proposte da de Jonquière nella lettera indirizzata a Cremona.

Lettera 4

Napoli, 13 Giugno 1863

Carissimo Cremona.

La vostra lettera da Caltanissetta mi ha afflitto considerando le sofferenze alle quali siete stato soggetto nel vostro giro d'ispezione; fortunatamente ne siete ormai alla fine.

Mi aspetto da un giorno all'altro di rivedervi; resterete certamente qui qualche tempo per riposarvi. Se arrivando a Napoli non mi trovate a casa, venitevene nel casino, Strada S. Antonio a Capodimonte, N° 51; è la strada che conduce alla Specola.¹

Ho ricevuto lettera di Tagliabue, in cui mi domanda vostre notizie. È stato nominato Direttore del Collegio Nazionale Longone a Milano.² Ricevei anche lettera da Beltrami in cui mi accennava a dispiaceri avuti per l'indisciplina della scolaresca nell'Università di Bologna; è un male, questo, generale; già saprete che per tale motivo è stata chiusa l'Università di Palermo.

Tanti saluti per parte di Mammà,³ Silvia,⁴ i fratelli,⁵ ed i Colleghi. Abbracciandovi intanto, nella speranza di rivedersi al più presto, sono

Il Vostro aff. mo amico G. Battaglini

¹ Trattasi dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte, in Napoli, fondato, nel 1809, dal re Gioacchino Napoleone (vale a dire Gioacchino Murat).

² Si tratta dell'ancora oggi esistente "Convitto Nazionale Pietro Longone" di Milano.

³ Luisa Tofano, madre di Giuseppe Battaglini.

⁴ Silvia, sorella di Giuseppe Battaglini.

⁵ Sono Michele e Angelo Battaglini, fratelli di Giuseppe.

Lettera 5

Napoli, 7 [Gennaio] del 1864

Carissimo Cremona.

Spero nell'entrante settimana di poter incominciare ad uscire e riprendere le mie occupazioni.

Questa mattina finalmente mi hanno mandato il fascicolo di Novembre del Giornale.¹ Ho riveduto anche [*sic*] una volta il vostro articolo² da inserirsi nel prossimo numero, rifacendone i calcoli.

Ho ricevuto lettera da Betti,³ in cui mi dice che il Ministro⁴ trova regolare che Padula cumuli la Cattedra di Meccanica razionale nell'Università [di Napoli], con la Direzione della Scuola degl'Ingegneri.⁵ Io non ne capisco nulla; pare che le leggi si facciano per rimanere lettera morta; io so che per legge si può cumulare un insegnamento colla scuola degl'Ingegneri, con la direzione della stessa scuola; so ancora che non si possono cumulare due insegnamenti ordinarii, dipendenti dal Ministero d'istruzione pubblica, e finalmente so che non si possono avere più di due impieghi; ora trovo che Padula per ora ne ha quattro, ed oltre a ciò (perdonatemi, ma non mi so frenare) i suoi alunni di Meccanica razionale in vece [*sic*] di far lezione nell'Università, la fanno in una

casa, corrispondendogli un mensile; la ragione è facile comprenderla. Bisogna convenire che se nella vostra Università vi sono dei gravi inconvenienti, qui ve ne sono altri di diversa natura. Basta, è sperabile che presto o tardi il tutto si ponga in chiaro e che se ne apportino rimedio.

Tanti auguri felici pel nuovo anno, anche per parte della mia famiglia; Mammà quando vede le vostre lettere mi domanda sempre: Quando viene Cremona?

Ora io non potevo immaginare, nella mia semplicità matematica, che in ciò vi potessero essere tante difficoltà.

Amatemi intanto, e credetemi sempre

Il vostro aff.mo G. Battaglini

¹ Il riferimento è al *Giornale di Matematiche*, per il quale si veda la *Presentazione*.

² Potrebbe trattarsi del lavoro [CREMONA 1864 a] contenuto in [CREMONA 1914], t. II (1915), pp. 95-99, che segue all'omonimo articolo, pubblicato l'anno precedente sia negli *Annali di matematica pura ed applicata* (s. I, t. V, pp. 330-331), sia nel *Giornale di Matematiche* (vol. I, pp. 225-226), e anche inserito in [CREMONA 1914], t. II (1915), pp. 92-94.

³ Quasi certamente è la risposta alla lettera di Battaglini a Betti, datata Napoli, 17 Dicembre 1863 (pubblicata in [CASTELLANA *et al.* 1996], pp. 190-192; per la questione, si veda la *Presentazione*.

⁴ Michele Amari.

⁵ Con Decreto del 4 Marzo 1811, il re Gioacchino Napoleone fondò a Napoli la *Scuola di Applicazione di Ponti e Strade* nel *Corpo degli Ingegneri di Ponti e Strade*. Dopo l'Unità, la *Scuola* di Napoli assunse il nome di *Scuola di Applicazione degli Ingegneri del Genio Civile*; nel 1863, quello di *Regia Scuola d'Ingegneria* e infine, nel 1904, quello di *Scuola Superiore Politecnica*. Nel 1935 fu aggregata all'università, divenendo Facoltà di Ingegneria.

Lettera 6

Napoli, 7 Settembre 1864

Mio carissimo Cremona.

Buone notizie: questa mattina appunto ho saputo che l'affare di Padula¹ è accomodato; i decreti del pareggiamento dei soldi tra i Professori dell'Università [di Napoli] e quelli della Scuola degli Ingegneri, aspettano solamente la firma.

Padula farà da Direttore nella detta Scuola, ed insieme da Professore di Meccanica applicata, e lascerà l'Università. Solamente (vedete tenacità!) Padula domanderebbe di rimanere a dare lezione di Meccanica razionale nell'Università gratuitamente!!! credo con la tacita speranza che qualche futuro Ministro gli darebbe finalmente anche un soldo per ciò: mi auguro che questa pretesa non gli sia accordata.

Avrei intanto desiderio di conoscere da voi se Betti si trova a Torino, ché sarebbe il momento di accomodare il nostro affare, anzi aspetto che mi diciate come credete che dovessimo procedere per la sicura riuscita.

Scrivetemi subito: tanti saluti dai miei, e nella ferma speranza di abbracciarvi ben presto qui in Napoli, sono sempre

Il vostro aff.mo G. Battaglini

¹ Per la questione che qui Battaglini definisce come “affare di Padula”, si veda la *Presentazione*.

Lettera 7

Napoli, 19 Settembre 1864

Carissimo Cremona.

Ho scritto a Betti; vedremo che ne risulterà.

In questi giorni escono insieme due fascicoli del Giornale di Matematiche; li troverete al vostro ritorno a Bologna: la modifica al vostro articolo sulle coniche,¹ che mi avete mandata, andrà nell'altro fascicolo, il quale spero che possa uscire per la fine del corrente mese. Vi ringrazio anticipatamente per l'altro articolo, che intendete d'inviarmi.

Vi rimetto per ora la fotografia di mio fratello Angelo; fra giorni avrò quella di Mamma, e di mia sorella Silvia, che vi manderò a Bologna; io poi desidererei tanto di avere il ritratto del vostro piccolo Cremona,² che bussa alla porta del vostro gabinetto da studio, e non risponde quando voi domandate chi sia.

A proposito di fotografie, spero che riceveste la mia, che mi avevate domandata, per mandarla a Clebsch.

Se a Milano vedete l'ottimo Tagliabue, vi prego di salutarlo, in nome anche della mia famiglia: non so se gli pervennero due fotografie, che gl'inviavi nel mese di Giugno; siccome debbo ancora mandargliene due altre, desidererei conoscere se abita ancora in Via della Maddalena N.° 8.

Tanti saluti di tutti. Amate intanto

Il Vostro aff.mo G. Battaglini

¹ Probabilmente si tratta dell'articolo di Cremona *Sulla teoria delle coniche*, apparso nella sezione *Rivista bibliografica*, facente parte degli *Annali di matematica pura ed applicata*, t. VI (1864), pp. 179-190, e nel *Giornale di Matematiche* vol. III (1865), pp. 60-64 e pp. 113-120, e raccolto in [CREMONA 1914], t. II (1915), pp. 123-134.

² Vittorio, figlio di Luigi Cremona.

Lettera 8

Napoli, 11 Maggio 1865

Carissimo Cremona.

Sono stato fortunato, insieme a tutti di famiglia, di conoscere il vostro degnissimo Sig.¹ fratello:¹ potergli come che sia rendere servizio sarà per noi il

massimo piacere. Oggi per l'appunto faremo con lui una gita a Capodimonte; i maledetti briganti che si sentono a poca distanza da Napoli gl'impediranno di vedere Pozzuoli e Sorrento; ma non c'è che fare, bisogna conciliarci prima col Papa per essere liberi da tanto flagello.²

A proposito di flagelli, pare che ne abbiate uno costà nel Reggente dell'Università,³ arguendolo dalla vostra lettera stampata a lui diretta; bisogna armarsi di pazienza; e se non vi dispiace, ditemi un poco che seguito ha avuto tale affare?

Vi ringrazio moltissimo degli scritti vostri che mi avete inviato, cioè gli articoli della rivista italiana⁴ sulla storia della Prospettiva,⁵ la Memoria sull'ipocicloide tricuspidale,⁶ il grazioso articolo sulle normali alle coniche,⁷ e finalmente la Memoria sulle trasformazioni delle curve piane.⁸ Passerò subito a Dino e d'Ovidio gli esemplari di quest'ultima Memoria, e per ora vi ringrazio io per essi. Nella prossima tornata dell'Accademia⁹ presenterò poi la vostra Memoria; questo invio mi fa supporre che abbiate avuto partecipazione della vostra nomina a Socio corrispondente della medesima Accademia.

In quanto al viaggio pel Nord seriamente non lo farei in quest'anno, quand'anche me se ne presentasse l'occasione, tanto più che mi fate sperare di poterlo fare in vostra compagnia nel venturo anno. Per Settembre ho un progetto con alcuni amici di girare un poco per l'Italia; spero che non mutino di parere; il viaggiare solo, mi annoierebbe.

Mi congratulo con voi per la nuova piccola Cremona¹⁰ che avete avuto; anche mio fratello maggiore¹¹ è padre di una bambina; questa mi è della più grande utilità morale, poiché dormendo io nella stanza attigua alla sua, e sentendola gridare continuamente, fo delle profonde meditazioni sulla felicità dello stato coniugale.

Addio, mio caro Cremona; ricevete i saluti dei colleghi, tante cordiali espressioni di tutti di famiglia, ed un affettuoso abbraccio del

Vostro aff.mo G. Battaglini

¹ Forse Giuseppe Cremona (1796-1876).

² Battaglini accenna al grave problema del brigantaggio, esplosivo, nelle provincie meridionali, al tempo della costituzione del Regno d'Italia, a causa sia della reazione messa in atto dalla nobiltà fedele al Borbone sia della contrapposizione tra il nuovo Stato italiano e la Chiesa. Il papa a quel tempo era Pio IX (Giovanni Maria Mastai Ferretti -1792-1878-).

³ Si tratta di Antonio Montanari. Gli ostili rapporti tra Cremona e Montanari si possono dedurre anche dalle lettere che Cremona spedisce a Betti a partire dal 1863. In particolare, in quella del 18 Agosto 1863, Cremona definisce Montanari "il più tristo intrigante che esista al mondo!". Si veda anche [GATTO 1996 a]. Un'altra testimonianza di tale controversia si evince dal *Rendiconto del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione del 10 Agosto 1865*, relativo ad un reclamo di Cremona "contro il rettore dell'Università di Bologna per essere stato escluso dal far parte di una commissione di esame" (Archivio Centrale di Roma, *Ministero Pubblica Istruzione. Consiglio Superiore*, b. 11, fasc. 12, Rendiconto N. 681), dove si dice testualmente: "Deliberazione presa: Dirigersi severo rimprovero al Rettore pel fatto di cui muove querela il prof. Cremona". Ancora,

vi è cenno della controversia Cremona - Montanari anche in [FIOCCA 1991], p. 106. Sulla persistenza dei cattivi rapporti tra Cremona e Montanari si può vedere pure la lett. n° 42 di Brioschi a Cremona, datata Firenze, 4 Giugno 1868, raccolta nel volume [PALLADINO *et al.* 2009].

⁴ Si tratta della *Rivista italiana di Scienze, Lettere ed Arti colle Effemeridi della Pubblica Istruzione*, fondata a Torino nell'Agosto del 1861 (visse fino al 30 Ottobre del 1865) e che aveva assorbito l'*Effemeride della Pubblica Istruzione*, periodico (fondato a Torino il 15 giugno del 1860) che si occupava della politica scolastica e della pubblicazione degli atti ufficiali della Pubblica Istruzione. La *Rivista* aggiunse ai compiti precedenti l'alta divulgazione culturale. Col trasferimento della capitale del Regno d'Italia da Torino a Firenze e a seguito della sua fusione con altri giornali, la *Rivista* divenne *L'Ateneo italiano. Giornale di scienze lettere ed arti con le effemeridi del pubblico insegnamento*, pubblicato fino a giugno del 1866.

⁵ [CREMONA 1865 a], inserito in [CREMONA 1914], t. II (1915), pp. 249-270.

⁶ Potrebbe essere [CREMONA 1864 b], inserito in [CREMONA 1914], t. II (1915), pp. 219-239.

⁷ [CREMONA 1865 b], inserito in [CREMONA 1914], t. II (1915), pp. 241-243.

⁸ [CREMONA 1865 c], inserito in [CREMONA 1914], t. II (1915), pp. 193-218.

⁹ È l'*Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* di Napoli che, dal 30 Aprile 1861, per volere del ministro della Pubblica Istruzione dell'appena formatosi Regno d'Italia, Francesco Saverio De Sanctis (1817-1883), viene ad essere una componente della *Società Reale* di Napoli; quest'ultima era la nuova denominazione assunta dalla *Società Reale Borbonica*.

¹⁰ Si tratta di Itala.

¹¹ Michele Battaglini.

Lettera 9

Napoli, 18 Giugno 1865

Carissimo Cremona.

Vi scrivo pochi rigi per dirvi che ho trovato presso Pellerano un'altra copia della vostra Introduzione,¹ in ottimo stato, e che insieme alle altre vostre Memorie presenterò all'Accademia² nella prima tornata di Luglio.

Alla prima occasione indicherò nel Giornale la lieve modificazione da apportare all'enunciato della questione 34.³

Ricevete i saluti della famiglia, ed un abbraccio dal

Vostro aff.mo G. Battaglini

¹ Il riferimento è all'importante lavoro [CREMONA 1862].

² Si tratta dell'*Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* di Napoli.

³ Così come solitamente erano pensate molte riviste dell'epoca, uno spazio del *Giornale* era dedicato alla proposta di questioni, riguardanti problemi o dimostrazioni, su cui i lettori erano invitati a dare risposta. La questione alla quale si accenna qui fu pubblicata sul *Giornale di Matematiche*, al vol. II (1864), alla p. 91; essa fu modificata e riproposta, sullo stesso *Giornale*, al vol. III (1865), alla p. 81. Nelle *Opere matematiche di Luigi Cremona*, questa seconda versione è inserita tra le *Questioni proposte nel Giornale di Matematiche*, al t. II (1915), alle pp. 65-69, ed il suo enunciato è il seguente: "Le tangenti nei vertici delle parabole inscritte in un triangolo inviluppano una medesima curva di 3^a classe e 4° ordine, che è l'ipocicloide della quistione precedente".

Lettera 10

Napoli, 15 Agosto 1865

Carissimo Cremona.

Mi **dispiace** tanto sentirvi poco bene; ma lasciate per poco gli studii **matematici**! la troppa contenzione della mente produce gli effetti che risentite: moto ed **amene** letture vi rimetteranno subito.

Ho **avuto** per alcuni giorni un poco di febbre reumatica; ora mi sento quasi bene. Mi **occuperò** di qualche quistione pel Miller, e ne parlerò ai Colleghi.

Nel **prossimo** fascicolo del Giornale porrò l'avvertenza relativa alla **questione** sulle serie di superficie di 2° ordine.¹

Le **proposte** Matteucci² essendo fatte a nome del Consiglio superiore di pubblica **Istruzione**, dovrebbero essere accettate dal Governo; le Scuole normali **superiori** di Fisica e Matematica sarebbero molto utili, e dovendo essere **solamente** tre (delle quali una in Napoli) si rinnoverebbe la speranza di potervi **avere** tra noi.

Se **rimarrete** in cotesta montagna, sino ai primi giorni di Ottobre, datemi l'**indirizzo** preciso della vostra abitazione, poichè in quell'epoca verranno a farvi una **visita** mio fratello Angelo e mia sorella Silvia; essi partiranno verso la metà **dell'**entrante mese; e gireranno un poco per l'Italia superiore. Li **accompagnerei**, se non mi trovassi impegnato in un importante affare: caro Cremona, non so se faccio il più grande degli spropositi, o pure se mi pongo l'animo **in pace**; prendo moglie!!!³ Io sono fatalista e mi abbandono al destino.

Datemi sempre vostre buone notizie. Ricevete i cordiali saluti dai miei, ed un abbraccio dal

Vostro aff.mo G. Battaglini

¹ Si tratta della "questione 44", pubblicata sul *Giornale di Matematiche*, al vol. III (1865), alla p. 64. Essa fu inserita al t. II (1915) di [CREMONA 1914] tra le *Questioni proposte nel Giornale di Matematiche* ed il suo enunciato è:

"In una serie di superficie di 2.° ordine, detti μ, ν, ρ i numeri esprimenti quante superficie della

serie passano per un punto, toccano un piano, toccano una retta, sarà $\rho = \frac{\mu + \nu}{2}$. Sia poi p il

numero delle superficie della serie che si riducono a semplici coniche, cioè che hanno un piano tangente doppio, e sia q il numero delle superficie della serie che sono coni, cioè che hanno un

punto doppio; si avrà $p = \frac{3\mu - \nu}{2}$, $q = \frac{3\nu - \mu}{2}$."

L'avvertenza a cui si riferisce Battaglini è pubblicata nel medesimo vol. III del *Giornale di Matematiche*, alla p. 149, ed è inserita in [CREMONA 1914], ancora al t. II, nella *nota 16* delle *Note dei revisori* (alla p. 434) che dice:

"[...] Nello stesso vol. III del Giornale, a pag. 149, si trova la seguente «Avvertenza»: «La proprietà espressa nella questione 44 (p. 64) con la quale si pone una relazione fra le tre caratteristiche di una superficie di 2.° ordine, non è vera in generale, siccome il signor Salmon ha

fatto notare al signor Cremona». Effettivamente si riconosce che le formole della quistione 44 valgono solo nell'ipotesi che la serie di quadriche non contenga alcuna superficie della 3.^a specie di degenerazione, cioè coppia di piani come luogo e coppia di punti come inviluppo¹.

² Le proposte di Carlo Matteucci riguardavano principalmente un rafforzamento degli studi secondari, accompagnato da una riduzione del numero di atenei statali. Le università cosiddette "complete" sarebbero state ancora quelle di Torino, Pavia, Bologna, Pisa, Napoli, Palermo, mentre accanto a questi atenei vi sarebbero state tre Scuole di Ingegneria (a Torino, a Milano e a Napoli), tre Scuole Normali superiori per Lettere e Filosofia (a Torino, a Pisa e a Napoli), tre Scuole Normali superiori per Matematica e Scienze fisiche e naturali (a Torino, a Firenze e a Napoli), sei Istituti clinici (presso gli ospedali di Torino, Milano, Bologna, Firenze, Napoli, Palermo). Le città di Catania, Genova, Modena e Parma avrebbero conservato la Facoltà di Giurisprudenza e i primi quattro anni della Facoltà di Medicina. Inoltre, le università con una media annua di cento studenti o prive di adeguati mezzi per i laboratori di Fisica, Chimica ed Anatomia avrebbero perso i fondi statali, che sarebbero andati agli studenti meritevoli affinché studiassero altrove. Tale provvedimento avrebbe provocato come conseguenze la chiusura delle università di Macerata, Messina, Siena, Cagliari e Sassari. Si lasciava però agli enti locali la facoltà di provvedere ad università libere. Al riguardo, si può consultare [POLENGHI 1993], capitolo V, *Gli anni del dibattito e della stasi legislativa*, pp. 295-296.

³ Giuseppe Battaglini sposa, nell'Ottobre del 1865, Anna Egg.

Lettera 11

Napoli, 3 Ottobre 1865

Mio carissimo Cremona.

Il viaggio di mio fratello e di mia sorella andò in fumo; essi dovevano partire verso i 12 di Settembre, ma da una parte la paura del cholera¹ [*sic*], e dall'altra il desiderio di trovarsi in Napoli presenti al mio matrimonio, ha fatto loro rimettere il viaggio ad altra stagione.

Adunque nella settimana entrante mi incateno; spero di non essermi ingannato nella scelta della mia compagna; in ogni modo *ad hoc nati sumus*.²

Il sesto del mese d'Ottobre la porterò tra Castellammare e Sorrento; mi sono distratto bastantemente, e non penso per nulla alla Geometria; mi propongo però a Novembre rifarmi del tempo perduto.

Tante cose dai miei; amate intanto il sempre

Vostro aff.mo G. Battaglini

¹ Trattasi delle prime emergenze dell'epidemia di colera che esplotterà in tutta la sua virulenza negli anni 1866-1867, colpendo molte delle regioni d'Italia.

² "Siamo nati per questo", vuole ricordare Battaglini.

Lettera 12

Napoli, 6 Novembre 1865

Carissimo Cremona.

Sono da più giorni ritornato a Napoli, a motivo del cattivo tempo. Il mio nuovo stato non mi porta male: non essendo stato mosso da motivi di interesse, o da irragionevole simpatia, nella scelta della mia compagna, son certo che non avrò a pentirmene.

In quanto al vostro articolo sulla prospettiva,¹ che volete far inserire nel Giornale, debbo dirvi con dispiacere che l'Editore Pellerano si è spaventato della spesa di trenta franchi, che occorrerebbe per le undici figure che accompagnano lo scritto, e mi proponeva che vi facessi contribuire per la metà: egli si scusa per le tristi condizioni del Giornale, dal quale non si ricavano le spese di stampa, oltre lo scarsissimo numero di associati. Fatemi conoscere la vostra intenzione sul proposito, e nel caso che la condizione vi convenga, porrò ogni cura per l'esecuzione delle figure, e per le correzioni.

Avrei piacere di conoscere l'indirizzo di Chelini a Roma, come ancora di avere notizie di Tagliabue, che avrete veduto a Milano.

Qui il cholera [*sic*] aumenta; nella giornata di ieri si sono avuti più di cento casi; conviene però pensarvi quanto meno è possibile.

Oltre della mia Memoria, che dite di aver ricevuta, ve ne ho spedita anche un'altra sulle involuzioni dei diversi ordini.²

Addio, mio caro Cremona; ricevete i saluti di tutti di famiglia, che vi prego di far gradire ancora al vostro Sig.^r fratello Giuseppe, ed amate

Il vostro aff.mo G. Battaglini

¹ Si tratta di [CREMONA 1865 d], inserito in [CREMONA 1914], t. II (1915), pp. 271-278.

² [BATTAGLINI 1865 b]. Un sunto di questa memoria è in [BATTAGLINI 1865 c]. L'intera memoria è anche pubblicata con il titolo *Sulle forme geometriche di seconda specie* in [BATTAGLINI 1866].

Lettera 13

Napoli, 8 Aprile 1866

Carissimo Cremona.

Sono circa tre mesi che v'inviavo la fotografia di mia moglie; poiché si è dispersa, non avendola voi ricevuta, ve ne accludo un'altra.

Sono per ora libero dai dolori reumatici. Il resto della famiglia se la passa piuttosto bene; solo mia sorella è da circa un mese travagliata per un ascesso sotto l'ascella; speriamo però fra giorni poter licenziare il chirurgo.

Con grandissimo piacere sento che facilmente verrete a Napoli nel prossimo Settembre in occasione del Congresso. Manderò un invito al Sig.^r Hirst.

Ho ricevuto la vostra traduzione della Memoria sull'inversione quadrica del Sig.^r Hirst,¹ e ve ne ringrazio. Se non vi dispiacesse, riprodurrei questa Memoria nel Giornale, poiché non mi è stato possibile avere dal Sig.^r Salvatore

Dino la traduzione della stessa Memoria che da tanto tempo egli si era proposto di fare.

Spero che avrete ricevuto il fascicolo Gen. Feb. del Giornale destinato per voi, che solamente per sbaglio Pellerano avea trascurato d'inviarvi; vi sarà sempre spedito finché avrà vita.

Ricevete tanti saluti di tutti di casa, ed un abbraccio dal

V. aff.mo G. Battaglini

D. S. Il Sig.^r Güssfeldt² parti da Napoli prima di Pasqua.

¹ La memoria è [Hirst 1865]. La traduzione di questo lavoro, curata da Luigi Cremona, dal titolo *Sull'inversione quadrica delle curve piane*, fu pubblicata sia negli *Annali di matematica pura ed applicata*, t. VII (1865), pp. 49-65, che nel *Giornale di Matematiche*, vol. IV (1866), pp. 278-293.

² Presumibilmente Paul Güssfeldt.

Lettera 14

Napoli, 31 Gennaio 1867

Mio caro Cremona.

È una disgrazia che le mie lettere non giungano al loro destino; io risposi subito alla vostra del 12 gennaio, indicandovi le ragioni per le quali non poteva discendere alla vostra proposta relativa al Giornale di Matematiche;¹ mi tocca ora di ripetervele.

In primo luogo posso assicurarvi che nella mia determinazione non entra alcun motivo dettato da amor proprio mal inteso, da municipalismo etc. etc.; sento di essere superiore a tutte queste corbellerie; è una pura questione di delicatezza. Converrete con me che nel fondare un giornale scientifico, oltre del lato *poetico* dell'impresa (amore dell'Italia cioè, e gloria personale) ve ne è un altro tutto *prosaico*, relativo ai vantaggi pecuniarii che se ne spera di ritrarre. In omaggio a questa debolezza umana, quando nel 1863, insieme con Trudi e Janni, si fondò il Giornale di Matematiche, l'Editore Pellerano (che assunse di farne interamente le opere) promise di dare un compenso ai redattori, a seconda del profitto che egli stesso ne avrebbe ritratto; in fine del primo anno ci toccò per ciascuno un paio di centinaia di lire: allora fu che i miei due colleghi, troppo speranzosi sulle sorti del Giornale, vollero entrare in perfetta società con Pellerano, contribuendo anche essi alle spese della pubblicazione, e pretendendo ad un compenso maggiore: io fui avverso a questa combinazione, ma per fare cosa grata ai Colleghi acconsentii finalmente a far parte della loro società. Disgraziatamente però nel secondo anno si perdette ciò che si era guadagnato nel primo; si tornò allora nel sistema primitivo, ma siccome le sorti del Giornale divennero sempre peggiori, nel terzo anno l'Editore, non che essere [intendasi "*oltre a non essere*", n.d.r.] in

grado di dare un compenso ai redattori, si trovò in *deficit*, ed i miei Colleghi, perduta ogni speranza di lucro, mi lasciarono solo alla redazione. Pellerano sollecitato da me, ad onta della perdita fatta, volle continuare nel quarto anno la pubblicazione del Giornale, ma ora il suo *deficit* ascende a circa lire duemila. In questo stato di cose voi comprendete bene che per parte mia non posso avere interesse alla continuazione del Giornale, e volendo pubblicare qualche mio scritto, certamente avrei più a caro che uscisse in un Giornale come quello che andrete a stabilire: però l'Editore ha la mia parola da galantuomo (alla quale non posso mancare) che non avrei lasciato la redazione del Giornale se non col suo consenso; ora questo consenso egli non è affatto disposto a darlo, poichè cessando la pubblicazione del Giornale, la perdita da lui fatta è irreparabile, mentre continuando, e migliorandosi la redazione si ha la speranza di rifarsi.

Ecco il vero stato della cosa; a me non sembra azione onesta lasciare l'Editore in imbarazzo, quando per sola mia sollecitazione ha continuato in un'impresa non fortunata.

Se voi potreste suggerirmi un mezzo come uscire onorevolmente da questa delicata posizione, io l'accoglierei con la massima sollecitudine. Vi prego di esporre al Sig.¹ Brioschi queste mie considerazioni; nulla mi sarebbe tanto dispiacevole quanto cadere menomamente dalla vostra stima, e darvi a supporre in me un'intenzione di ostacolare un vostro onorevolissimo proposito.

Tanti saluti per parte dei miei a voi, e al vostro Sig.¹ fratello Giuseppe. Credetemi intanto

Il tutto vostro G. Battaglini

¹ La proposta fatta da Cremona a Battaglini è esplicitata nella lettera di Cremona a Hirst, del 12 gennaio 1867, menzionata nella *Presentazione*.

Lettera 15

Napoli, 1 Aprile 1868

Mio caro Cremona.

Ho ricevuto la Memoria dello Stammer¹ che mi avete inviato; vado a scrivere a lui direttamente, per indicargli le condizioni degli Estratti separati degli Articoli che s'inseriranno nel Giornale di Napoli.

Ricevei poi la vostra stupenda Memoria sulla superficie del 3° ordine;² pervenne all'Accademia delle Scienze³ insieme all'esemplare diretto ad essa. Ve ne sono immensamente grato.

Vi raccomando sempre più Jung ed Armenante; non so se abbiate molti Allievi che seguano i vostri corsi superiori; son certo però che i miei raccomandati si distingueranno tra gli altri, almeno per la loro buona volontà.

Verso la metà del mese avrete una visita da mio fratello e da mia sorella, che si accingono a fare un piccolo viaggio per l'Italia; per me non c'è pericolo che mi muova, essendo non altro che un vegetabile [sic].

Non so se Tagliabue sia a Milano, né quale sia il suo indirizzo; in ogni modo i due viaggiatori che avranno certamente desiderio di rivederlo, faranno capo da voi per le informazioni.

Ricevete gli ossequi di d'Ovidio, ed un abbraccio da

Vostro aff.mo G. Battaglini

¹ La memoria è [STAMMER 1868].

² Si tratta di [CREMONA 1868], inserito in [CREMONA 1914], t. III (1917), pp. 1-121. La memoria fu anche stampata in un opuscolo a parte, con i luoghi editoriali "Berlin, Imprimé Chez George Reimer, 1868".

³ È l'*Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* di Napoli.

Lettera 16

Napoli, 8 Aprile [18]69

Mio caro Cremona.

Sento con dispiacere che siete stato poco bene in salute; abbiatevi caro.

Resto inteso per la correzione da apportare alla vostra lettera sull'Euclide:¹ Hoüel mi ha fatto anche notare l'imbroglio occorso nel suo scritto.

Ho avvisato Pellerano riguardo all'associazione del Giornale pel Sig.^r Hirst.

Vi fa meraviglia che io non mi sia ancora svincolato da Pellerano; ma rompendola a dirittura [sic] con lui non ne avrei ricavato nulla, mentre consentendo ad occuparmi ancora per qualche tempo del maleaugurato Giornale, l'ho potuto indurre ad intraprendere la pubblicazione del Calcolo Differenziale ed Integrabile di Todhunter,² per la traduzione del quale mi porta Lire mille e duecento: ora di questa somma io avea bisogno, né mi è venuta altra via per procurarmela, che di sottostare alle tirannie di un Editore. Ho ottenuto ancora poco più di un centinaio di Lire all'anno, a titolo di compenso per *qualcheduno* che mi aiuti nella correzione delle prove di stampa (questo qualcheduno comprendete che sono io stesso) e in questa somma solamente posso fare qualche agevolazione agli amici intorno alle spese per gli estratti dei loro articoli inseriti nel Giornale, ché sperarla dall'Editore sarebbe inutile.

Vi dissi che avea tentato la via dell'insegnamento privato, per cercare un aumento alle mie rendite, ma non ebbi neanche uno scolaro; ed infatti perché dovrebbero venire i giovani da me, quando trovano una turba d'insegnanti privati che in pochi mesi li mettono al caso³ di diventare dottori?

Basta, lasciamo questo tristo discorso, e parliamo di cose allegre.

Vi ringrazio per gli augurii che mi fate riguardo alla mia bambina;⁴ a me basta che vivesse.

Ricevete i saluti di mio fratello e di mia sorella, e credetemi sempre

Il vostro aff.mo G. Battaglini

¹ Si tratta della lettera [BRIOSCHI *et al.* 1869] in [CREMONA 1914], t. III (1917), pp. 133-136, scritta da Francesco Brioschi e Luigi Cremona a Giuseppe Battaglini. Essa costituisce la risposta all'articolo [WILSON 1868] tradotto da Raffaele Rubini ([RUBINI 1868]) in cui ci sono critiche agli *Elementi* di Euclide assunto come libro di testo. Questo scritto testimonia un momento del dibattito, svoltosi in Italia subito dopo la raggiunta unificazione, intorno al metodo con cui andava insegnata la geometria nelle scuole preuniversitarie e alla conseguente scelta, o composizione *ex novo*, di corrispondenti testi scolastici. Per tutta la vicenda, in cui vennero a inserirsi anche Guillaume Jules Houël e J.M. Wilson, si possono consultare, tra l'altro, [BOI *et al.* 1998], pp. 52-57 e [NURZIA 1999 a], Lettere di Thomas A. Hirst a L. Cremona n° 57-59.

² Il riferimento è alla traduzione, curata da Battaglini, dei volumi [TODHUNTER 1852] e [TODHUNTER 1857]. Entrambe queste opere ebbero varie riedizioni. Le traduzioni menzionate uscirono ancora in due volumi recanti i seguenti titoli: *Trattato sul calcolo differenziale con molti esempi* e *Trattato sul calcolo integrale e le sue applicazioni con molti esempi*, Napoli, Libreria scientifica e industriale di B. Pellerano, 1870.

³ Battaglini usa l'espressione "mettono al caso" per "mettono in grado"; la stessa cosa avverrà pure nella successiva lettera 33.

⁴ Battaglini ebbe due figli, Eloisa e Mario; cfr. [AMODEO 1906]

Lettera 17

Napoli, 14 Novembre 1869

Carissimo Professore.

Il porgitore della presente, Sig.^r Francesco Milone, è un ottimo e studioso giovane, il quale ha fatto i suoi studii in questa Università, ed in questa Scuola degl'Ingegnere [*sic*]; ora egli si reca a Milano per completare la sua istruzione in cotesto Istituto tecnico superiore.¹ Ve lo raccomando vivamente, e son certo che rimarrete contento di lui.

Credetemi intanto

Il vostro aff.mo amico Giuseppe Battaglini

¹ Si tratta dell'*Istituto Tecnico Superiore*, oggi *Politecnico*, di Milano, fondato da Francesco Brioschi nel 1862, ma effettivamente aperto nel mese di Novembre dell'anno successivo. Brioschi ne fu direttore dal 1863 fino alla sua morte.

Lettera 18

Napoli, 24 Ottobre 1871

Carissimo Cremona.

Per mezzo del Prefetto di Milano riceverete un plico contenente i Documenti dell'unico Concorrente alla Cattedra di Meccanica nell'Università di Pisa, il Sig.^r Ernesto Padova.¹ Questi Documenti io li ho ricevuti dal Prof.

Betti, perché li esaminassi e poi li spedissi a voi, per quindi spedirli voi al Prof. Beltrami.

Aspetto con impazienza il giorno in cui potrò stringervi la mano a Pisa; mi piacerebbe però che la nostra riunione, se è possibile, avvenisse nella seconda quindicina di Novembre, per poter soddisfare il mio obbligo dell'assistenza agli esami in questa Università;² esami che ordinariamente durano sino ai quindici di Novembre.

È qualche tempo da che ho scritto una lettera al Com. Brioschi; l'ho diretta all'Istituto superiore,³ ma son certo che gli sarà pervenuta. Intanto se avete occasione di vedere il Com.^c vi prego di dirgli da mia parte che mi attendo dalla sua cortesia due parole di risposta alla mia lettera.

Ricevete tanti saluti dai miei, e credete all'amicizia sincera del

Vostro aff.mo Giuseppe Battaglini

¹ Effettivamente la nomina andò ad Ernesto Padova.

² Battaglini sta per lasciare l'Università di Napoli poiché con Regio Decreto del 23 Ottobre 1871 è stato nominato professore di Geometria superiore all'Università di Roma (con la retribuzione di lire 5500 annue). Un successivo R. Decreto, del 25 Novembre 1871, conferisce a Battaglini anche l'incarico dell'insegnamento di Calcolo infinitesimale per l'anno scolastico 1871-'72 (con la retribuzione di lire 1250 annue). Cfr. la *Presentazione*.

³ È l'*Istituto Tecnico Superiore*.

Lettera 19

Roma, 25 Febbraio 1874

Mio Caro Cremona.

Mi scrive Pellerano da Napoli incaricandomi dirvi che spediate alla Biblioteca della R. Università di Napoli una copia degli *Annali di Matematica*¹ pel 1874; mi farete poi sapere l'importo, affinché io alla mia volta lo faccia conoscere a Pellerano.

Lo stesso Pellerano vi dice per mio mezzo che se avete qualche vostra opera da pubblicare, vi ricordate di lui, che è pronto ad intraprenderne la pubblicazione.

Vi stringo la mano.

Il vostro G. Battaglini

¹ Per gli *Annali di Matematica pura ed applicata* si veda la *Presentazione*.

Lettera 20

[Roma,] 31 Luglio [1874]¹

Caro Cremona.

Io facilmente a Settembre andrò a passare qualche giorno a Napoli, ma per i 15 di quel mese sarò certamente ritornato a Roma.

Mia moglie sta nelle vicinanze di Portici, e propriamente alla "Cupa Sansone, a S. Iorio, palazzo Carapelle". Già Bertini conosce questo indirizzo, e mia moglie conosce dove andranno i coniugi Bertini, e la vostra famiglia.

Credetemi sempre.

Il Vostro aff.mo G. Battaglini

¹ Giuseppe Battaglini fu rettore dell'Università di Roma nell'anno scolastico 1873-1874. Questa lettera, che non reca l'indicazione dell'anno, è scritta su carta intestata *R. Università di Roma. Il Rettore*. Si è indotti a pensare quindi che l'anno di stesura sia proprio il 1874.

Lettera 21*

[Roma,] 4 Agosto 1874

Caro Cremona.

Farò di tutto perché si acquisti la Collezione del Giornale di Liouville,¹ sebbene vi sia una Commissione speciale per proporre l'acquisto dei Libri, e della quale non fa parte il Rettore² della Università [di Roma]. Ne ho scritto in proposito al Bibliotecario,³ e quando avrò la sua risposta ve la farò conoscere.

Amate il

Vostro aff.mo G. Battaglini

* Su carta intestata *R. Università di Roma. Il Rettore*.

¹ Trattasi del *Journal de mathématiques pures et appliquées*, fondato a Parigi nel 1836 da Joseph Liouville. Cfr. la *Presentazione*.

² Rettore dell'Università di Roma, nel 1874, era, come si è evidenziato nella lettera precedente, lo stesso Giuseppe Battaglini.

³ Enrico Narducci.

Lettera 22*

[Roma,] 5 Agosto 1874

Caro Cremona.

Il Bibliotecario dell'Alessandria [*sic*],¹ in risposta alle mie insistenze per l'acquisto del Giornale di Liouville, mi fa sapere che per ora si trova non solo sprovvisto di fondi, ma gravato di debiti, non avendogli il Governo per questo anno concesso fondi straordinari. Inoltre mi fa osservare che un acquisto di qualche entità non può farlo senza sentire la Commissione degli acquisti, e che il prezzo di 260 talleri (pari all'incirca a 1040 franchi) per la Collezione del Liouville è superiore a quello segnato dal Catalogo di G. Villars,² che è di 950

franchi. Finalmente egli spera di poter acquistare la suddetta Collezione per 6 o 700 franchi entro il corrente anno.

Vi auguro buon viaggio, e buon divertimento a Napoli, e stringendovi la mano sono

Il vostro aff.mo G. Battaglini

* Su carta intestata *R. Università di Roma. Il Rettore.*

¹ Enrico Narducci.

² È la casa editrice Gauthier-Villars, fondata a Parigi nel 1864, specializzata in pubblicazioni scientifiche.

Lettera 23

Roma, 17 Dicembre 1874

Caro Cremona.

Vi prego di scusarmi se vengo spesso a raccomandarvi qualche giovane aspirante a posti d'insegnamento; fo questo però solamente quando le persone che raccomando meritano di essere considerate. Ora è il caso del Sig.^r Alfonso Bonolis, che concorre pel posto di Prof. di Meccanica Agraria e Costruzione Rurale nella R. Scuola superiore di Portici.¹ Il Bonolis è giovane d'ingegno, e d'ottimo carattere: ha studiato con distinzione le Matematiche pure ed applicate, e le Scienze naturali, ed ha pubblicato anche qualche lavoro di Matematica. Egli ha già insegnato la Mec. Agraria e la Costruzione Rurale nell'Istituto Agrario di Caserta,² ed ha dovuto rinunciare al posto che avea in quell'Istituto, per non poter soddisfare alle esagerate pretese della Deputazione Provinciale di Caserta, la quale volea imporgli l'obbligo di 36 ore (dico trentasei!) di lezione per settimana. Vi raccomando adunque vivamente il Bonolis.

Vi stringo la mano.

Il vostro aff.mo amico G. Battaglini

¹ Si tratta della *R. Scuola Superiore di Agricoltura*, fondata nel 1872 a Portici. Essa divenne, dopo l'anno 1924, *R. Istituto Superiore Agrario* e, infine, dal 1936, fu integrata all'Università di Napoli nella Facoltà di Agraria.

² Nel 1810 Gioacchino Murat aveva fondato, in ogni provincia del Regno di Napoli, le *Società di Agricoltura o Camere Agrarie* che, nel 1812, mutarono il nome in *Società Economiche*. Dal 1851, Ferdinando II di Borbone (1810-1859) aveva in progetto di affiancare alla Società Economica di Caserta un Orto Agrario e un Istituto Agrario. Il progetto di regolamento di quest'ultimo fu approvato dalla Società Economica di Caserta solo qualche anno dopo, il 24 Maggio del 1860, ma fu grazie all'intervento dell'Amministrazione Provinciale, che si fece carico di tenerlo in vita, che l'Istituto Agrario iniziò effettivamente la sua attività didattica, il 1° Novembre del 1864. Le notizie sono tratte dalla sezione storica del sito web dell'Istituto Statale di Istruzione Secondaria Superiore "Michelangelo Buonarroti" di Caserta (<http://www.isissbuonarroti.it/museo/>).

Lettera 24

Roma, 6 Ottobre 1875
Via Laurina, 11, quarto piano

Mio Caro Cremona.

Sento con molto piacere la determinazione presa da Beltrami, e già gli ho scritto in proposito.

Ho detto al Sig.^r Rodriguez che nel mese venturo lascerò l'Istituto tecnico;¹ per questo mese conviene che io prenda parte agli esami nell'Istituto. Spero intanto che per Novembre sarà uscito il decreto della mia nomina a Prof. nella Scuola degl'Ingegneri,² o almeno che mi si mandi una lettera ministeriale, con la quale io possa mettermi l'animo in pace.

Ho detto anche al Sig.^r Rodriguez la vostra idea intorno ad un assistente pel Disegno, che potesse servire ad un tempo nella Scuola degl'Ingegneri e nell'Istituto tecnico, pel momento però nell'Istituto non c'è bisogno di tale assistente; in ogni modo il Sig.^r Rodriguez mi ha detto che si metterà d'accordo con voi quando verrete in Roma.

Volentieri mi metterò in giro, con Armenante ed altri amici, per trovare un'abitazione conveniente per voi e per Beltrami; ma è questo un affare da disbrigare sopra luogo, con voi, in un paio di giorni, affinché la cosa riesca di vostra soddisfazione.

Ricevete i saluti di mia moglie, e credetemi sempre.

Il vostro aff.mo G. Battaglini

¹ Il 17 Dicembre del 1871, alla presenza del principe ereditario Umberto (1844-1900) — poi re d'Italia col nome di Umberto I —, fu inaugurato a San Pietro in Vinculis il *Regio Istituto Tecnico* di Roma (a cui fu dato il nome di "Leonardo Da Vinci"), che faceva seguito a quelli già esistenti a Napoli, Milano e Torino. Giuseppe Battaglini vi insegnò a partire dal 1872 e fino al 1875, come si ricava da questa lettera. L'Istituto tecnico con le sezioni fisico-matematica, agronomica, e commerciale, fu diretto dal professor Francesco Rodriguez.

² Con Regio Decreto del 9 Ottobre 1873, venne istituita a Roma la *Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri*. Essa veniva a raccogliere l'eredità della Scuola degli Ingegneri di Roma fondata da Pio VII nel 1817 e sopravvissuta per qualche anno dopo la presa di Roma, compiuta dalle truppe italiane, il 20 Settembre del 1870. La "nuova" Scuola fu insediata nell'ex convento di San Pietro in Vincoli a Colle Oppio e diretta sin dall'inizio da Luigi Cremona, che andò anche ad abitare nello stesso edificio. Battaglini, che già era, a partire dall'anno 1872, professore ordinario di Calcolo infinitesimale e incaricato di Geometria superiore presso l'Università di Roma, insegnò, in aggiunta, alla *Scuola d'Applicazione*, per incarico, dal 1873 Meccanica applicata alla costruzione (lasciando però l'incarico universitario di Geometria superiore). L'incarico alla *Scuola d'Applicazione* fu mantenuto da Battaglini fino all'anno scolastico 1884-'85, ma le sue materie d'insegnamento cambiarono successivamente varie volte (si veda [AMODEO 1906]).

Lettera 25

Roma, 24 Luglio 1876

Caro Cremona.

Quest'oggi ho saputo dal Rettore¹ che voi intendete lasciare l'insegnamento della Geometria superiore,² perché siete molto occupato: ciò mi ha sorpreso moltissimo, e vedrei con immenso dispiacere mancare l'opera vostra nell'insegnamento superiore. Mi auguro che la vostra determinazione non sia definitiva, e che potrete stabilire le vostre cose diversamente.

Intanto il Rettore mi proponeva che riprendessi io per voi l'insegnamento della Geometria superiore, in vece [*sic*] di quello dell'Analisi,³ e mi ha fatto premura di avere da me una risposta in proposito: ora io non saprei indurmi a ciò se non quando ricevessi da voi l'assicurazione che avete in modo irrevocabile deciso di lasciare il detto insegnamento, ed aspetto su di ciò una vostra lettera.

Vi stringo cordialmente la mano.

Il vostro aff.mo G. Battaglini

¹ Pietro Blaserna.

² Luigi Cremona era stato nominato sulla cattedra di Geometria superiore, istituita appositamente per lui (essa fu la prima in Italia), nel Giugno del 1860, presso l'Università di Bologna. Nel 1873, fu chiamato a Roma a dirigere la *Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri* e ad insegnarvi Statica grafica oltreché, per incarico, come si trova conferma in questa lettera (e si ricava sia da [CASTELNUOVO 1930], pp. 613-618 che da E. BERTINI, *Della vita e delle opere di Luigi Cremona*, in [CREMONA 1914], t. III, 1917, pp. V-XXII) Geometria superiore, cattedra che lasciò con la fine dell'anno scolastico 1875-'76. Cfr. anche la *Presentazione*.

³ Effettivamente Battaglini assunse pure l'incarico dell'insegnamento di Geometria superiore presso la *Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri*. Cfr. [AMODEO 1906] e la *Presentazione*.

Lettera 26

Roma, 19 Novembre 1876

Caro Cremona.

Vi restituisco la lettera di Trudi.

Grazie di cuore per la vostra cooperazione in questa dolorosissima circostanza¹; mi date una prova di amicizia, che non dimenticherò mai.

Martedì incomincerò le mie lezioni.²

Vi stringo la mano.

Il tutto vostro G. Battaglini

¹ Cfr. la *Presentazione*.

² Probabilmente si tratta, come accennato nella *Presentazione*, delle lezioni di Geometria superiore, presso la *Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri* di Roma.

Lettera 27

Roma, 7 Dicembre 1876

Caro Cremona.

Vi ringrazio moltissimo per la commendatizia procuratami dal Com. Barberis¹ pel Provveditore degli studi a Teramo. Se poi non si è potuto ottenere altro, pazienza.

Oggi in Facoltà² si tratterà ancora dell'istanza di Mazzola;³ spero che verrete per dare qualche schiarimento sugli studi da lui fatti a Zurigo.

Credetemi.

Il tutto vostro G. Battaglini

¹Forse Giuseppe Barberis.

² Giuseppe Battaglini era allora preside della Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali; tenne tale carica per dieci anni, dal 1875 al 1885.

³ Forse Giuseppe Mazzola.

Lettera 28

Roma, 19 Dic.[embre] 1876

Caro Cremona.

Farò riunire la Facoltà¹ per la fine della settimana; aspettavo che si fosse presentato qualche altro affare da trattare, per non incomodare troppo spesso i Colleghi.

Riguardo al Concorso Corsi [?] non ho che farci se al Rettorato non si sbrigano; ne farò sollecitazione a Pognisi.²

Finalmente non ho alcuna osservazione in contrario riguardo a Tonelli;³ se Betti e voi credete che abbia i titoli per poter essere nominato Prof. straordinario, suggeritegli pure che ne faccia domanda al Ministero.

Credetemi intanto.

Il vostro aff.mo G. Battaglini

¹ È la Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali dell'Università di Roma.

² Forse si tratta di Francesco Achille Pognisi.

³ Alberto Tonelli nel 1877 fu nominato professore di Calcolo infinitesimale all'Università di Palermo.

Lettera 29

Roma, 17 Marzo 1877

Caro Cremona.

Vi rimetto sette fascicoli del Giornale *Nature*,¹ che presi dalla Biblioteca dei Lincei,² e che mi diceste di voler vedere.

Vi rimetto ancora una Memoria del Sig.¹ Ronchetti³ sulla quale si vuole dal nostro Presidente⁴ dei Lincei che io riferisca; siccome la Memoria tratta di operazioni finanziarie, sulle quali io non ho la benché minima competenza, pregherei che s'incaricasse altri onde riferire: non si potrebbe per esempio mandare la Memoria al Brioschi, che ha maneggiato milioni?⁵

Vi stringo la mano.

Il tutto vostro G. Battaglini

D. S. Lo scritto medesimo [?] non mi sembra esatto.

¹ È la rivista scientifica americana *Nature*, fondata nel 1869.

² Biblioteca dell'*Accademia Nazionale Reale dei Lincei*. Si vuole ricordare che l'*Accademia dei Lincei* fu fondata a Roma, nel 1603, da Federico Cesi (1586-1630) con l'intento di costituire una sede di incontri rivolti allo sviluppo delle scienze. Negli anni di stesura delle lettere di questo epistolario, con lo Stato pontificio ormai scomparso e con Roma divenuta capitale del Regno d'Italia, l'antica *Accademia* si trasformò, nel 1874, per opera di Quintino Sella, nell'*Accademia Nazionale Reale dei Lincei*, la quale ampliò il raggio delle sue competenze con l'introduzione della nuova classe di Scienze morali storiche e filologiche. Giuseppe Battaglini e Luigi Cremona divennero soci dell'accademia a partire, rispettivamente, dal 7 Gennaio 1872 e dal 7 Dicembre 1873.

³ Non è stato possibile individuare la memoria qui menzionata.

⁴ Quintino Sella.

⁵ Probabilmente, Battaglini allude, con arguzia, alle imprese finanziarie (non sempre coronate da successo) di cui Brioschi si fa promotore mentre è impegnato nelle attività scientifiche ed istituzionali e, forse, potrebbe alludere anche alle accuse di negligenza amministrativa, rivolte allo stesso Brioschi, per il periodo in cui è stato presidente della *Società Italiana delle Scienze*. Notizie al riguardo si possono trovare in [CARBONE *et al.* 2001], consultando la lettera 59 di Cremona a Genocchi e la lettera XXXIV di Genocchi a Cremona e, in più, anche le lettere di Brioschi a Genocchi poste ai n° 53 e 54 di [CARBONE *et al.* 2006], pp. 263-386. Ancora, un cenno su tali questioni si hanno in una lettera di Brioschi a Cremona, posta al n° 69, pt. I, in [PALLADINO *et al.* 2009] e nella relativa *Presentazione*.

Lettera 30

Roma, 8 Agosto 1877

Caro Cremona.

Il Prof. Sannia, con lettera in data del 26 Luglio, mi scrisse di aver aderito al voto vostro e mio relativamente al Prof. Boschi, e di aver scritto in questo senso a Betti. La vostra lettera mi fa venire ora il dubbio che il vostro voto scritto, da me mandato a Sannia, sia rimasto presso di lui, e non lo abbia inviato a Betti insieme al suo. Ne scrivo ora a Sannia, per sapere come sia andata la cosa, e per rimediarvi se è possibile; ma forse sarà meglio che voi rinnoviate il vostro voto, e lo mandate direttamente a Betti.

Io qui meno una vita impossibile; ma se sono proprio uno zoofito [*sic*]! La mia famiglia si trova a Torre Annunziata, per respirare aria migliore di quella di Napoli.

Credetemi sempre.

Il tutto vostro G. Battaglini

Lettera 31

Roma, 12 Agosto 1877

Caro Cremona.

Dovete avere la pazienza di scrivere di nuovo il vostro parere intorno al Prof. Boschi, e mandarlo a Betti: mi scrive Sannia che egli ha lacerato quella carta che io gli mandai, nella quale era espresso il vostro voto intorno a Boschi, non credendo che dovesse inviarla a Betti, ma considerarla solamente come una norma per regolarsi nello scrivere il proprio voto; ed in verità anche io avea interpretato la cosa in tal modo.

Vengo ora a pregarvi per una cosa. Voi avete conosciuto a Roma quel giovane studente napoletano Sig.^r Achille Minozzi, che vi presentai. Egli è tra i concorrenti per i posti di perfezionamento nelle Matematiche all'estero; se nella classifica che voi (come componente della Commissione esaminatrice) farete dei concorrenti potreste introdurlo, mi fareste cosa grata: il suddetto giovane non manca d'ingegno, ha molto desiderio di apprendere, conosce bene e parla il tedesco, e se in Matematica non sa quanto dovrebbe, la colpa non è sua, ma in massima parte dei Professori che lo hanno istruito. Egli appartiene ad una famiglia ricca, ma che cura poco l'istruzione, e che vorrebbe porlo subito negli affari, mentre egli rifugge da ciò, e preferirebbe lasciare gli agi ed i divertimenti nei quali vive la sua famiglia, per coltivare gli studi di Matematica, ed acquistarsi così un nome: per queste sue buone disposizioni credo che bisognerebbe incoraggiarlo.

Vi stringo cordialmente la mano

Il vostro aff.mo G. Battaglini

Lettera 32

Roma, 28 Gen.[naio] 1879

Caro Cremona.

Ho ricevuto l'invito per la riunione del Consiglio Direttivo della Scuola,¹ Giovedì la sera alle 8; mi dispiace che non potrò intervenire, poiché appunto il Giovedì ho la sera altri impegni, che non mi permettono di uscire di casa.

Resto inteso circa le notizie da dare di quando in quando alla Sig.^{ra} Bonomi sulla condotta di suo figlio.

Pellerano vi manda pregando di una vostra risposta per l'affare Chelini;² egli deve ora fare acquisto della carta per la stampa del nuovo volume del Giornale, e gl'importa quindi conoscere con sollecitudine se l'accordo per

l'inserzione degli Articoli, che formeranno il Volume Chelini, deve o pur no aver luogo.

Il tutto vostro G. Battaglini

¹ Si tratterà della *Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri* di Roma, diretta da Cremona.

² Quasi certamente il riferimento è alla pubblicazione del volume [CREMONA et al. 1881].

Lettera 33

Roma, 6 Giugno 1879

Caro Cremona.

Sono d'accordo con voi intorno al Caporali, relativamente al premio della Società Italiana.¹ Io ho già interpellato il Prof. Beltrami per conoscere il suo parere intorno ai lavori del Siacci, ed a quelli dell'Ascoli; in quanto ai primi egli mi ha scritto queste sole parole "*il loro merito è senza dubbio molto distinto*"; riguardo poi alle ricerche dell'Ascoli mi dice che non può parlarne con molto fondamento, perché esse sono di tal natura e di tal forma che non possono essere apprezzate se non da chi sia completamente immerso in quello specialissimo ordine di studii, come il Dini e il Casorati; ma quest'ultimo ora non si occupa più di tali ricerche e non crede che abbia un'opinione ben determinata nel valore intrinseco dei lavori di Ascoli. Beltrami mi consiglia d'interpellarne in proposito amichevolmente il Dini, come il solo in caso [intendasi *in grado*, n.d.r.] di darne un parere ragionato, poiché, a suo modo di vedere, l'importanza e la difficoltà delle ricerche di Ascoli sono tali che se i risultati da lui ottenuti fossero ad esse commisurati, egli dovrebbe esser messo al di sopra di ogni altro. Ora io credo che in questa incertezza e difficoltà di giudizio intorno alle Memorie di Ascoli, il meglio sarà che per ora si premi il Caporali per le sue Memorie del 1878,² ed una futura Commissione della Società Italiana potrà poi prendere in considerazione le ricerche di Ascoli.³

Mi scrive il Betti che verso i primi di Luglio intenderebbe riunire la Commissione per il concorso al premio per i libri di testo; io ho letto le due Geometrie che voi mi mandaste, e spero che voi avrete ricevuto le altre.

Come era da prevedervi, Beltrami, mentre ringrazia vivamente i suoi Colleghi di Roma, per l'impegno dimostrato onde potesse ritornare in questa Università, si scusa di non poter accettare, e per gl'impegni che lo legano a Pavia, e perché l'aria di Roma non è confacente alla sua salute. Sicché per provvedere qui all'insegnamento della Fisica matematica, io credo che converrà proporre al Ministero di aprire il Concorso per Professore straordinario.

Fra giorni vi farò tenere un mio lavoretto per il Volume Chelini;⁴ è pochissima cosa, ma non ho avuto testa da fare qualche ricerca più importante:

voi mi diceste che in quel Volume potevano andare anche dei lavori adatti ai giovani studenti; di tale indole è il mio.

Spero per i 10 di Luglio di essere libero già dagli esami; mi mandano a Napoli come Commissario per gli esami di Licenza all'Istituto tecnico.⁵ Verso i 18 di questo mese riunirò la Facoltà⁶ per fare le proposte intorno al personale insegnante, e per la Relazione sull'andamento degli studi.

Il tutto vostro G. Battaglini

¹ Con Regio Decreto del 13 Ottobre 1863, erano stati istituiti due premi, consistenti ciascuno in una medaglia al valore, dell'importo di lire 400, da assegnare annualmente agli autori delle migliori memorie italiane, l'una riguardante le Matematiche, l'altra le Scienze fisiche e naturali. A conferirli era stata incaricata la *Società Italiana delle Scienze*. Venne poi ad aggiungersi ai precedenti, un ulteriore premio, per la Fisica, istituito nel 1866 da Carlo Matteucci con una sua donazione e disciplinato successivamente dal Regio Decreto del 10 Luglio 1870, pur esso assegnato ad opera della *Società Italiana delle Scienze*. Come risulta dai *Rapporti* pubblicati nelle *Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze* (serie III, vol. IV, pp. XXI-XXIV), il premio per le Matematiche per l'anno 1878 fu assegnato –la commissione era costituita da Luigi Cremona, Eugenio Beltrami e Giuseppe Battaglini (relatore)– ad Ettore Caporali, per le memorie [CAPORALI 1877 a] e [CAPORALI 1877 b]. Il premio per l'anno 1879 fu attribuito ad Enrico D'Ovidio “per molte memorie pubblicate dal 1879 al 1881, ed in particolare per quella intitolata *Studio sulle cubiche gobbe mediante la notazione simbolica delle forme binarie* [D'OVIDIO 1879, nd.r.]”, come si evince consultando ancora le *Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle Scienze*, serie III, t. VI, p. XXI. Per quanto concerne i premi assegnati dalla medesima Società, relativamente agli anni che vanno dal 1876 al 1879, si può anche consultare un gruppo di lettere, di Battaglini a Betti, inserite in [CASTELLANA et al. 1996], pp. 206-214. Si ricorda che la *Società Italiana delle Scienze* fu fondata da Antonio Maria Lorgna (1735-1796) nel 1782, a Verona, con il nome di *Società Italiana*. Dal numero dei suoi soci, quaranta illustri scienziati provenienti di ogni parte d'Italia, essa venne correntemente detta *Società dei XL* sin dai primi tempi o, anche, *Società Italiana delle Scienze detta dei XL*. Nel 1950 assunse il nome di *Accademia Nazionale dei XL* e dal 1979 ad oggi quello di *Accademia Nazionale delle Scienze, detta dei XL*. La sede, da Verona, si è venuta a spostare poi in diverse città italiane (per la ragione, principale, che essa seguiva il luogo di residenza del suo presidente), ma dal 1875 ad oggi è sempre stata Roma. Brioschi divenne membro della Società nel 1860 e poi presidente nel 1868, carica che tenne fino al 1875.

² Le memorie di Ettore Caporali, qui menzionate, sono [Caporali 1877 a] e [Caporali 1877 b].

³ Nell'elenco dei premiati non compare il nome di Giulio Ascoli, né per l'anno 1878 né per gli anni successivi.

⁴ Il riferimento è al lavoro G. BATTAGLINI, *Sulle cubiche ternarie sizigetiche*, inserito nel volume [CREMONA et al. 1881] alle pp. 27-50.

⁵ Fu fondato, nel 1862, l'*Istituto Tecnico*, con un curriculum di studi già delineato da Vincenzo Cuoco (1770-1823) nel decennio francese, a cui fu dato il nome di “G.B. della Porta”, fu il primo (e, per molti anni a seguire, l'unico) Istituto Tecnico di Napoli. Le notizie riguardanti le origini dell'istituto sono reperibili nella sezione storica del sito web dell'istituto stesso, alla pagina <http://www.itgdellaporta.it/strutture-laboratori/storia.htm>.

⁶ Battaglini era allora preside della Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali dell'Università di Roma.

Lettera 34

Roma, 14 Feb.[braio] 1881

Caro Cremona.

Oggi son ritornato da Napoli, ove mi ero recato per intervenire alla tornata di quell'Accademia delle Scienze,¹ in cui si dovevano fare varie nomine di Soci.

Fortunatamente le nostre insistenze per la nomina di Caporali sono riuscite; avendo egli riportato 12 voti favorevoli su 14 votanti; a questo proposito il Prof. Trudi mi ha incaricato di assicurarvi *che egli non ha mai pensato di ostacolare la nomina di Caporali*.

Come forse saprete voi siete stato nominato ad unanimità Socio non residente dell'Accademia medesima: D'Ovidio e Dino sono poi riusciti Soci corrispondenti.

Vi stringo la mano.

Il vostro amico G. Battaglini

D. S. Pellerano vi manda un'esemplare della Meccanica di Bonolis.²

¹ È l'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli.

² Probabilmente si tratta del lavoro [BONOLIS 1881].

Lettera 35

Roma, 3 Marzo 1885

Caro Cremona.

Ho parlato con Blaserna intorno all'amministrazione della Società Italiana; benché non sia complicata, pure io non giungo a vincere la mia ripugnanza per gli affari amministrativi; vi prego perciò di scrivere al Prof. Scacchi di volermi dispensare dall'ufficio di amministratore della Società, che per me sarebbe molto penoso.

Credetemi.

Il vostro aff.mo G. Battaglini

Lettera 36

Napoli, 10 Aprile 1886
Riviera di Chiaia 61

Caro Cremona.

Questa mattina è stata comunicata alla Facoltà matematica dell'Università di Napoli la lettera del Ministro¹ dell'I. P. relativa al trasferimento del Prof. Dino alla Cattedra di Algebra complementare in questa Facoltà: hanno preso parte alla riunione delle Facoltà i Prof.^{ri} Sannia (Preside), de Gasparis, Cua, Fergola, Padelletti, Caporali ed io: dopo un'animata discussione, si è messo ai

voti se si dovesse accettare la proposta del Ministro, o insistere sulla precedente deliberazione della Facoltà di provvedersi alla Cattedra vacante per mezzo di Concorso; il de Gasparis si è astenuto dal votare, ritenendo di non potersi mettere in quistione la proposta del Ministro, trattandosi del trasloco di un distinto Professore ordinario, benché sinora sia stato titolare per un insegnamento diverso da quello dell'Algebra.

Fatta la votazione la proposta del Ministro è stata respinta con quattro voti contro due. Benché la votazione sia stata segreta, posso dirvi (per la discussione che l'ha preceduta) che i voti contrarii sono stati dati da Fergola, Padelletti, Caporali e Cua; Sannia ed io abbiamo votato favorevolmente.

La maggioranza della Facoltà ha motivato la sua deliberazione con varie considerazioni, le quali si raggirano tutte sulla circostanza che il Dino è stato finora Professore per un insegnamento diverso da quello dell'Algebra, e che non ha pubblicazioni di Analisi. Tutte ragioni speciose, poiché per Fergola l'opposizione è mossa da interessi suoi particolari,² e da Caporali e Padelletti da dispetto verso di me, che ho turbato la loro convenienza venendo in Napoli, benché all'occorrenza ho cercato sempre, quando ho potuto, di essere loro utile. Ma così è fatto il mondo! La deliberazione della Facoltà sarà spedita subito al Ministero: mi raccomando a voi per trovar modo che il decoro del Prof. Dino non abbia a soffrirne, e che le interessate deliberazioni di questa Facoltà non facciano recedere il Ministro dalla decisione presa in favore di Dino.

Non credereste opportuno che il Ministro facesse decidere dal Consiglio Superiore dell'I. P. che nulla si oppone a che il Prof. Dino passi dall'insegnamento della Geometria proiettiva e descrittiva, a quello dell'Algebra Complementare?

Io non ho ancora veduto il Dino, dopo della deliberazione della Facoltà; son certo che per la sua suscettibilità ne risentirà grave dispiacere; una soddisfazione per parte del Ministro contro la Facoltà lo rinfrancherebbe.

Vi stringo la mano.

Vostro aff.mo amico G. Battaglini

¹ Michele Coppino.

² Probabilmente Battaglini allude al fatto che Fergola tendeva ad appoggiare lo sviluppo della carriera di Gabriele Torelli che era anche suo genero. Torelli era professore di Matematica all'Istituto Tecnico di Napoli ed aveva assolto vari compiti di docente presso la Facoltà di Matematica della stessa città; attivo nella ricerca, egli mirava a conservare l'insegnamento all'Istituto Tecnico napoletano e a ottenere un posto di professore straordinario all'Università di Napoli. Cfr. la *Presentazione*.

Lettera 37

Napoli, 12 Feb.[braio] 1887¹

Caro Cremona.

Non ho alcuna copia della mia traduzione della Pangeometria di Lobatchewsky;² ne deve avere Pellerano, che vedrò domani, e ve la manderò subito. L'originale francese di quell'opuscolo era un manoscritto che mi favorì Houël, e che poi gli restituii.

Vi ringrazio per l'esemplare dei vostri discorsi pronunziati al Senato,³ che mi avete mandato, e li ho letti con molto piacere.

Qui in salute passabilmente; solamente mia figlia⁴ ha avuto una leggerissima vaioloide, ma ora è in convalescenza.

Vi stringo la mano.

Vostro aff.mo G. Battaglini

¹ Sulla lettera originale è posto, come anno, il 1886, ma poiché il frontespizio del volume in cui sono raccolti i *Discorsi* di Luigi Cremona reca l'anno 1887, si pensa che Battaglini abbia commesso un *lapsus penae*, scrivendo 1886 anziché 1887.

² Si tratta della famosa opera di N.I. Lobačevskij pubblicata in russo negli *Appunti scientifici dell'Università di Kazan*, nel 1855; essa fu dettata da Lobačevskij, ormai cieco, a Iosif Andreevič Bolzani, italiano d'origine e professore aggiunto di Fisica presso l'Università di Kazan nel Tatarstan. L'opera apparve in francese, tradotta dallo stesso Bolzani, nel 1856 (si veda [BOLZANI 1856]); essa è pure inserita in [LOBAČEVSKIJ 1946-1951], t. III. Sul matematico russo si può consultare la pubblicazione [BETTI 2005], da cui si è tratta qualcuna delle precedenti informazioni.

La traduzione italiana dal testo francese, curata da Battaglini, fatta a partire da una trascrizione resa disponibile da G.J. Houël, come questa lettera ora documenta, è [BATTAGLINI 1867]. Essa fu anche stampata a parte in un opuscolo recante lo stesso titolo e i seguenti luoghi editoriali: "Napoli, Pellerano, 1868".

³ È pressoché certo che si tratta del volume recante il seguente frontespizio: *Modificazioni alla Legge sull'Istruzione Superiore. Discorsi del Senatore Luigi Cremona pronunziati in Senato nelle tornate del 30 novembre, 14, 15, 16, 17 e 18 dicembre 1886, 20, 21, 22, 24, e 25 gennaio 1887, Roma, Forzani e C., Tipografi del Senato, 1887*. Cremona era stato nominato senatore nel 1879. Egli, quale membro dell'*Ufficio Centrale del Senato*, fu in prima linea nel redigere (su incarico affidato all'*Ufficio* dal ministro Coppino) un progetto di legge che modificasse un precedente progetto presentato dal ministro Guido Baccelli sulla riforma dell'*Istruzione superiore*. Il "controprogetto" ebbe l'approvazione del Senato ma non divenne legge.

⁴ Eloisa.

Lettera 38*

Roma, Maggio 1890

Caro Cremona.

Non mi è riuscito di venirvi a trovare, essendo stato molto occupato per le riunioni del Consiglio Superiore. Speravo di vedervi Domenica scorsa, all'Accad. dei Lincei,¹ per ringraziarvi personalmente della parte da voi presa nella determinazione di questa Facoltà di Scienze fis. mat. e naturali, onorandomi col titolo di Prof. onorario di questa Università; è il titolo di cui

vado maggiormente superbo, e sono estremamente grato ai Colleghi per la memoria che hanno serbato di me.

Il Prof. Scacchi vi manda tanti saluti.

Ho consegnato al Rettore Cerruti ed al Preside Blaserna due liste di sottoscrizione per una medaglia, che i Colleghi di Napoli intendono offrire al Prof. Scacchi pel suo cinquantesimo anno di Professorato in quella Università;² quelle liste saranno comunicate ai Colleghi di Roma per raccogliere, se credono, alcune firme.

Poiché naturalmente vi avremo Vice Presidente al Consiglio Superiore,³ mi prendo la libertà di raccomandarvi una domanda del Prof. Francesco Milone, che insegna Scienza delle Macchine nella Scuola di Applicazione per gl'Ingegneri in Napoli.

Egli ha inviato al Ministero dell'Istruzione Pubblica un esemplare di una sua opera sulle Macchine,⁴ allo scopo di ottenere dal Ministero un incoraggiamento, acquistandone alcune copie: su quella domanda dovrà dar parere la Giunta del Consiglio Superiore. Voi forse conoscerete il Prof. Milone, che fece alcuni suoi studi nell'Istituto tecnico Superiore di Milano; è un bravo e coscienzioso Professore.

La mia salute è molto male andata, ed anelo quindi di tornare subito in famiglia. Conservatemi la vostra amicizia, e credetemi sempre

Il vostro aff.mo G. Battaglini

* Su carta intestata *Ministero dell'Istruzione. Consiglio Superiore.*

¹ È la R. Accademia dei Lincei, di cui Battaglini era socio.

² Nel Marzo del 1890, la Facoltà di Scienze naturali dell'Università di Napoli (che rimarrà, fino all'anno scolastico 1922-'23, una Facoltà distinta da quella di Scienze Matematiche) propose al rettore Emanuele Fergola che l'Università si facesse promotrice di una sottoscrizione per offrire ad Arcangelo Scacchi una medaglia d'oro, in occasione del cinquantesimo anniversario del suo insegnamento. Il giorno dell'ottantunesimo compleanno, l'8 Febbraio 1891, Scacchi ricevette la medaglia con la sua effigie, insieme con le altre onorificenze e riconoscimenti, per la sua attività di studioso, provenienti anche da centri di ricerca ed accademie straniere.

³ Luigi Cremona era entrato a far parte, nel 1879, del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione.

⁴ Potrebbe trattarsi del volume [MILONE 1885]. Esso contiene le monografie: *Macchine termiche e Macchine idrauliche.*

Lettera 39

Napoli, 8 Giugno 1890
Via Broggia, al Museo, 11

Mio Caro Cremona.

Vengo a chiedervi un favore, per ovviare alle solite lentezze della burocrazia del Ministero dell'I. P. Quando nel 1886 ritornai all'Università di Napoli, vi venni come Prof. ordinario di Calcolo Dif. ed Int. e come incaricato

di Meccanica superiore; questo incarico, dopo un anno, mi fu cambiato in quello di Matematica superiore. L'insegnamento del Calcolo infinitesimale sarebbe stato di molto mio gradimento, se avessi avuto a fare con giovani studiosi; ma con classe di circa cento Studenti, tra i quali si contano nelle dita quelli che hanno voglia di apprendere qualche cosa, mentre in generale sono svogliatissimi, indisciplinati, e non avendo in mira che di passare come che sia un esame ridotto a' minimi termini, vi assicuro che non vi è alcuna soddisfazione a dar loro lezione.

Per questo motivo, essendosi resa vacante in questa Università la Cattedra di Analisi superiore (tenuta prima dal Fergola, che è passato all'insegnamento dell'Astronomia) io esposi a questa Facoltà matematica il mio desiderio di lasciare l'insegnamento del Calcolo Dif. ed Int. (al quale si sarebbe provveduto per Concorso come Prof. straordinario¹) all'insegnamento dell'Analisi superiore, ritornando nello stesso tempo l'incarico di Matematica superiore al primitivo titolo di Meccanica superiore. La Facoltà appoggiò presso il Ministero dell'I. P. la mia domanda, ed il Consiglio Superiore (al quale fu trasmessa) nell'Aprile scorso diede voto favorevole (relatore Betti) alle due proposte: 1^a del mio cambiamento di Cattedra e 2^a dell'apertura del Concorso per Professore straordinario di Calcolo Dif. ed Int. nell'Università di Napoli.

Io non credo che S. E. il Sig.^r Ministro² dell'I. P. faccia difficoltà ad accettare questa proposta. Ma intanto finora nessuna comunicazione ufficiale ne è stata fatta a questa Facoltà matematica, e quello che è più importante non è stato ancora aperto il Concorso per provvedere all'insegnamento del Calcolo infinitesimale nell'Università di Napoli; sarebbe dispiacevole se per questo Concorso accadesse quello stesso che è avvenuto per l'analogo Concorso all'Università di Torino, il quale dopo circa due anni che la Cattedra è vacante non è stato ancora espletato.³ È importante che per la fine di Settembre sia espletato il Concorso per Napoli, altrimenti nell'Ottobre, se non si fa a tempo, si sarà costretti a cercare, in fretta e furia, un incaricato qualunque per provvedere all'insegnamento del Calcolo, con danno dell'Istruzione.

Ora io vi prego, anche a nome di questa Facoltà matematica, di voler osare della vostra influenza presso il Ministero, affinché si solleciti l'apertura del suddetto Concorso.

Non vogliate accusarmi di presunzione, se desidero avere nello stesso tempo due insegnamenti superiori; è vero che questi richiedono molta preparazione, ma con piacere mi sottoporro a maggiore lavoro, e per mia istruzione, e per trattare con pochi e buoni Studenti, lasciando la massa svogliata ed inconcludente a chi se la vuol prendere.

Vi stringo la mano.

Vostro aff.mo G. Battaglini

¹ Si vedano [CARBONE *et al.* 1996] e [CARBONE *et al.* 2002]. Sulla cattedra di Calcolo infinitesimale a Napoli si trasferì –nell'anno scolastico 1891-'92– Ernesto Cesàro, che proveniva dall'Università di Palermo, dove già era professore ordinario, mentre Gabriele Torelli fu nominato professore straordinario di Algebra complementare, a Palermo, a partire dallo stesso anno. Cfr. la *Presentazione*.

² Paolo Boselli.

³ Si tratta del concorso per professore straordinario alla cattedra di Calcolo infinitesimale, presso l'Università di Torino. La cattedra fu assegnata a Peano, che la tenne fino al 1925. Cfr. la *Presentazione*.

Lettera 40

Napoli, 16 Giugno 1890
Via Broggia, al Museo, 11

Caro Cremona.

Ho avuto comunicazione di essere stato sottoposto alla firma sovrana¹ (fin dal 31 Maggio) il Decreto pel mio passaggio dall'insegnamento del Calcolo infinitesimale a quello dell'Analisi superiore: il Segretario generale Mariotti mi assicura che si aprirà al più presto il Concorso per Prof. straordinario di Calcolo² in questa Università; se ciò si verifica, non avrò altro a desiderare.

Ieri poi S. E. il Ministro Boselli ebbe la gentilezza di comunicarmi telegraficamente la mia nomina a componente della Giunta del Consiglio Superiore: ho accettato, principalmente perché voi lo desideravate, poiché il mio stato di salute, molto malandato, mi avrebbe consigliato di preferire un poco di riposo, per curarmi; ad ogni modo mi perdoneranno se non potrò mostrare nell'ufficio accettato tutta la solerzia desiderabile; farò quanto potrò. Già ho avuto alcuna carte da esaminare, per riferire alla Giunta nella prossima riunione.

A rivederci fra giorni; e vi stringo la mano.

Vostro aff.mo G. Battaglini

¹ Il sovrano era allora Umberto I.

² Al riguardo si vedano la lettera precedente e la *Presentazione*.

Lettera 41

Napoli, 27 Maggio 1891
Via Broggia, al Museo, 11

Caro Cremona.

Con mio grave dispiacere sono stato costretto a scrivere al Ministro Villari, pregandolo di accettare la mia rinunzia da componente della Giunta del Consiglio Superiore dell'Istruzione Pubblica. La mia salute, che va sempre

peggiorando, mi ha ridotto in modo che non posso dare un passo, e mi trascino a gran pena all'Università per le mie lezioni.

I medici, che ho consultato, ritengono che tutt'i miei malanni provengono da grave *anemia*, e mi hanno prescritto, se voglio aver speranza di miglioramento, di determinarmi a vivere, per alcuni mesi, in campagna, evitando ogni lavoro intellettuale, e fisico, menando in sostanza pura vita vegetativa.

Sicch , appena nel Giugno, termineranno i miei obblighi universitari, di Lezioni ed esami, seguir  il consiglio dei medici. Spero in tal modo di poter essere al caso [intendasi *in grado*, n.d.r], d'intervenire alla riunione del Consiglio Superiore plenario nell'Ottobre. Se poi rimanessi deluso in questa speranza, sar  costretto uscire innanzi tempo dal Consiglio Superiore. Non voglio fissarmi nel pensiero della dolorosa circostanza di dover lasciare l'insegnamento, che sarebbe la mia morte morale, ed un disastro per la mia famiglia.

Vi stringo la mano.

Vostro aff.mo G. Battaglini

D. S. Ho rimandato al Ministero le carte relative agli affari, sui quali io dovrei riferire alla Giunta del Consiglio.

Lettera 42

Napoli, 27 Set.[tembre] 1891

Via Broggia, al Museo, 11

Caro Cremona.

Il giorno 21 del corrente mese scrissi al Ministro Villari, esponendogli che, per il mio deplorabile stato di salute, io non potevo recarmi a Roma per la riunione del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, e lo pregava di voler accettare fin da ora la mia rinunzia da quell'ufficio, prima della mia uscita dal Consiglio per legge. Ora mi vedo arrivare un fascio di carte relative ad affari da trattare nel Consiglio, e sui quali io dovrei riferire: io non posso far altro che rimandare queste carte al Consiglio. Il mio stato di anemia si   talmente aggravato in questi mesi scorsi di estate, che io sono confinato in casa, senza poter dare un passo.

Accennai anche al Ministro che il mio deperimento di salute   tale, che sar  costretto di domandare, per il prossimo anno scolastico, chi mi sostituisca nell'insegnamento all'Universit , che per me sarebbe impossibile di dare; e se disgraziatamente non migliorer  in salute nel 1892, sar  costretto domandare di essere collocato a riposo, dopo soli 31 anni d'insegnamento! La sventura mi ha colpito, e mi considero un uomo finito.

Non voglio annoiarvi indicando le altre disgrazie che sono piombate addosso alla mia famiglia, tutte ad un tratto; basta dirvi che mia moglie, e mio figlio, da circa due mesi, si trovano nella Svizzera, in case di salute, essendo stato mio figlio attaccato da pericolosa malattia ai polmoni.¹

Conservatemi la vostra amicizia e credetemi sempre.

Vostro aff.mo amico G. Battaglini

N. B. Le carte del Consiglio le farò spedire domani al Ministero dalla Segreteria di questa Università.

¹ Probabilmente Mario, figlio di Battaglini, fu attaccato da tubercolosi.

Lettera 43

Napoli, 4 Ottobre 1892
Via S.Gregorio Armeno 61

Caro Cremona.

Vi scrivo per raccomandarvi, per quanto posso, un affare che riguarda questa Università di Napoli.

Per la morte del Prof. Padelletti, questa Facoltà matematica, per provvedere all'insegnamento, rimasto vacante, della Meccanica razionale, propose al Ministro dell'I. P.¹ di aprire il Concorso per scegliere un Professore *straordinario* di Meccanica; benché la Cattedra fosse per Prof. ordinario (come generalmente accade per tutte le Cattedre di Matematica a Napoli) si propose la nomina di un Prof. straordinario per ottenere più facilmente concorrenti giovani, volenterosi di farsi un nome col loro solo [*sic*] nell'insegnamento, e non distratti da ambizioni politiche.²

Vari distinti giovani s'iscrissero tra i concorrenti (tra gli altri il bravo R. Marcolongo, che con piacere di tutti vedremmo prescelto). Ora vengo a sapere che tra i Concorrenti vi è il Prof. Siacci, e con sorpresa di tutti, non comprendendo come a lui convenga lasciare l'Università di Torino, per venire a questa di Napoli; a meno che la fama che qui ogni Professore fa il comodo suo, e si lascia il lavoro delle lezioni agli Assistenti, non sia il motivo determinante per Siacci, che vuol fare il Deputato, e l'uomo politico.

Ve lo fo sapere, anche per parte di vari Colleghi, affinché, con la vostra autorità, quando la Relazione della Commissione esaminatrice per la Meccanica sarà discussa in Consiglio Superiore dalla P. I. possiate trovar modo affinché il Siacci (prescindendo dai suoi meriti scientifici) non sia trovato il più conveniente Professore di Meccanica per l'Università di Napoli.

Sono sei mesi da che non posso muovermi da casa, aggravandosi sempre più la malattia che mi tormenta, senza ricavare alcun vantaggio dalle prescrizioni mediche; il catarro cronico di visceri e di vescica mi ha tolto tutte

le forze, e sono inabilitato a qualunque seria occupazione: cercherò di fare alla meglio le mie lezioni, facendo venire a casa quei cinque o sei miei scolari; se pure potrò durare in tale stato, poiché i medici insistono perché io mi allontani da Napoli, e vada a vivere in campagna, ed in luogo elevato. Vedremo.

Conservatemi la vostra amicizia, e vi stringo la mano.

Vostro aff.mo amico G. Battaglini

¹ Si tratta di Ferdinando Martini.

² Si veda la *Presentazione*.

Lettera 44

[Roma,] 16 Aprile [1871-1885]¹

Caro Cremona.

Il Prof. Dino è stato incaricato dal Ministero di una ispezione ad una scuola a Caserta; dovrebbe arrivare a Roma questa sera, a quanto mi scrisse.

Sono dolente per la notizia che mi date; e pure si erano avute assicurazioni positive che la somma richiesta sarebbe stata accordata dal Ministero!

Vi stringo la mano.

Il vostro G. Battaglini

¹ In base al contenuto della presente lettera, s'ipotizza che il periodo di compilazione della stessa sia collocabile tra il 1871 e il 1885, anni in cui Battaglini si trova a Roma.

Lettera 45st

[S.l.,] 16 Gennaio [posteriore al 1879]¹

Caro Cremona.

Sono circa dieci giorni che ho mandato a Milano le bozze di stampa della mia Memoria; le rimandai corrette, il giorno dopo di averle ricevute; le indirizzai alla *Tipografia Bernardoni di C. Rebeschini e C. Milano, Via Rovello, 6*, poiché così stava scritto sulla faccia che involuppava le bozze stesse; le portai io medesimo alla posta, e le affrancai per quanto mi disse l'impiegato. Se con tutto ciò sono andate disperse, pazienza! Dovranno spedirmele di nuovo, e nel rimandarle le raccomanderò alla posta.

Vi accludo la lettera che il Prof. Biolchini ha mandato in risposta alla mia: non so se dice la verità; ad ogni modo vedremo se manterrà la parola.

Il tutto vostro G. Battaglini

* A margine della lettera si ritrova scritto, dallo stesso Battaglini, "Comunicato ad Hoepli".

¹ Il termine *post quem*, per la collocazione della lettera, è stato scelto in base al fatto che il 1879 è l'anno in cui la tipografia Bernardoni, in Milano, che stampava anche gli *Annali di matematica pura ed applicata*, è rilevata da Cristiano Rebeschini.

INDICE DEI NOMI CHE COMPATONO NELLA CORRISPONDENZA

Amari Michele (1806-1889). Patriota, storico e arabista siciliano. Fu senatore nel 1861 e ministro dell'Istruzione. A lui si deve l'organizzazione degli studi orientali in Italia (cfr. [LUI] *ad vocem*). Lett. 5.

Armenante Angelo (1844-1878). Laureato in Matematica a Napoli, dopo il 1870 fu incaricato di Analisi superiore presso l'Università di Roma e poi professore straordinario di Geometria analitica (cfr. [TRICOMI 1962]). Lett. 15; lett. 24.

Ascoli Giulio (1843-1896). Fu allievo alla Scuola Normale di Pisa dove si laureò nel 1868. Dal 1872 fu professore di Algebra e di Calcolo al *Politecnico* di Milano (cfr. [TRICOMI 1962]). Lett. 33.

Barberis Giuseppe (1821-1896). Ricoprì l'incarico di provveditore centrale per l'istruzione secondaria e poi di provveditore capo dal 1878 all'80. Dal 1881 fu membro del Consiglio superiore della pubblica istruzione (cfr. [FRANCHINI 2005]). Lett. 27.

Battaglini Angelo, fratello di Giuseppe Battaglini. Lett. 4; lett. 7; lett. 10; lett. 11; lett. 15; lett. 16.

Battaglini Eloisa. Figlia di Giuseppe Battaglini. Lett. 16; lett. 37.

Battaglini Mario. Figlio di Giuseppe Battaglini. Lett. 42.

Battaglini Michele. Fratello di Giuseppe Battaglini. Lett. 4; lett. 8.

Battaglini Silvia. Sorella di Giuseppe Battaglini. Lett. 4; lett. 7; lett. 10; lett. 11; lett. 13; lett. 15; lett. 16.

Beltrami Eugenio (1835-1900). Allievo di Francesco Brioschi, fu professore di Algebra e Geometria analitica a Bologna, di Geodesia teoretica a Pisa, di Meccanica razionale a Bologna e a Roma, di Fisica matematica e Meccanica superiore a Pavia e a Roma. Fu anche presidente dell'Accademia dei Lincei (cfr. [DBI]). Lett. 2; lett. 4; lett. 18; lett. 24; lett. 33.

Bertini Eugenio (1846-1933). Fu allievo di Cremona e poi di Betti e di Dini a Pisa, dove si laureò nel 1867. Fu assistente di Cremona a Milano, professore di Geometria proiettiva all'Università di Roma e poi di Geometria superiore a Pisa e a Pavia (cfr. [DBI] e [TRICOMI 1962]). Lett. 20.

Betti Enrico (1823-1892). Allievo di O.F. Mossotti, fu professore di Algebra superiore e di Fisica matematica all'Università di Pisa. E' stato direttore della Scuola Normale superiore di Pisa, socio nazionale dei Lincei e membro di numerose altre accademie e società scientifiche. Fu deputato di Pistoia alla Camera e senatore dal 1884 (cfr. [TRICOMI 1962] e [DBI]). Lett. 3; lett. 5; lett. 6; lett. 7; lett. 18; lett. 28; lett. 30; lett. 31; lett. 33; lett. 39.

Biolchini Luigi (1836-1897). Fu docente di Geometria analitica ed Algebra complementare presso l'università di Roma. Lett. 45.

Blaserna Pietro (1836-1918). Professore di Fisica a Palermo e poi di Fisica sperimentale a Roma, fu rettore dell'Università di Roma dal 1874 al 1876 e anche preside di quella Facoltà di Scienze matematiche fisiche e naturali. Socio della Reale Accademia dei Lincei, ne divenne segretario nel 1879 e Presidente nel 1904. Fu nominato senatore del Regno nel 1890, vicepresidente del Senato dal 1906,

vicepresidente dell'Ordine Civile di Savoia (cfr. M.G. IANNIELLO, Biografia di P. Blaserna pubblicata sul sito del Museo di Fisica dell'Università "La Sapienza" di Roma, www.phys.uniroma1.it). Lett. 25; lett. 35; lett. 38.

Bonolis Alfonso. Fu autore di vari articoli pubblicati sul *Giornale di Matematiche* di Battaglini e di un *Trattato Elementare di Topografia*, Napoli, Libreria Scientifica e Industriale di B. Pellerano, 1876. Lett. 23; lett. 34.

Bonomi, sig.ra. Lett. 32.

Boschi Pietro (1833-1887). Fu professore di Geometria proiettiva e descrittiva presso l'Università di Bologna (cfr. [TRICOMI 1962]). Lett. 30; lett. 31.

Boselli Paolo (1838-1932). Dal 1871 fu titolare a Roma della prima cattedra di Scienze delle finanze. Ministro della Pubblica Istruzione dal 1888 al 1891 e nel 1906. Cultore degli studi storici, creò a Roma il Museo del Risorgimento italiano (cfr. [LUI] *ad vocem*). Lett. 39; lett. 40.

Brioschi Francesco (1824-1897). Laureato a Pavia, dove fu incaricato dell'insegnamento di Meccanica razionale, divenne professore di Matematica applicata, poi di Analisi superiore, nella stessa università, quindi di Idraulica fluviale e Analisi matematica al Politecnico di Milano, da lui istituito e diretto dal 1863 alla sua morte. Fu maestro di insigni matematici, tra i quali Beltrami, Casorati, Cremona. Fu direttore de *Il Politecnico* e degli *Annali di matematica pura e applicata*. Deputato e quindi senatore, svolse anche un'intensa attività politica. Socio nazionale dell'Accademia dei Lincei, della quale fu presidente dal 1884 fino alla sua morte (cfr. [DBI]). Lett. 14; lett. 18; lett. 29.

Caporali Ettore (1855-1886). Laureatosi nel 1875 a Roma, dove fu allievo di Cremona, fu professore straordinario di Geometria superiore all'Università di Napoli, divenendo poi ordinario (cfr. [TRICOMI 1962] e [DBI]). Lett. 33; lett. 34; lett. 36.

Casorati Felice (1835-1890). Laureatosi a Pavia in Ingegneria, fu allievo di Brioschi. Dal 1859 insegnò, all'Università di Pavia, Algebra e Geometria analitica e, successivamente, Calcolo infinitesimale. Fu socio dell'Accademia Nazionale dei Lincei dal 1875 (cfr. [TRICOMI 1962] e [DBI]). Lett. 33.

Cerruti Valentino (1850-1909). Laureatosi in Ingegneria a Torino, ottenne, nel 1877, all'Università di Roma, la cattedra di Meccanica razionale che conservò fino alla morte. Ricoprì la carica di rettore della stessa università e nel 1903 successe a Cremona nella direzione della Scuola d'applicazione per ingegneri (cfr. [TRICOMI 1962] e [DBI]). Lett. 38.

Chelini Domenico (1802-1878). Fu professore di Meccanica e Idraulica presso l'Università di Bologna (cfr. [TRICOMI 1962]). Lett. 2; lett. 12; lett. 32; lett. 33.

Clebsch Rudolf Friedrich Alfred (1833-1872). Matematico tedesco, fu professore alla scuola politecnica di Karlsruhe dal 1858, quindi alle università di Giessen e di Gottinga (cfr. [LUI] *ad vocem*). Lett. 7.

Coppino Michele (1822-1901). Professore di Letteratura italiana all'Università di Torino, di cui fu anche rettore, fu più volte ministro della Pubblica Istruzione: dal 10 aprile 1867 al 27 ottobre 1867; dal 20 novembre 1876 al 24 marzo 1878; dal 19 dicembre 1878 al 14 luglio 1879; dal 30 marzo 1884 al 17 febbraio 1888 (cfr. [DBI]). Lett. 36.

Cremona Elena. Figlia di Luigi Cremona. Lett. 2.

Cremona Giuseppe. Avvocato, fu uno dei tre figli nati dal primo matrimonio (contratto con Caterina Carnevali) di Gaudenzio Cremona (1770-1842), padre di Luigi. Luigi era il primogenito dei quattro figli che Gaudenzio ebbe dal suo secondo matrimonio, con Teresa Andreoli -1809-1849- (cfr. [BRIGAGLIA *et al.* 2009]). Lett. 8; lett. 12; lett. 14.

Cremona Itala. Figlia di Luigi. Lett. 2; lett. 8.

Cremona Luisa. Figlia di Luigi. Lett. 2.

Cremona Vittorio. Figlio di Luigi. Lett. 2; lett. 7.

Cua Antonio (1819-1899). Laureatosi in Matematica a Napoli, dal 1854 fu docente di Geometria analitica e poi, dal 1890, di Geometria descrittiva, sempre presso l'Università di Napoli (cfr. [TRICOMI 1962]). Lett. 36.

De Gasparis Annibale (1819-1892). Professore di Matematica Geodesia e Astronomia all'università di Napoli, dal 1864 fu anche direttore dell'Osservatorio astronomico di Capodimonte. Per gli alti meriti scientifici, fu nominato senatore del Regno di Napoli (cfr. [DBI]). Lett. 36.

De Luca Giuseppe (1823-1895). Geografo, docente di Geografia e Statistica, fu rettore dell'Università di Napoli dal 1861 al 1863 (cfr. [PIROMALLI 1996]). Lett. 1.

De Renzi Salvatore (1800-1872). Medico, storico della medicina, fu professore presso l'università di Napoli (cfr. [DBI]). Lett. 1.

Dini Ulisse (1845-1918). Alunno alla Scuola normale superiore di Pisa, ivi ebbe come maestri Mossotti e Betti. Fu docente prima di Geodesia e poi di Analisi nell'Università di Pisa e direttore della Scuola normale. Socio nazionale dei Lincei e membro della Società italiana delle Scienze detta dei XL; fu deputato al parlamento e senatore (cfr. [DBI]). Lett. 33.

D'Ovidio Enrico (1843-1933). Studiò a Napoli, frequentò anche lo studio privato di A. Sannia. Nel 1872 ottenne la cattedra di Algebra e Geometria analitica all'Università di Torino, di cui fu anche rettore dal 1906. Fu senatore dal 1905 (cfr. [TRICOMI 1962] e [LUI] *ad vocem*). Lett. 8; lett. 15; lett. 34.

Egg Anna. Moglie di Giuseppe Battaglini. Lett. 10; lett. 11; lett. 12; lett. 13; lett. 20; lett. 24; lett. 42.

Fergola Emanuele (1830-1915). Nel 1860 fu nominato, presso l'Università di Napoli, professore d'Introduzione al calcolo, poi insegnò anche Analisi superiore; nel 1890 passò alla cattedra di Astronomia (cfr. [TRICOMI 1962] e [DBI]). Lett. 36; lett. 39.

Ferrari Elisa. Moglie di Luigi Cremona. Lett. 2.

Güssfeldt Paul (1840-1920). Viaggiatore tedesco, diresse la spedizione promossa dalla Società geografica di Berlino nell'Africa equatoriale, raccogliendo numerose collezioni naturalistiche ed etnografiche (cfr. [LUI] *ad vocem*). Lett. 13.

Hirst Thomas Archer (1830-1892). Matematico e fisico, fu professore allo University College di Londra e direttore del Royal Naval College di Greenwich (cfr. *Darwin Correspondence Project* alla pagina www.darwinproject.ac.uk). Lett. 5; lett. 13; lett. 16.

Hoüel Guillaume Jules (1823-1886). Matematico e professore presso l'Università di Bordeaux. Diffuse in Francia le opere di Lobačevskij e di Bolyai (cfr. [TRICOMI 1962] e [CALLERI *et al.* 1996]). Lett. 16; lett. 37.

Janni Vincenzo (1819-1891). Dal 1844 fu professore di Matematica al Collegio di Marina di Napoli. Tra il 1870 ed il '75 supplì R. Rubini all'Università di Napoli (cfr. [TRICOMI 1962]). Lett. 14.

Jonquières Ernest Jean Philippe Fauque de (1820-1901). Entrato nella marina da guerra, si ritirò con il grado di ammiraglio e si dedicò agli studi della geometria. Le trasformazioni che portano il suo nome sono una importante classe delle trasformazioni dette *cremoniane* (cfr. *Enciclopedia on line* in www.treccani.it). Lett. 3.

Jung Giuseppe (1845-1926). Di famiglia triestina trasferitasi a Palermo, si era laureato in Matematica a Napoli. Divenne, presso il *Politecnico* di Milano, assistente di Cremona e poi professore straordinario di Geometria proiettiva e Statica grafica (cfr. [TRICOMI 1962]). Lett. 15.

Kronecker Leopold (1823-1891). Matematico, discepolo di Kummer e di Dirichlet, fu professore all'Università di Berlino e direttore del *Journal für reine und angewandte Mathematik*. Era socio straniero dell'Accademia dei Lincei (cfr. [LUI] *ad vocem*). Lett. 3.

Liouville Joseph (1809-1882). Fu professore di Analisi e meccanica all'École Polytechnique e al Collège de France, di Meccanica alla Sorbona, nonché membro dell'Institut de France, fondatore e direttore del *Journal de mathématiques pures et appliquées* (cfr. [LUI] *ad vocem*). Lett. 21; lett. 22.

Lobačevskij Nikolaj Ivanovič (1792-1856). Professore e, dal 1827, rettore dell'Università di Kazan'. Lobačevskij ha un posto eminente nella storia della matematica come creatore della geometria iperbolica (cfr. [LUI] *ad vocem*). Lett. 37.

Marcolongo Roberto (1862-1943). Laureatosi a Roma, nel 1895 divenne professore di Meccanica razionale all'Università di Messina e poi, nel 1908 passò a quella di Napoli (cfr. [TRICOMI 1962]). Lett. 43.

Mariotti Filippo (1833-1911). Uomo politico italiano, fu segretario del governo provvisorio di Camerino nel periodo delle annessioni, deputato e poi senatore, sottosegretario alla Pubblica Istruzione e consigliere di stato. Fu socio nazionale dei Lincei (cfr. [LUI] *ad vocem*). Lett. 40.

Martini Ferdinando (1841-1928). Scrittore e politico, fu anche ministro della Pubblica Istruzione e senatore. Promosse importanti iniziative culturali riguardanti la storia del Risorgimento (cfr. [LUI] *ad vocem*). Lett. 43.

Matteucci Carlo (1811-1868). Fu professore di Fisica a Bologna e poi a Ravenna e a Pisa; fu ministro della Pubblica Istruzione del Regno d'Italia dal marzo al dicembre del '62; vicepresidente del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione dal 1864 al '66 e dall'ottobre del '67 al marzo del '68. Fece parte della Società italiana delle scienze (cfr. [LUI] *ad vocem* e [DBI]). Lett. 1; lett. 10.

Mazzola Giuseppe (1829-?). Nel 1861 fu Professore di Matematica presso l'Università di Torino, con l'incarico dell'insegnamento di Geometria nella R. Scuola di Applicazione degli Ingegneri. Dal 1866 al '76 fu assistente presso l'Osservatorio Astronomico di Torino (cfr. sito dell'Osservatorio astronomico di Palermo, www.astropa.unipa.it). Lett. 27.

Miller William J.C. (1832-1903). Professore allo Huddersfield College (Yorkshire), fu *Editor* della sezione matematica del giornale *Educational Times, and Journal of the College of Preceptors*, organo d'informazione per gli insegnanti delle

scuole britanniche, a cui anche Cremona forniva contributi (cfr. [NURZIA 1999 b]). Lett. 10.

Milone Francesco. Fu professore di Meccanica applicata alle macchine, poi di Macchine termiche, idrauliche ed agricole; infine di Scienza delle Macchine, presso la *Regia Scuola d'Ingegneria* di Napoli. Fu anche docente di Meccanica agraria e Costruzioni presso la *R. Scuola Superiore di Agricoltura* di Portici. Nel 1889, studiò un sistema per l'immagazzinamento in aria compressa dell'energia idrica derivante dall'acquedotto del Serino, costruito sulla montagna di Cancellò (cfr. [SILVI 2004], pp.1-6). Lett. 17; lett. 38.

Minozzi Achille. Ingegnere, finanziere e imprenditore napoletano, fu autore, tra le altre cose, dell'articolo *Sui centri di gravità*, «Giornale di Matematiche», Napoli, vol. XV (1877), pp. 235-247. Lett. 31.

Montanari Antonio (1811-1898). Professore di Filosofia della storia all'Università di Bologna, ne fu rettore dal 1859 al '68. Fu anche membro del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione (cfr. sito del Senato della Repubblica, www.senato.it). Lett. 8.

Narducci Enrico (1832-1893). Bibliofilo e cultore delle scienze fisiche e matematiche, iniziò il suo apprendistato come bibliotecario del principe Baldassarre Boncompagni Ludovisi (1821-1894) e, nel 1872, venne chiamato a dirigere la Biblioteca Alessandrina dell'Università di Roma. Fu sospeso dall'incarico nel 1883, in seguito ad una denuncia per irregolarità di gestione da cui fu però proscioltò con formula piena; segnato da questa vicenda, si ritirò a vita privata. Fu socio corrispondente dei Lincei (cfr. [LUI] *ad vocem*). Lett. 21; lett. 22.

Padelletti Dino (1852-1892). Laureatosi a Pisa, fu dal 1877 professore di Meccanica razionale all'Università di Palermo e poi all'Università di Napoli (cfr. [TRICOMI 1962]). Lett. 36; lett. 43.

Padova Ernesto (1845-1896). Fu nominato, nel 1872, professore di Meccanica razionale presso l'Università di Pisa; passò, nel 1882, all'Università di Padova (cfr. [TRICOMI 1962]). Lett. 18.

Padula Fortunato (1815-1881). Insegnò dapprima Matematica al collegio Militare e in quello di Marina di Napoli, poi nel 1860 fu nominato professore di Meccanica razionale all'università di Napoli, di cui fu poi due volte rettore. Dal '64 alla morte fu direttore della Scuola degli Ingegneri di Napoli (cfr. [TRICOMI 1962]). Lett. 5; lett. 6.

Panceri Paolo (1833-1877). Medico e zooiogo, fu docente di Anatomia comparata presso l'Università di Napoli dal 1866 (cfr. [DBI]). Lett. 1.

Pellerano Benedetto. Editore del *Giornale di Battaglini*. Lett. 9; lett. 12; lett. 13; lett. 14; lett. 16; lett. 19; lett. 32; lett. 34; lett. 37.

Pognisi Francesco Achille. Afferiva al personale amministrativo dell'Università di Roma. Lett. 28.

Rodriguez Francesco. Fu direttore dell'Istituto tecnico di Roma. Lett. 24.

Ronchetti Anselmo. Docente di Matematica, anche provveditore agli studi e Presidente del Consiglio del "Collegio reale delle fanciulle" di Milano dal 1884 all'85 (cfr. [RONZONI 1993]). Lett. 29.

Rubini Raffaele (1817-1890). Allievo di Padula, si laureò in Matematica e in Architettura all'Università di Napoli. Fu nominato professore di Meccanica razionale alla Scuola di Marina di Napoli; nel 1861, passò, sulla stessa cattedra, all'Università di

Napoli e dopo poco assunse l'insegnamento di Algebra complementare (cfr. [TRICOMI 1962]). Lett. 1.

Salvatore Dino Nicola (1843-1919). Fu professore di Geometria proiettiva, poi di Geometria analitica, presso l'università di Roma. Nel 1888, si trasferì all'Università di Napoli sulla cattedra di Geometria descrittiva che cambiò, dopo due anni, con quella di Geometria analitica (cfr. [TRICOMI 1962]). Lett. 8; lett. 13; lett. 34; lett. 36; lett. 44.

Sannia Achille (1823-1892). Dal 1856 diresse a Napoli una scuola privata di matematica che ebbe maggior prestigio dell'università. In essa ebbe tra i suoi collaboratori D'Ovidio e Salvatore Dino. Nel '65, passò ad insegnare Geometria proiettiva presso l'Università di Napoli; ricoprì, inoltre, la carica di preside della Facoltà napoletana di Matematica nell'anno scolastico 1885-'86 (cfr. [TRICOMI 1962]). Lett. 30; lett. 31; lett. 36.

Scacchi Arcangelo (1810-1893). Professore di Mineralogia all'Università di Napoli, fu anche presidente della Società Italiana delle Scienze (cfr. [DBI]). Lett. 35; lett. 38.

Sella Quintino (1827-1884). Si laureò in Ingegneria a Torino, fu professore di Geometria applicata alle arti presso l'Istituto tecnico e poi di Matematica presso l'università di quella città. Nel 1860 entrò nella vita politica come deputato. Nel marzo del '74, venne eletto presidente dell'Accademia Nazionale Reale dei Lincei (cfr. [DBI]). Lett. 29.

Siacci Angelo Francesco (1839-1907). Professore di Balistica alla Scuola di Applicazione d'Artiglieria e Genio di Torino, tenne all'università della stessa città il corso di Meccanica celeste, denominato dal 1875 Meccanica superiore, a cui aggiunse, quello di Meccanica razionale. Nel '93 da Torino passò a Napoli, ancora sulla cattedra di Meccanica razionale (cfr. [Tricomi 1962] e [DBI]). Lett. 33, lett. 43.

Spuches Ruffo Giuseppe de (1819-1884). Fu un letterato, poeta e archeologo palermitano. Lett. 3.

Stammer Wilhelm (1826-?). Lett. 15.

Tagliabue Francesco. Professore e cavaliere; fu rettore del Collegio Nazionale Longone di Milano per gli anni 1863 e '64. Lett. 2; lett. 4; lett. 7; lett. 12; lett. 15.

Todhunter Isaac (1820-1884). Matematico, dal 1862 membro della Royal Society, fu autore di opere di trigonometria, analisi e meccanica (cfr. *Enciclopedia online* in www.treccani.it). Lett. 16.

Tofano Luisa. Madre di Giuseppe Battaglini. Lett. 4; lett. 5; lett. 7.

Tonelli Alberto (1849-1921). Nel 1877 fu nominato professore di Calcolo infinitesimale all'Università di Palermo; nel '79 passò all'Università di Roma (cfr. [TRICOMI 1962]). Lett. 28.

Trudi Nicola (1811-1884). Professore di Calcolo infinitesimale all'Università di Napoli, le sue ricerche riguardano soprattutto le funzioni ellittiche; fu anche autore di uno dei primi trattati sui determinanti (cfr. [DBI]). Lett. 14; lett. 26; lett. 34.

Vigo Calanna Lionardo, (1799-1879). Marchese di Gallodoro, fu poeta, filologo e politico (cfr. www.wikipedia.it). Lett. 3.

Villari Pasquale (1826-1917). Storico e uomo politico, fu ministro della Pubblica Istruzione dal 6 febbraio 1891 al 15 maggio 1892 (cfr. [DBI]). Lett. 41; lett. 42.

BIBLIOGRAFIA

[AMODEO 1906] F. AMODEO, *Giuseppe Battaglini e le sue opere*, «Atti dell'Accademia Pontaniana», vol. XXXVI, Necrologia n. 3, 1906.

[BOI *et al.* 1998] L. BOI, L. GIACARDI, R. TAZZIOLI, *La Découverte de la Géométrie non euclidienne sur la pseudosphère. Les lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel (1868-1881)*, Paris, A. Blanchard, 1998.

[BATTAGLINI 1863 a] G. BATTAGLINI, *Teoria elementare delle forme geometriche*, «Giornale di Matematiche», Napoli, vol. I (1863), pp. 1-6, 41-46, 97-109, 161-169, 227-239.

[BATTAGLINI 1863 b] G. BATTAGLINI, *Nota sulle serie di curve d'indice qualunque*, «Giornale di Matematiche», Napoli, vol. I (1863), pp. 170-174.

[BATTAGLINI 1865 a] G. BATTAGLINI, *Sulle forme geometriche di seconda specie*, «Giornale di Matematiche», Napoli, vol. III (1865), pp. 298-310.

[BATTAGLINI 1865 b] G. BATTAGLINI, *Sulle involuzioni dei diversi ordini nei sistemi di 2^a specie*, «Atti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli», s. I, vol. II, n. 19 (1865), pp. 1-20.

[BATTAGLINI 1865 c] G. BATTAGLINI, *Sulle involuzioni dei diversi ordini nei sistemi di 2^a specie*, «Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli», vol. IV (1865), pp. 226-228.

[BATTAGLINI 1866] G. BATTAGLINI, *Sulle forme geometriche di seconda specie*, «Giornale di Matematiche», Napoli, vol. IV (1866), pp. 96-122, 174-186.

[BATTAGLINI 1867] G. BATTAGLINI, *Pangeometria o sunto di geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele*, «Giornale di Matematiche», Napoli, vol. V (1867), pp. 273-336.

[R. BETTI 2005] R. BETTI, *Lobačevskij. L'invenzione delle geometrie non euclidee*, Torino, Paravia Bruno Mondadori Editori, 2005.

[BOLZANI 1856] I.A. BOLZANI, *Pangéométrie, ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles*, nella *Raccolta di dissertazioni scientifiche scritte dai professori della Imperiale Università di Kazan nel cinquantesimo anniversario della sua esistenza*, Kazan, t. I, pp. 279-340.

[BONOLA 1906] R. BONOLA, *La Geometria non-euclidea*, Bologna, Zanichelli, 1906.

[BONOLIS 1881] A. BONOLIS, *Elementi di Meccanica razionale e brevi nozioni di cosmografia secondo i metodi più recenti da servire anche di complemento al corso di Fisica*, Napoli, Libreria scientifica ed industriale di B. Pellerano, 1881.

[BRIGAGLIA *et al.* 2009] A. BRIGAGLIA - S. DI SIENO, *L'opera politica di Luigi Cremona attraverso la sua corrispondenza*, in *La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, Bologna, Serie I, vol. II, 2009.

[BRIOSCHI *et al.* 1869] F. BRIOSCHI, *Al signor Direttore del Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane – Napoli*, «Giornale di Matematiche», Napoli, vol. VII, 1869, pp. 51-54.

[CALLERI *et al.* 1996] P. CALLERI - L. GIACARDI, *Le lettere di Giuseppe Battaglini a Jules Hoüel (1867-1878)* in [CASTELLANA *et al.* 1996].

[CAPORALI 1877 a] E. CAPORALI, *Sui complessi e sulle congruenze di secondo grado* «Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei», s. III, vol. II, 1877-1878, pp. 749-769.

[CAPORALI 1877 b] E. CAPORALI, *Sopra i piani ed i punti singolari della superficie di Kummer*, «Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei», s. III, vol. II, 1877-1878, pp. 791-810.

[CARBONE et al. 1994] L. CARBONE - G. CARDONE - F. PALLADINO (a cura di), *La corrispondenza epistolare tra Ernesto Cesàro e Roberto Marcolongo*, «Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli», s. IV, vol. LXI – Anno CXXXIII, 1994.

[CARBONE et al. 1996] L. CARBONE - P. NASTASI - F. PALLADINO, *I carteggi Torelli-Cesàro, Landau-Cesàro, Cipolla-Cesàro e alcune questioni connesse*, «Nuncius – Annali di Storia della Scienza», XI, 1996, pp. 151-225.

[CARBONE et al. 2001] L. CARBONE - R. GATTO - F. PALLADINO (a cura di), *L'epistolario Cremona-Genocchi (1860-1886). La costituzione di una nuova figura di matematico nell'Italia unificata*, Firenze, Olschki, 2001.

[CARBONE et al. 2002] L. CARBONE - R. GATTO - F. PALLADINO, *Una comunità e un caso di frontiera. L'epistolario Cremona-Cesàro e i materiali correlati*, Memorie dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche, Napoli, Liguori, 2002.

[CARBONE et al. 2006] L. CARBONE - A.M. MERCURIO - F. PALLADINO - N. PALLADINO (a cura di), *La corrispondenza epistolare Brioschi-Genocchi*, «Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli», s. IV, vol. LXXIII, 2006.

[CASTELLANA et al. 1996] M. CASTELLANA - F. PALLADINO (a cura di), *Giuseppe Battaglini. Raccolta di lettere (1854-1891) di un matematico al tempo del Risorgimento d'Italia*, Bari, Levante Editori, 1996.

[CASTELNUOVO 1930] G. CASTELNUOVO, *Luigi Cremona nel centenario della nascita. Commemorazione*, «Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei», serie VI, vol. XII, 1930.

[CERRONI et al. 2007] C. CERRONI - G. FENAROLI, *Il Carteggio Cremona-Tardy (1860-1886)*, Milano, Mimesis, 2007.

[CREMONA 1914] L. CREMONA, *Opere matematiche di Luigi Cremona*, pubblicate sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei, Milano, Hoepli, 3 tomi, 1914-1917.

[CREMONA 1862] L. CREMONA, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, «Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna», s. I, t. XII (1862), pp. 305-436.

[CREMONA 1864 a] L. CREMONA, *Sulla teoria delle coniche*, «Giornale di Matematiche», Napoli, vol. II (1864), pp. 17-20 e p. 192.

[CREMONA 1864 b] L. CREMONA, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Berlin, Bd. 64 (1864), pp. 101-123.

[CREMONA 1865 a] L. CREMONA, *Sulla storia della prospettiva antica e moderna*, «Rivista italiana di Scienze, Lettere ed Arti colle Effemeridi della Pubblica Istruzione», anno VI (1865), pp. 226-231, pp. 241-245.

[CREMONA 1865 b] L. CREMONA, *On normals to conics, a new treatment of the subject*, «The Oxford, Cambridge, and Dublin Messenger of Mathematics», vol. III, N.° X (1865), pp. 88-91.

[CREMONA 1865 c] L. CREMONA, *Sulle trasformazioni geometriche delle curve piane. Nota II*, «Giornale di Matematiche», Napoli, vol. III (1865), pp. 269-280, pp. 363-376.

[CREMONA 1865 d] L. CREMONA, *I principii della prospettiva lineare secondo Taylor, per Marco Uglieri*, «Giornale di Matematiche», Napoli, vol. III (1865), pp. 338-343.

[CREMONA 1866] L. CREMONA, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, «Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna», s. II, t. VI (1866), pp. 91-136; t. VII (1867), pp. 29-78.

[CREMONA 1868] L. CREMONA, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Berlin, Bd. 68 (1868), pp. 1-133.

[CREMONA et al. 1881] L. CREMONA, *In memoriam Dominici Chelini*. Collectanea mathematica nunc primum edita cura et studio L. Cremona et E. Beltrami. [...] Accessit imago ejusdem Chelini et testamentum Nic. Tartaleae. Sumptibus Ulrici Hoepli Bibliopolae Neapoli, Mediolani, Pisis, 1881.

[DBI] *Dizionario Biografico degli Italiani*, www.treccani.it.

[D'OVIDIO 1879] E. D'OVIDIO, *Studio sulle cubiche gobbe mediante la notazione simbolica delle forme binarie*, «Giornale di Matematiche», Napoli, vol. XVII (1879), pp. 310-338 e «Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino», s. II, t. XXXII (1880), pp. 1-75.

[D'OVIDIO 1894] E. D'OVIDIO, *Commemorazione del Socio Giuseppe Battaglini*, «Atti della R. Accademia dei Lincei», anno CCXCI, serie V, Roma, 1894.

[FERRARO et al. 1996] G. FERRARO - F. PALLADINO, *Giuseppe Battaglini matematico al tempo del Risorgimento d'Italia*, in [CASTELLANA et al. 1996]. Contributo apparso in AA.VV., *Scienze in Italia, 1840-1880. Una storia da fare*, II Parte, Milano, Quaderni P.R.I.S.T.E.M., Università Bocconi, 1994, pp. 123-156.

[FIOCCA 1991] A. FIOCCA, *Problematiche emergenti dalla corrispondenza A. Genocchi-S. Gherardi (1862-1878)* in A. CONTE - L. GIACARDI (a cura di), *Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributi dall'epistolario*, Torino, Deputazione Subalpina di Storia Patria, 1991.

[FRANCHINI 2005] S. FRANCHINI - P. PUZZUOLI (a cura di), *Gli istituti femminili di educazione e di istruzione (1861-1910)*, Ministero per i beni e le attività culturali, Roma, 2005.

[GASCA et al. 1992] A.M. GASCA (a cura di), *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, v. I, quaderno n. 24, serie di Quaderni della Rivista di Storia della Scienza, n. 1 (1992), Università di Roma La Sapienza, Roma, 1992.

[GATTO 1996 a] R. GATTO (a cura di), *Lettere di Luigi Cremona a Enrico Betti (1860-1890)*, in *Per l'Archivio della Corrispondenza dei Matematici Italiani. La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, vol. III, a cura di M. Menghini, Quaderni P.R.I.S.T.E.M. - Università "L. Bocconi" di Milano -, n. 9, Palermo, 1996.

[GATTO 1996 b] R. GATTO, *Lettere di Giuseppe Battaglini a Enrico Betti* in [CASTELLANA et al. 1996]

[DE JONQUIERES 1861] E. DE JONQUIERES, *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque*, «Journal de mathématiques pures et appliquées», s. II, t. VI (1861), pp. 113-134.

[HIRST 1865] T.A. HIRST, *On the quadric inversion of plane curves*, «Proceedings of the London Mathematical Society», t. XIV (1865), pp. 91-106.

[LOBAČEVSKIJ 1946-1951] N.I. LOBAČEVSKIJ, *Polnoe Sobranie Sočinenij*, curata da V.F. Kagan, A.P. Kotel'nikov, V.V. Stepanov, N.G. Čebotarëv, P.A. Širokov, Mosca – Leningrado, 1946-1951, 5 tomi.

[LUI] *Lessico Universale Italiano*, Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani, Roma, Arti grafiche Marchesi per i tipi dell'Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato.

[MARTINI 2006] L. MARTINI, *Political and Mathematical Unification: Algebraic Research in Italy, 1850-1914*, A dissertation presented to the Graduate Faculty of the University of Virginia in the Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy, 2006, University of Virginia.

[MENGHINI et al. 1994] M. MENGHINI (a cura di), *La corrispondenza di Luigi Cremona*, quaderno n. 3, serie di Quaderni della Rivista di Storia della Scienza, vol. II, Università di Roma La Sapienza, Roma, 1994.

[MENGHINI et al. 1996] M. MENGHINI (a cura di), *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, vol. III, serie "Per l'archivio dei matematici italiani" Quaderni P.R.I.ST.EM. n. 9, 1996.

[MILONE 1885] F. MILONE, *Corso di macchine termiche, idrauliche ed agricole*, Napoli, Litografia della Trinacria, 1885.

[NURZIA 1999 a] L. NURZIA, *La corrispondenza tra Luigi Cremona e Thomas Archer Hirst (1864-1892)*, in [NURZIA et al. 1999], pp. 1-224.

[NURZIA 1999 b] L. NURZIA, *Lettere di J.C. Miller (The Educational Times) a Luigi Cremona (1864-1865)*, in [NURZIA et al. 1999], pp. 261-266.

[NURZIA et al. 1999] L. NURZIA (a cura di), *Per l'Archivio della Corrispondenza dei Matematici Italiani. La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, vol. IV, Quaderni P.R.I.ST.EM. – Università "L. Bocconi", Milano –, n. 11, Palermo, 1999.

[PALLADINO et al. 2009] N. PALLADINO - A.M. MERCURIO - F. PALLADINO (a cura di), *Per la costruzione dell'Unità d'Italia. Le corrispondenze epistolari Brioschi-Cremona e Betti-Genocchi*, Firenze, Olschki, 2009.

[PIROMALLI 1996] A. PIROMALLI, *La letteratura calabrese*, Cosenza, Pellegrini Editore, 1996.

[POLENGHI 1993] S. POLENGHI, *La politica universitaria italiana nell'età della Destra storica*, Brescia, Editrice La Scuola, 1993.

[RONZONI 1993] G. LALATTA RONZONI, *Il "Collegio reale delle fanciulle" in Milano*, Milano, Di Baio editore, 1993.

[RUBINI 1861] R. RUBINI, *Elementi di algebra, secondo i programmi universitari di esame per l'istruzione secondaria*, Napoli, 1861.

[RUBINI 1864] R. RUBINI, *Elementi di algebra. Seconda edizione accresciuta e migliorata*, Napoli, Tip. di A. Morelli, 1864.

[RUBINI 1866] R. RUBINI, *Elementi di algebra. Terza edizione accresciuta e migliorata*, Napoli, Tip. di A. Morelli, 1866.

[RUBINI 1867] R. RUBINI, *Complemento agli elementi di algebra per R. Rubini. Seconda edizione notabilmente accresciuta e migliorata*, Napoli, Tip. di A. Morelli, 1867.

[RUBINI 1868] R. RUBINI, *Euclide come testo di geometria elementare*, «Giornale di Matematiche», Napoli, vol. VI, 1868, pp. 361-368.

[SILVI 2004] C. SILVI, *Frammenti di storia dell'energia solare in Italia prima del 1955*, in "Scienza e Tecnica, mensiel di informazione della Società italiana per il progresso delle scienze", anno LXVII - n. 401, 2004.

[STAMMER 1868] W. STAMMER, *Recherches sur les surfaces du second degré qui se coupent suivant deux courbes planes ou qui sont enveloppées par deux cônes communs*, par M. Guillaume Stammer, «Giornale di Matematiche», Napoli, vol. VI (1868), pp. 153-165.

[TODHUNTER 1852] L. TODHUNTER, *A treatise on the differential calculus with numerous examples*, Cambridge and London, Macmillan and Co., 1852.

[TODHUNTER 1857] L. TODHUNTER, *A treatise on the integral calculus and its applications with numerous examples*, Cambridge and London, Macmillan and Co., 1857.

[TRICOMI 1962] F.G. TRICOMI, *Matematici Italiani del Primo Secolo dello Stato Unitario*, «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino – Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali», Serie 4a, n. 1, 1962.

[WILSON 1868] J.M. WILSON, *Euclid as a text-book of elementary geometry*, «Educational Times», 1868, pp. 125-128.

**ATTIVITÀ POZZOLANICA DI PIROCLASTITI INCOERENTI E LITOIDI E DI ALTRI PRODOTTI
CEMENTIZI SUPPLEMENTARI.**

**POZZOLANIC ACTIVITY OF LOOSED AND LITHIC PYROCLASTIC PRODUCTS AND OF OTHER
SUPPLEMENTARY CEMENTITIOUS MATERIALS.**

NOTA DI RICCARDO SERSALE.

(ADUNANZA DEL 8 APRILE 2011)

Riassunto. Dopo una puntualizzazione dei vantaggi dell'impiego dei cementi compositi, che consentono di aumentarne la produttività e di abbattere le emissioni di CO₂, si passa all'esame di quelli che incorporano zeoliti o tufi vulcanici zeolitizzati (zeolititi) come prodotto cementizio supplementare. Si descrivono struttura delle zeoliti e genesi dei tufi vulcanici zeolitizzati e se ne esamina il comportamento in seno al cemento Portland, grazie alla loro alta attività pozzolanica. Si raffronta tale comportamento con quello di altri prodotti cementizi supplementari, quali: scoria d'alto forno granulata e ceneri volanti e se ne mostrano le superiori proprietà meccaniche e la migliorata durabilità dei manufatti. Si sottolinea infine che le massicce ricerche in argomento, esplesate nel recente passato nell'Università di Napoli, hanno trovato sostanziale conferma in quelle che vengono al giorno d'oggi condotte in campo internazionale.

Parole chiave: Zeoliti e zeolititi come prodotti cementizi supplementari.

Summary. After the statement of the benefits associated with blended cements employment, linked to a production increase and CO₂ emissions decrease, the features of those blended with zeolites or with zeolitic volcanic tuffs are studied. Structure of zeolites and genesis of zeolitic volcanic tuffs are then described and their behavior, when blended with Portland cement, examined, thanks to their high pozzolanic activity. Comparison with other supplementary cementitious materials, such as granulated blastfurnace slag and fly ashes are also presented, showing the improved mechanical strengths and durability of cements blended with zeolites or zeolitic volcanic tuffs. Finally, it is emphasized that the massive researches concerning the subject, carried out in former times in the Naples University, have been proved founded in the up-to-dated international investigations.

Key words: Zeolites and zeolitic volcanic tuffs as cementitious supplementary materials.

La produzione di clinker di Portland genera una notevole quantità di CO₂ (1). Macinato ed addizionato di modeste quantità di gesso, costituisce il cemento Portland, che viene in massima parte impiegato sotto forma di calcestruzzo, un materiale assai durevole che incorpora relativamente poca energia. Tenendo però conto della sua alta produzione: oltre quattordici miliardi di tonnellate, ciò che costituisce il più grosso movimento di materiale nel Pianeta, le incidenze sull'ambiente sono enormi. E' stato posto in luce (2) che l'industria cementiera ha emesso in media, nel 2000, 0.87 kg di CO₂ per kg di cemento e la produzione mondiale è stata di 1.57 miliardi di tonnellate. Nel 2004 ha superato i due miliardi. La produzione media pro-capite di CO₂ assomma a circa cinque tonnellate/anno. Ogni anno l'uomo produce sette miliardi di tonnellate di carbonio, soprattutto sotto forma di CO₂ e per moderare il riscaldamento globale tale valore dovrebbe ridursi di 1/5.

I Paesi che hanno sottoscritto il Protocollo di Kyoto nel febbraio 2005, sono obbligati a ridurre mediamente del 5.2%, al di sotto del livello del 1990, le emissioni mondiali di sei gas ad effetto serra, ciò che impone di ridurre di circa il 55% le emissioni di CO₂ (3). Si tratta di un compito difficile, che ha posto già in difficoltà i Paesi sottoscrittori.

L'odierna industria cementiera viene pertanto a trovarsi di fronte ad una sfida: produrre, in un quadro sostenibile e rispettoso della conservazione dell'ambiente, leganti a minor impegno energetico e più durabili, senza sacrificare le proprietà meccaniche finali.

Una delle possibili vie per conseguire questo risultato è, com'è noto (4), il taglio del clinker di cemento con prodotti cementizi supplementari dotati di reattività verso la calce, che, in aggiunta ai vantaggi di proteggere l'ambiente e di aumentare di 1.5-2 volte la produzione, offre anche quelli di una riduzione del 40% del combustibile richiesto e di una migliorata resistenza chimica (5). Tale taglio, che riduce anche il calore d'idratazione del corrispondente cemento, comporta una riduzione proporzionale dei costi economici del prodotto finale.

L'ampio gruppo di prodotti cementizi supplementari idonei al taglio del clinker di cemento Portland, annovera principalmente allumosilicati che manifestano attitudine a combinarsi con la Portlandite (Ca(OH)_2), in presenza d'acqua, per originare prodotti di reazione dotati di proprietà cementanti, in un processo denominato "reazione pozzolanica". Fra essi compaiono: scorie d'alto forno, ceneri volanti (6), ceneri di pula di riso, terre di diatomee, zeoliti e tufi zeolitici (7) che esibiscono più alta attività pozzolanica, grazie all'ampia area superficiale specifica disponibile a reagire ed alla struttura aperta (8). In aggiunta, il totale contenuto di zeolite del prodotto, la chimica della zeolite cristallina, cioè il rapporto Si/Al nel reticolo ed il contenuto di catione scambiabile, influenzano la reattività a breve e lungo termine (9).

Le zeoliti con elevato rapporto Si/Al mostrano infatti attività pozzolanica a lungo termine più alta e superiori proprietà meccaniche, rispetto a quelle con minor contenuto di silice. I tufi zeolitici contenenti cationi alcalini scambiabili, modificano poi la chimica della soluzione dei pori della pasta di cemento ed aumentano la velocità della reazione pozzolanica, rispetto a tufi zeolitici che come catione scambiabile recano predominantemente Ca^{2+} .

L'attività pozzolanica (10), generalmente considerata come velocità della reazione pozzolanica, viene definita come attitudine dei prodotti naturali, o dei sottoprodotti industriali, a generare componenti dotati di proprietà leganti (11), come risultato della reazione con la portlandite, in presenza d'umidità, influenzando la resistenza a compressione finale, la permeabilità, la durabilità. Essa viene seguita controllando sistematicamente la quantità di calce libera consumata, influenzata dalla composizione mineralogica e dalla quantità di fasi dotate di reattività, dal loro contenuto di silice e dalla durata della stagionatura. La velocità della reazione pozzolanica è condizionata dalla superficie specifica del prodotto reattivo, dal rapporto acqua/solido della miscela e dalla temperatura di stagionatura. L'alta attività pozzolanica appare pertanto direttamente collegata alla superficie specifica ed al contenuto di silice reattiva.

Il comportamento dei prodotti cementizi supplementari nei cementi compositi e nelle miscele per calcestruzzo dipende dunque da una pluralità di fattori: distribuzione delle dimensioni delle particelle, area superficiale specifica che controlla la richiesta d'acqua, reologia ed attività pozzolanica, che influenzano resistenza a compressione, permeabilità, durabilità.

Zeoliti naturali e tufi zeolitici, per l'abbondante diffusione ed il costo relativamente basso, hanno attratto l'attenzione degli studiosi del settore del cemento come prodotti di rimpiazzo di aliquote di clinker di cemento Portland (12).

La zeolite naturale è un allumosilicato idrato, con un reticolo costruito in modo da generare una struttura microporosa con larghe gabbie (diametri inferiori a 2nm), connesse in canali. I vuoti risultanti sono occupati da molecole d'acqua e cationi metallici. Si tratta di tectosilicati di origine idrotermale (13), simili alle forme cristalline della silice. La sola differenza concerne la sostituzione degli atomi di silicio di alcuni tetraedri con atomi di alluminio. Tale sostituzione rende la struttura carica negativamente, poiché l' Si^{4+} viene rimpiazzato da Al^{3+} . Per ripristinare lo stato di neutralità è pertanto necessario che cationi positivi (controioni), come K^+ ed Na^+ , in numero equivalente a quelli di alluminio presenti, entrino nel tetraedro. Il rapporto (Si+Al):O risulta pertanto di 1:2, come

nella silice. La sostituzione del silicio con alluminio rende la struttura più aperta. Tale caratteristica, che aumenta all'aumentare del rapporto Al:Si, induce nella zeolite proprietà specifiche di questa famiglia di minerali: scambio ionico e disidratazione reversibile, poiché ioni e molecole d'acqua, ospitati nei vuoti della struttura cristallina, sono dotati di considerevole libertà di movimento.

I cristalli di zeoliti di origine idrotermale che si rinvencono nelle geodi possono raggiungere dimensioni di un certo rispetto e si presentano con pochi difetti ed assai poco tensionati.

Grande importanza come prodotti cementizi supplementari rivestono i tufi zeolitici, che costituiscono gli equivalenti zeolitizzati delle corrispondenti pozzolane e si rinvencono abbondantemente in aree di antico e recente vulcanismo.

Il meccanismo del processo di formazione di tali tufi è stato compiutamente studiato, analizzando il passaggio pozzolana flegrea (incoerente) – tufo giallo napoletano (litoide) (14) e risulta addebitabile, ad opera di fenomeni diagenetici, ad una devettrificazione del vetro soffiato, che utilizza gli stessi suoi alcali che vanno in soluzione. I tufi zeolitici derivano pertanto dalla trasformazione del prodotto incoerente (pozzolana naturale) in prodotto litoide (tufo zeolitico), per effetto dell'attacco del vetro soffiato, principale costituente della pozzolana e particolarmente reattivo, pervaso dall'acqua che reca in soluzione ioni alcalini ed alcalino-terrosi e che determina le condizioni per l'inizio di un processo di cristallizzazione, originando un minerale zeolitico diffuso nella matrice, la fase cementante del tufo litoide (15), (16). Quando l'acqua ristagna, o si rinnova lentamente, il dilavamento è nullo, o molto ridotto, e gli ioni alcalini od alcalino-terrosi si distaccano dal vetro soffiato, vanno in soluzione e ne innalzano il pH, che decide del tipo di minerale zeolitico di neoformazione. Quando l'acqua si rinnova completamente e rapidamente, tali ioni vengono totalmente dilavati e si neoformano fillosilicati idrati di alluminio. I tufi zeolitici neoformati permangono tali anche se cambia il regime idrico.

Il processo di zeolitizzazione a carico del vetro soffiato, ad opera di fenomeni diagenetici, genera generalmente cristalli assai fini (dimensione tipica 10-100 μm), tensionati, che mostrano una notevole concentrazione di difetti (9). Non sono visibili in microscopia ottica, ma solo in quella elettronica (Fig. 1).

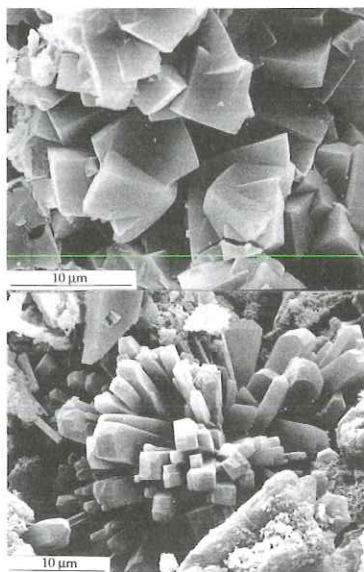


Fig.1 - Microscopia elettronica a scansione di zeoliti nel tufo giallo napoletano. Cristalli romboedrici di cabasite ed aghiformi di phillipsite.

Studi sull'attività pozzolanica dei tufi zeolitici hanno mostrato che hanno un'eccellente reattività, ancor più reattivi dei prodotti vetrosi, quanto ad attitudine a fissare la calce (17), (18).

Al fine di promuovere l'impiego di tufi vulcanici come prodotti cementizi supplementari per la produzione di cementi composti di superiore comportamento, è stata condotta una vasta sperimentazione che lo ha compiutamente esaminato, termine di paragone essendo quello dell'equivalente non diageneticamente modificato: la pozzolana. Si è infatti preso in esame il comportamento del tufo giallo napoletano, polverizzato, originatosi nel secondo periodo di attività del vulcanismo flegreo, che denuncia una stretta analogia costituzionale con il "trass" renano (19), da lungo tempo impiegato in Germania per la produzione dei "trass zemente". Come termine di riferimento si è impiegata la pozzolana flegrea, un prodotto vulcano-clastico trachitico, incoerente, recante granelli, di dimensioni 0.06-2 mm, di pomici, frammenti di scorie e lava, insieme con cristalli di feldspato, salite (molto simile al diopside) e biotite. La sua composizione chimica è assai prossima a quella del tufo giallo litoide, originatosi, come già sottolineato, per fenomeni diagenetici a carico del vetro soffiato (pozzolana flegrea). Si rileva nel tufo un sensibile aumento dell'acqua stabilmente fissata, un lieve aumento del tenore di ossido di calcio ed una diminuzione di quelli di silice, allumina ed alcali. I minerali zeolitici diffusi nella massa di fondo cementante sono la phillipsite e la cabasite (Fig.1). Trattasi pertanto di un tipico tufo zeolitico (zeolitite).

Il rilevamento delle curve cinetiche relative al processo di fissazione della calce, ha posto in luce l'attitudine del tufo giallo, preventivamente macinato, a fissare più rapidamente, in analoghe condizioni ed a parità di finezza, una quantità di calce anche superiore a quella fissata dall'equivalente vetroso (la pozzolana) (8).

Tenuto conto della similitudine di composizione chimica, la maggiore reattività verso la calce del tufo zeolitico macinato può ragionevolmente esser attribuita soltanto alla peculiare struttura dei minerali zeolitici diffusi nella massa di fondo. I pori e canali che percorrono il solido nella sua interezza, favoriscono l'attacco da parte della soluzione di contatto, perché offrono ad essa un'area superficiale più ampia di quella dei frammenti di vetro soffiato, tipici costituenti della pozzolana.

Le prove di resistenza a compressione su malta hanno mostrato che, a parità di contenuto di prodotto cementizio supplementare, macinato fino a lasciare un residuo del 13% su setaccio da 32 μ m e di modalità di stagionatura, i valori risultano sensibilmente più alti per le malte preparate con cemento composito recante tufo, in linea con la più alta reattività rilevata con le curve cinetiche (8). La Fig. 2 riporta l'andamento della resistenza a compressione, in funzione del rimpiazzo di clinker e di durata della stagionatura, di malte preparate con cemento-pozzolana flegrea e cemento-tufo giallo napoletano. Può rilevarsi che i valori risultano maggiori per le malte preparate con miscele clinker di cemento-tufo giallo, particolarmente alle lunghe stagionature.

Accanto alle superiori caratteristiche meccaniche, l'impiego di cemento recante tufo giallo, come prodotto cementizio supplementare, ha consentito di mitigare l'espansione che accompagna, nei corrispondenti calcestruzzi, l'espansione per alcali-reazione (20), (21).

E' stato anche posto in luce (22) che tale mitigazione può esser migliorata con un preventivo trattamento del tufo giallo di 1 ora a 600°C, trattamento inefficace per la pozzolana flegrea, trattamento che determina il collasso della struttura a pori e canali originaria, alla quale subentra un solido amorfo, che offre alla soluzione d'attacco un'area superficiale ancor più ampia di quella precedente.

Altri tufi vulcanici italiani, appartenenti a differenti distretti eruttivi, hanno confermato i risultati fin qui esposti, rispondendo alle diversificate prove in funzione del tipo e del contenuto di minerale zeolitico. Essi sono: il tufo lionato dei Colli Albani (23), contenente phillipsite e cabasite in ragione del 60-70%, i tufi rossi a scorie nere delle regioni Sabazia e Cimina (24), recanti cabasite in ragione del 50%, il tufo "carpat" della regione vulcanica del Monte Vulture, recante anch'esso cabasite per il 50% (25).

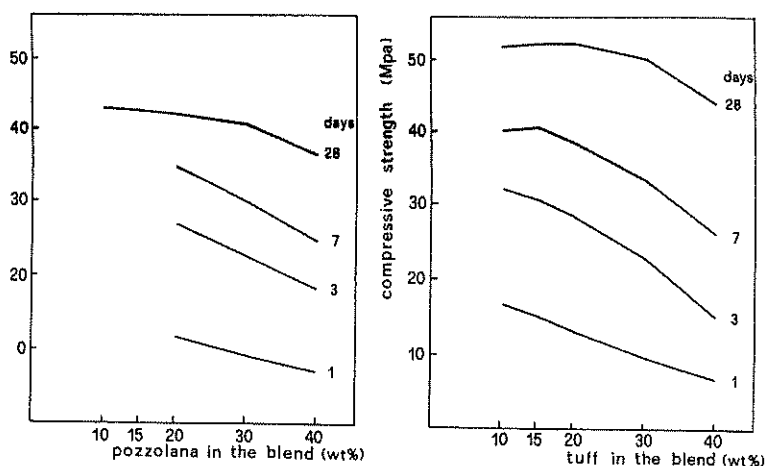


Fig.2 - Resistenza a compressione in funzione del rimpiazzo di clinker e della durata di stagionatura di malte preparate con cementi addizionati di pozzolana flegrea (1) e di tufo giallo napoletano (2).

L'aggiunzione di tufo zeolitico al clinker di cemento Portland normalmente riduce debolmente la lavorabilità, come del resto fa anche la pozzolana naturale. Ciò però non costituisce un problema perché, laddove necessario, la lavorabilità può esser innalzata mediante appropriata aggiunta di superfluidificanti.

Né deve preoccupare più di tanto la spesa di macinazione del prodotto litoide, perché cavità e canali non soltanto riducono il peso specifico, ma facilitano il processo di comminuzione, rendendolo paragonabile a quello della pozzolana. Infatti, circa 8-10 kWh/tonnellata sono richiesti per macinare ognuna delle due piroclastiti, rispetto alle 30 kWh/tonnellata, necessarie a macinare il clinker di cemento (4). Inoltre, anche il consumo di energia di essiccazione per ognuna delle due piroclastiti è simile: 200-250 kcal/kg, rispettivamente.

L'impiego di tufi vulcanici come prodotto cementizio supplementare ha riscosso interesse anche in altri Paesi (7) e le ricerche espletate hanno sostanzialmente confermato i risultati fin qui esposti, sottolineando che le zeoliti sono più reattive di parecchi altri prodotti cementizi supplementari.

La Norma EN 197-1 2000 ammette l'impiego di allumosilicati, sia naturali (zeoliti e tufi vulcanici), sia artificiali (fumo di silice, scoria d'alto forno ecc.). Sono infatti preparabili: il CEM II (6-35%), il CEM IV (11-55%), il CEM V (18-50%).

La necessità di incrementare la produzione di cementi compositi per ragioni di carattere ecologico e la disponibilità di depositi di zeoliti naturali e di tufi vulcanici zeolitici, ha ben più recentemente dato un forte impulso alla ricerca nel settore in molti Paesi.

Nei depositi sedimentari, ampiamente distribuiti in parecchi Paesi (USA, Cina, Giappone, Ungheria, Bulgaria, Turchia), si rinvencono zeoliti naturali e tufi zeolitizzati. Cinque tipi di zeoliti sono presenti più frequentemente: clinoptilolite, heulandite, analcime, phillipsite e laumontite.

E' stato rilevato (26) che un calcestruzzo preparato con cemento contenente 40% in peso di zeolite naturale, denuncia una resistenza a compressione più alta, tanto a breve, quanto a lungo termine, rispetto a quello preparato per addizione di scoria d'alto forno, a parità di rapporto acqua/cemento e

condizioni di stagionatura. La fase neoformata è sempre il C-S-H. La porosità totale della pasta di cemento si riduce, poiché diminuiscono i pori di diametro superiore a circa 1000 Å, il che concorre ad innalzare la resistenza meccanica.

Nei calcestruzzi l'aggiunta di zeolite naturale migliora anche struttura e proprietà della zona di transizione pasta-aggregato, abbassando il grado d'orientazione dei cristalli di calce.

E' stato studiato (27) l'effetto della clinoptilolite, uno dei minerali zeolitici più diffusi, sulle proprietà di un cemento composito preparato con tufo vulcanico, in miscela ternaria con clinoptilolite, ottenendo buoni esiti. E' stato infatti rilevato che il risultante cemento possiede interessanti proprietà di comportamento. Il contenuto di molecole d'acqua di costituzione della clinoptilolite può ridurre la domanda d'acqua d'impasto. La clinoptilolite non può istantaneamente venir coinvolta nelle reazioni d'idratazione, poiché il collasso della struttura dipende dalla comparsa dell'idrossido di calcio e quindi lo sviluppo di resistenza meccanica richiede tempi più lunghi (28 giorni).

Le zeoliti sono più reattive di parecchi altri prodotti cementizi supplementari (27). Le loro proprietà pozzolaniche sono associate al contenuto di silice reattiva e quelle meccaniche si situano fra fumo di silice e ceneri volanti in condizioni simili. Il rapporto acqua/cemento, le dimensioni dei grani, la temperatura di stagionatura non solo influenzano lo sviluppo delle proprietà meccaniche, ma anche la reattività verso gli alcali, migliorando la durabilità.

Una ricerca (28) effettuata sulla reazione pozzolanica fra un tufo zeolitico e la portlandite, ha posto in luce che la cinetica di reazione e l'evoluzione strutturale del principale prodotto di reazione (C-S-H), sono influenzate dal contenuto di catione scambiabile. Un successivo studio (9) sull'idratazione di cementi compositi contenenti zeolite naturale ha rivelato che gli effetti dell'aggiunta di prodotti zeolitici naturali dipendono fortemente dalle caratteristiche della zeolite. L'inizio dell'idratazione del silicato tricalcico, la precipitazione di calce, la formazione di fasi Aft, vengono notevolmente accelerati per aggiunta di tufo ricco di clinoptilolite naturale di bassa cristallinità. L'aggiunta di cabasite con medesima distribuzione delle dimensioni dei grani, ma più alta cristallinità, si rivela assai meno efficace nell'accelerazione della presa del cemento a cui viene aggiunta. La velocità della reazione pozzolanica risulta inoltre considerevolmente più bassa se la zeolite è ben cristallizzata.

Il contenuto di catione scambiabile del tufo clinoptilolitico, dopo scambio con Na-K-Ca, influenza l'attività pozzolanica e le caratteristiche di formazione e diffusione del C-S-H che cresce sui grani del C₃S. L'attività pozzolanica della clinoptilolite scambiata con alcali, risulta inoltre più alta di quella scambiata con Ca. Infine, l'evoluzione strutturale della fase C-S-H nei cementi compositi si diversifica da quella del C-S-H del cemento Portland ordinario. In presenza di prodotti pozzolanici, si formano catene silicatiche più lunghe e rapporti più bassi C/S, un vantaggio per la mitigazione dell'alcali-reazione nei calcestruzzi (29).

E' stata pure studiata l'efficacia di una zeolite modificata sull'abbattimento dell'espansione per alcali-reazione (30), in raffronto con quella di altre aggiunte minerali, quali: ceneri volanti e scoria d'alto forno granulata, seguendo le direttive della Norma ASTM (31). La modificazione consente la riduzione del prodotto cementizio supplementare, grazie alla capacità di scambio di cationi, che fortemente aumenta. Può infatti fissare ioni Na⁺ e K⁺, riducendo la concentrazione di alcali solubili e conservando la medesima efficacia, anche se impiegata in proporzione ridotta, con conseguente diminuzione della richiesta d'acqua d'impasto del risultante cemento e favorevoli ricadute sulla lavorabilità dell'impasto.

E' stato infatti rilevato che una zeolite naturale, modificata, dopo polverizzazione, per immersione di 4 ore in una soluzione di NH₄Cl 2N, abbatta la concentrazione di alcali solubili nella soluzione dei pori della pasta di cemento più efficacemente, perché gli ioni alcalini possono esser scambiati con gli ioni NH₄⁺, con formazione di NH₃·H₂O, controllando in tal modo l'espansione per alcali reazione. Adottando la citata prova (31), l'espansione dopo 14 giorni di un provino che incorporava il 5% di zeolite modificata, risultava inferiore a 0,1%, mentre, per la medesima efficacia, l'aggiunta di cenere volante o scoria d'alto forno doveva salire a 25 e 40%, rispettivamente.

Le proprietà fisiche del cemento che incorporava il 5% di zeolite modificata: consistenza normale, tempo di presa, resistenze a compressione e flessione, soddisfacevano le prescrizioni imposte dalla Norma standard cinese.

Conclusioni.

Zeoliti naturali e zeolititi (equivalenti litoidi delle pozzolane), per la vasta diffusione e per l'alta reattività verso la calce, che supera quella di altri prodotti cementizi supplementari, costituiscono rimpiazzati di clinker particolarmente affidabili per la produzione di cementi compositi, concorrendo ad esibire migliorata durabilità, riduzione del consumo d'energia ed emissione di CO_2 .

Le ricerche internazionali recentemente condotte in argomento, hanno sostanzialmente confermato i risultati delle ampie indagini espletate, tempo addietro, nell'Università di Napoli, indagini che hanno posto in luce non solo l'alta attività pozzolanica delle zeoliti (10) e delle zeolititi (11), ma anche il miglior comportamento meccanico ed il meccanismo di trasformazione: piroclastiti incoerenti-piroclastiti litoidi (15). Le resistenze meccaniche, a tempi più lunghi, sono risultate infatti più alte di quelle di cementi compositi che incorporavano, come prodotti cementizi supplementari, pozzolane naturali eminentemente vetrose, o scorie d'alto forno, o ceneri volanti.

La lavorabilità degli impasti, leggermente ridotta, di cementi compositi recanti zeoliti o zeolititi non preoccupa, poiché, all'occorrenza, può esser corretta con l'impiego di superfluidificanti, né la macinazione delle zeolititi (litoidi) costituisce un pregiudizio, poiché, grazie alla particolare struttura microporosa, richiedono energia di comminuzione dell'ordine di quella delle pozzolane (incoerenti).

Un notevole beneficio rappresenta infine l'impiego di zeoliti e zeolititi come prodotti cementizi supplementari, sia per la migliorata resistenza chimica dei manufatti, che per la mitigazione dell'espansione per alcali-reazione.

Bibliografia

1. Sersale R. Sulla riduzione delle emissioni di anidride carbonica nelle produzione di cementi. Rend.Acc. Sc. fis., mat., Napoli, 72, 19 (2005).
2. Damtoft J.S., Lukasik J., Herfort D., Sorrentino D., Gartner E.M. Sustainability development and climate change initiatives. Cement Concrete Res., 38, 115 (2008).
3. Sersale R. Il contributo dell'industria cementiera all'attenuazione del cambiamento climatico. Rend.Acc.Sc. fis. mat., Napoli, 75, 105 (2008).
4. Sersale R. Aspects of the chemistry of additions. Advances in Cement Technology. S.N. Ghosh Ed. Pergamon Press, 537. New Dehli (2002).
5. Sersale R. Le aggiunte minerali al cemento Portland ordinario e le modificazioni del suo comportamento tecnico. Rend.Acc. Sc. fis. mat., Napoli, 70, 97 (2003).
6. Sersale R. Structure et caractérisation des pouzzolanes et des cendres volantes. 7è Congres Intern. de la Chimie des Ciments. I. Rapport Principal. Ed. Septima, IV-1/3- 1/21. Paris (1980).
7. Sersale R. Prodotti supplementari per cementi compositi. Rocce ad alto contenuto di zeoliti. Boll. AIZ, 11, 11 (1998).
8. Sersale R. Zeolite tuff as a pozzolanic addition in the manufacture of blended cements. In: Natural Zeolites '93. D.W. Ming, F.A. Mumpton Eds. Intern. Committee on Natural Zeolites. Occurrence, properties, use, 603 (1993).
9. Snellings R., Mertens G., Cizer O., Elsen J. Early age hydration and pozzolanic reaction in natural zeolite blended cements. Reaction kinetic and products by in situ synchrotron X-ray powder diffraction. Cement Concrete Res., 40, 1704 (2010).
10. Sersale R. Sull'attività pozzolanica delle zeoliti. Nota I. Reattività dell'herschelite con soluzione satura d'idrossido di calcio. Rend. Acc. Sc. fis. mat., Napoli, 27 (1960).
11. Sersale R., Giordano Orsini P., Aiello R. Sulla costituzione dei prodotti di reazione di talune zeoliti e piroclastiti con soluzione satura di calce. II. Roentgenografia dei solidi di neoformazione. Rend. Acc. Naz. Lincei. Classe Sc.fis. mat. nat., 36, 2, 162 (1964)
12. Sersale R., Frigione G. Natural zeolites as constituents of blended cements. Chimica e Industria, 67, 4, 177 (1985).
13. Sersale R. Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per trattamento idrotermale. Note da 1 a 10. Rend. Acc. Sc. fis. mat., Napoli, 26, 27, 28 (1959-1961).
14. Scherillo A. Zeoliti e Zeolitizzazione. Rend. Acc. Naz. Lincei (1977).
15. Scherillo A. Petrografia chimica dei tufi flegrei. II. Tufo giallo, pozzolana, mappamonte. Acc. Sc. fis. mat., Napoli, 22 (1955).
16. Sersale R. Genesi e costituzione del tufo giallo napoletano. Rend. Acc. Sc. fis. mat., Napoli, 25 (1958).
17. Sersale R. Ricerche sperimentali sulla costituzione, sulla genesi e sul comportamento chimico dei tufi vulcanici. Rend. XVII° Congresso Soc. Mineralogica Ital. Pavia (1961).
18. Uzal B., Turanli L., Yucel H., Goncuoglu M.C., Culfaz A. Pozzolanic activity of clinoptilolite: A comparative study with silica fume, fly ash and non-zeolitic natural pozzolan. Cement Concrete Res., 40, 398 (2010).
19. Sersale R. Analogie costituzionali fra il "trass" renano ed il tufo giallo napoletano. Rend. Acc. Sc. fis. mat., Napoli, 26 (1959).
20. Sersale R., Frigione G. Portland-zeolite cement for minimizing alkali-aggregate expansion. Cement Concrete Res., 17, 404 (1987).

21. Sersale R. Mitigazione della reazione alcali-silice (ASR) in malte e calcestruzzi di cemento. Rend. Acc. Sc. fis. mat., Napoli 78 (2011).
22. Sersale R. Effects of temperature treatment of volcanic tuffs on the performance of the resultant blended cements. Zeolite '85. An Intern. Conference on the occurrence, properties and utilization of natural zeolites. Budapest (1985).
23. Sersale R. Sulla natura zeolitica del tufo cosiddetto "fionato" della regione vulcanica dei Colli Albani. Rend. Acc. Sc. fis. mat., Napoli, 4, 26 (1959).
24. Sersale R. Sulla natura zeolitica dei tuffi rossi a scorie nere delle regioni Sabazia e Cimina. Rend. Acc. Sc. fis. mat., Napoli, 27 (1960).
25. Sersale R. Sulla natura zeolitica del tufo "carpato" della regione vulcanica del Monte Vulture. Rend. Acc. Sc. fis. mat., Napoli, 27 (1960).
26. Naiqian F. Properties of zeolite mineral admixture in concretes. In: Progress in Cement and Concrete. S. L. Sakar, S. N. Ghosh Eds. 4, ABI Books Private Ltd, 396. New Dehli (1994).
27. Yilmaz B., Ertun T., Ucar A., Oteyaka B., Once G. A study on the effect of zeolites (clinoptilolite) on volcanic tuff blended cement paste and mortars. Magazine of Concrete Res., 61, 2, 133 (2009).
28. Snellings R., Mertens G., Elsen J., The zeolite-lime pozzolanic reaction: reaction kinetics and products by in situ synchrotron X-ray powder diffraction. Microporous Mesoporous Mater., 126, 40 (2009).
29. Sersale R., Frigione G. On the minimization of alkali-aggregate reaction. A comparison of the effects of blastfurnace slag, pozzolanas and powdered volcanic tuffs. Proc. 7th Intern. Conference on Alkali-Aggregate Reaction. Carleton University, Ottawa. August (1986).
30. Niu Quanlin, Feng Naiqian. Effect of modified zeolite on the expansion of alkaline silice reaction. Cement Concrete Res., 15, 1784 (2005).
31. ASTM C 441. Standard test method for potential alkali reactivity of mineral admixtures or ground blastfurnace slag in preventing excessive expansion of concrete due to alkali-aggregate reaction.

The United Nation Conferences on Climate Change

GUIDO BARONE*, ELENA SASSI**

Presentata dal Socio Guido Barone

(Adunanza dell' 8 Aprile 2011)
in press

Key Words: Climate Changes, Greenhouse Effect, International Conferences, COP.

Abstract

In 1988 the UN Environment Agency and the World Meteorological Organization (WMO) instituted the IPCC (International Panel on Climate Change) an Agency whose goal is to collect, analyse and summarise in periodical Reports all scientific publications dealing with Climate. In 1992 the Rio de Janeiro Conference instituted the UNFCCC (UN Framework Convention on Climate Change) an organization entrusted to coordinate all possible negotiations and initiatives concerning the mitigation of climate change, based on just partitions of responsibility.

The 1997 Kyoto, COP 3 (3rd Conference of the Organizing Parties) proposed to the 156 National Delegations a resolution (the "Kyoto Protocol") to reduce, within 2012, the CO₂ emissions.

From then on, periodical International Conferences followed, alternating by regional or organization meetings. In this paper a summary of the laborious and often disappointing ways to achieve a largely accepted consensus on the coordinated international actions to mitigate the consequences of the global warming (GW). After the partial failure of the 2009 Copenhagen Conference, the Cancun Conference has opened new hopeful perspectives for a global agreement.

1. Introduction

The Kyoto proposal was indeed accepted only by 57 Delegations, with the reserve of ratification by their own Governments. The Protocol would have been transformed in a Treatise if ratified by 55% of the 57 signatories Nations: this occurred in 2005 when Russia subscribed it. At this time a preliminarily step was defined of achieving an average reduction of 5.2% of Greenhouse Gases (GHG) emissions.

It has to be noted that the Kyoto Treatise admits implicitly the anthropogenic contribution to the Global Warming (GW) as due to the increase of the Greenhouse effect¹.

Some partial agreements were attempted before the 2009 COP 16 Conference in Copenhagen. The European Union proposed the upper limit of + 2 °C, within 2012, for the Earth average global temperature. At the same time the Bank of Compensation for the GHG emissions has been activated; it is based on CO₂ Exchange Options between Countries or Industries exceeding the emission shares and the so-called "low emitting" countries, reimbursed through economic aids. In

* Guido Barone – Department of Chemistry, University of Naples "Federico II" e-mail guido.barone@unina.it

** Elena Sassi –Department of Physical Sciences, University of Naples "Federico II" e-mail elena.sassi@na.infn.it

¹ As it is well known the Earth surface, and in particular the biosphere, act as a giant transducer of solar energy: 45% of it is absorbed mainly by the soil and vegetation and transformed in chemical products by means of the chlorophyll synthesis; animals, plants and micro organisms metabolic activity, through many transformations produce water vapour, carbon dioxide and finally heat as Infrared Radiation. This is trapped into the troposphere by both gases and by methane, nitrogen protoxyde (N₂O) and other natural or anthropogenic gaseous emissions (CFC, HFC, etc.).

2005 the Ad Hoc Working Group on further commitments for Parties under the Kyoto Protocol (AWG-KP) Conferences started: they gather the 37 signatories of the Kyoto Treatise plus USA, China, India, Australia and Canada. These Conferences triggered the AWG-LCA (Long-term Cooperation Action) amongst the previous 37, the group of 5 and other 50 Countries.

In 2007 IPCC published the 4th Report and the COP 14 Bali Conference attempted to build up a Road Map for the post Kyoto (2013 on) to be approved at the COP 16 in Copenhagen (2009).

At L'Aquila G8 meeting (August 8, 2008) the Leaders of the 8 Countries declared:

"Taking cognizance that the largely accepted opinion of the Scientific Community is that the mean global increase of temperature will not overcome +2°C beyond the pre-industrial levels, it needs to achieve a 50% reduction of global GHG within 2050 (reference base 1990 year emissions); the main industrial Countries will be encouraged to achieve the goal of minus 80% of GHG emissions".

2. Phenomena supporting the exceptional Global Warming occurred in 20th century.

The most relevant GW evidence can be summarised as:

1. Earth mean surface temperature has increased by 0.9 °C since the mid twentieth century to 2010 (Figs.1 and 2);
2. 2010, in particular, has been one of the warmest year of last decade (Table 1);
3. CO₂ concentration in atmosphere increased by 38%; the more accurate measures in the 1957 Geophysical International Year come from Keeling apparatus at Mauna Loa inactive volcano in Hawaii Island (Fig.3). Because of atmospheric global circulation these data can be assumed as representative of seasonal mean values in the Boreal hemisphere; the more recent data for the Austral hemisphere are qualitatively analogous but shifted of one season;
4. CH₄ concentration in the atmosphere has increased by 150 % from 1880 to 2010;
5. fusion of large areas of surface and submarine circum-arctic permafrost;
6. partial fusion of the arctic marine pack, with the summer opening of the mythic North West and North East Passages;
7. limited fusion of Antarctica and Greenland ice packs;
8. decreasing of Alps glaciers;
9. emission of bubble columns of methane from Siberian seas and Svalbard platform (due to methane hydrates crystal decomposition).

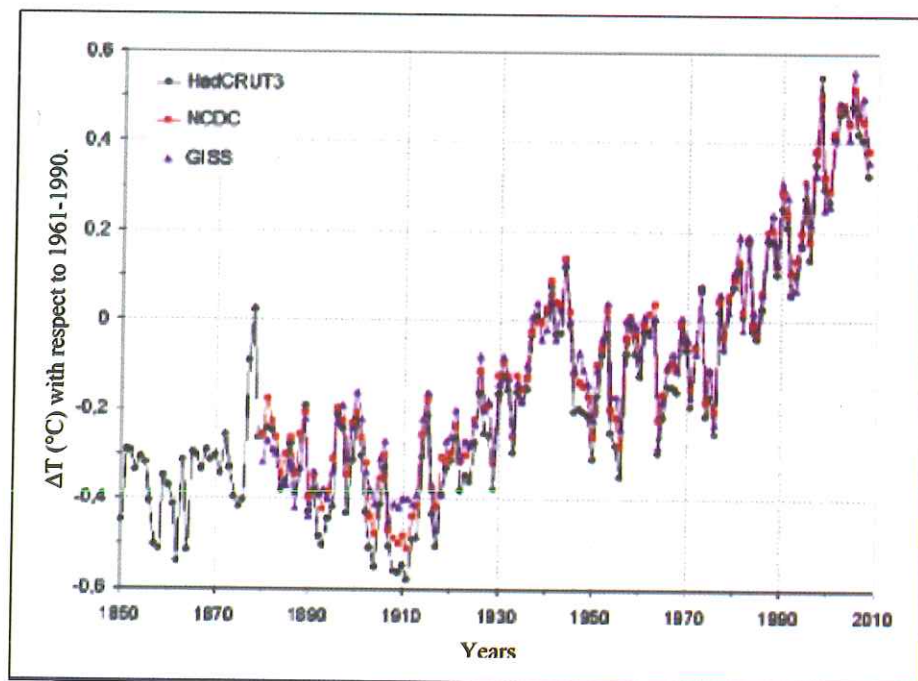


Figure 1 - Earth mean surface temperature as measured by: NASA Goddard Institute for Space Studies (GISS), University of East Anglia Climatic Research Unit (HadCRUT3), US National Climatic Data Centre (NCDC). Data from 1957 are averages on more than 5000 meteorological stations and marine buoys. Previous data are averages on progressively lower number of stations; the more ancient data have been corrected (if necessary) for changes in urbanization of station surroundings (urban heat islands) [1]

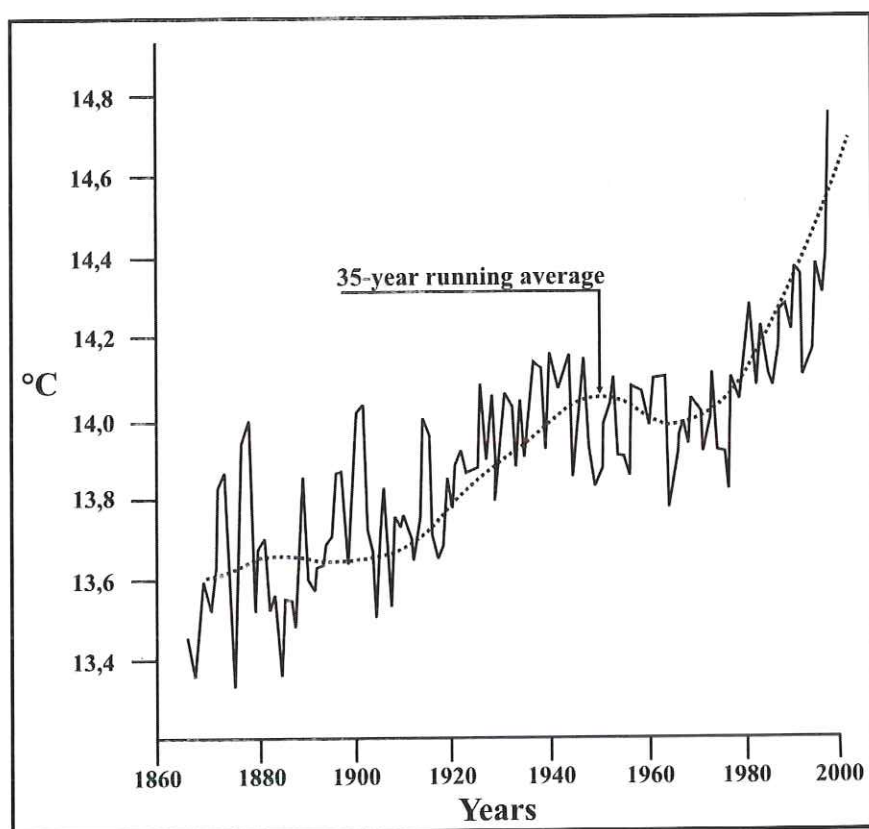


Figure 2 - Earth mean surface temperatures interpolated by the authors with a 35-years running averaging procedure (dotted line). The minima and maxima of the solid line reflect both, the cyclic change in the Sun activity (about undecadal) and some historical volcanic explosive eruptions: in particular are evident the deep minima of the 19th century last decades (Tambora and Krakatoa) and of 1980 (el Chichòn) and 1992 (Pinatubo): they ejected up to the stratosphere enormous quantities of ashes that reflected the Sun radiations. [2,3]

One of the warmest year of the last decade has been 2010. Table 1 shows the mean global Temperature values in (2001 – 2010) as reported by National Centres for Environmental Prediction's (NCEP) and National Center for Atmospheric Research (US NCEP/NCAR). These data indicate variations with respect to the reference time interval (1961-90) and are in substantial agreement with those of GISS and HadCRUT3, small differences being due to different algorithms used for evaluating the annual averages.

Anno	GISS	CRU	NCDC	NCEP/NCAR
2001	0,47	0,49	0,45	0,42
2002	0,56	0,54	0,50	0,52
2003	0,55	0,55	0,51	0,51
2004	0,48	0,53	0,47	0,42
2005	0,63	0,56	0,54	0,63
2006	0,55	0,51	0,49	0,56
2007	0,58	0,48	0,48	0,57
2008	0,44	0,42	0,41	0,44
2009	0,57	0,53	0,48	0,52
2010	-----	-----	-----	0,62

Table 1 - Differences of Earth annual mean temperatures ($^{\circ}\text{C}$) with respect to (1961-90) values

The first reflection on 2010 mean global temperature shows that, no matter of the Arctic air fluxes at beginning and end of the year, 2010 should be the second warmest year, with a small difference (0.01, within the uncertainty on the mean), with respect to the 2005. The greater contributions to the temperature increase come from the coldest areas (Arctic and Antarctica), according to recent previsions of climatic models. The temperatures at intermediate latitudes are coherent with the average values, if not slightly less. These facts do not help the media news in giving a complete phenomenological description. Once more, the data show how unrealistic are the hypotheses of those who claim that, after a cold arctic air irruption, a glacial era is nearby.

The increase in CO_2 and CH_4 atmospheric concentration in the years (1960 – 2010) is shown in Fig. 3 and 4

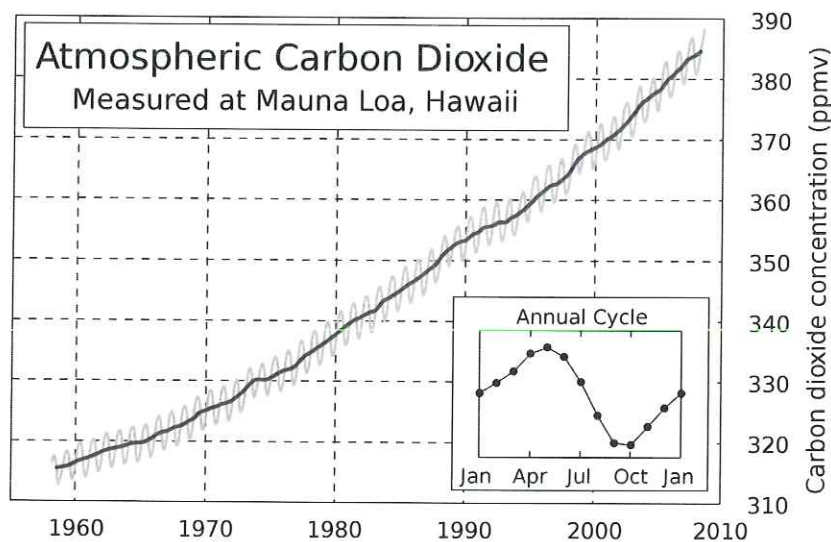


Figure 3 – Atmospheric concentration of CO_2 in the Boreal hemisphere according to Keeling: the insert shows the seasonal modulation [4]

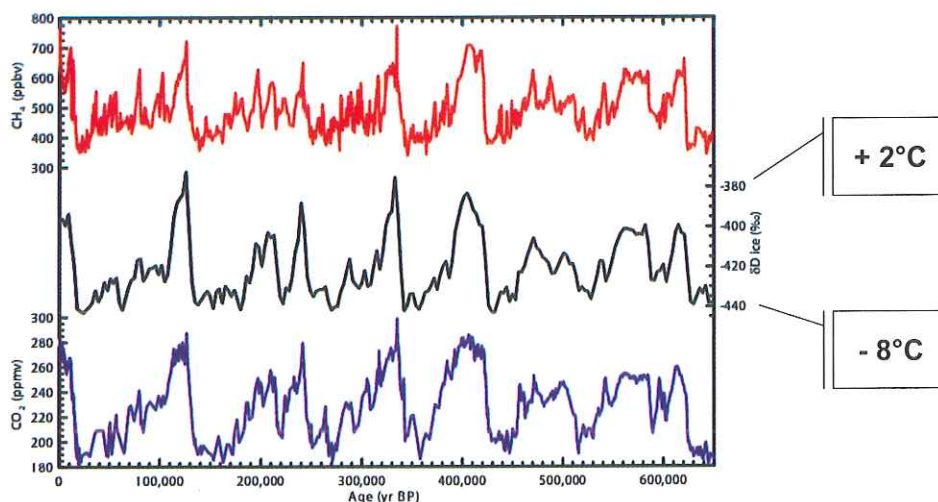


Figure 4 - Trends of CO₂ and CH₄ Atmospheric Concentration and Temperature in the last 650.000 years as obtained by the glacier deep drilling of Concordia French-Italian base at the Antarctica “Dome C”. The temperature values in the boxes explicit the analysis of the isotopic ratio deuterium/hydrogen of the ice as reported in the original figure [5].

As a global remark it has to be noted that in the last millions of years the Earth surface average temperature and the CO₂ and CH₄ concentrations in the atmosphere have never reached the last century values; this has been proved by the deep drilling of Antarctica [6] and Greenland glaciers [7]. The data in Fig. 4 are in good agreement with previous analyses of deep marine sediments [8]. These facts and the different time scales of Climate Change due to geological (millions of years) or astronomical² events (several hundreds thousands of years), when compared with the recent events, do reinforce the evident existence of the anthropogenic impact on both, the increased Greenhouse Effect and, consequently, the recent Global Warming.

² According to Milankovitch model, the periodical glaciations (about 110.000 years) starts as consequence of a combination of changes in the Earth elliptic orbit around the Sun, of changes in the Earth axis angle with the ecliptic plane and of its precession.

3. Proposals and partial failure of the 2009 Copenhagen Conference.

At the COP 16 Conference in Copenhagen (December 2009) really the main proposals have been:

- to limit the temperature increase induced by the Global Warming (GW) within $+2^{\circ}\text{C}$ (i.e. a mean temperature of Earth surface equal to 15.6°C)
- to limit within 450 part per million (ppm) the equivalent CO_2 concentration in atmosphere (due to combined action of Green-House Gases and particulate)
- do not overcome a peak in the emission of Green-House Gases
- from January 2010 on the 37 signatories of the Kyoto Protocol plus (USA, Australia, Canada, China, India) plus Brazil, South Africa, Indonesia, Mexico, South Korea are invited to declare their commitments, as well as 50 other Countries
- on the format of UN support, to plan a 30 billion US \$ within 2012 and 100 billion \$/year up to 2020

The Copenhagen Conference however has been a partial failure. China had asked a bilateral agreement on reducing GHG emissions to president B. Obama who, at that time, was having a strong opposition to his proposed health reform in USA. Separate talks have been held with China, India and Brazil. The Final Document resulted a compromise referring to the next Conference in Cancùn. The main consequences have been a postponement of the commitments for the moratorium and the resignation of the Secretary of UN Agency for Climate. The US Senate has later silted the law on climate. However a partial reconsideration of the Copenhagen proposals by US, China, India, Brazil and USA has occurred.

Before and after the Copenhagen Conference moreover hard accusations have been moved, by several powerful economic lobbies, to validity and accuracy of the work and results of some Research Groups and Institution that had been included in the IPCC 4th Report [9]. However all the Inquiring Commissions have considered out of blame all these Groups and Institutions, confirming the validity and reliability of the work accomplished in the field.

4. The way to 2010 Cancùn Conference

The 2010 Conference in Cancùn (November December 2010) has been prepared by preliminary meetings in Bonn and Berlin (August 2010), in Tianjin (Beijing) (October 2010) (the 6th since 2005). There has been a strong contrast between USA and China on the release of 30 billion \$ fund. Moreover USA were in favour of voluntary reductions of greenhouse gases emissions, while China and the 50 countries wanted binding and “weighted” agreements. EU and the 37 Kyoto signatories were in stand-by. All decisions have been postponed to the Cancùn 2010 Conference (COP 16) and the 2011 Conference in Durban, including long-term agreements on the 100 billion \$/year fund until 2020 and the technology transfer to the so called 50 developing countries [10]. **The Road Map has been however defined; never, in the history of diplomatic negotiations, had been conceived a so complex negotiation, not linked only to economic and military aspects.** The complexity of such negotiations justifies the related expenditure.

5. The COP 16 Cancùn Conference

The first goal of the Cancùn Conference has been to rebuild confidence in negotiating and in hope to persuade governments to commit themselves. Delegations of 194 countries and representative of numerous environmental groups and local populations have attended the Conference. The president Patricia Espinosa from Mexico has coordinated 14 days of work, by all Parties, and the General Assembly; she has summoned several times the Assembly, in presence of several Heads of State [11].

5.1 Main results

In Cancun the General Assembly of the COP (apart Bolivia) has approved all proposals submitted by the Parties, presented by Christina Figueras, UNFCCC Executive Secretary.

The long months of preparatory work has played a fundamental role in producing a remarkable set of balanced and transparent resolutions, the merit has to be acknowledged mainly to Margaret Mukahanana-Sangarwe, President of the AGW-LCA and to the already cited Espinosa and Figueras for the conduct of the COP meetings. These three women were representatives of so-called developing countries.

Amongst the main results: the confirmation of the Kyoto commitments and the definition of a Road Map for the post-2012 period. Cuts in Green House Gases emissions are foreseen for an amount of 25% and 40% in 2012 - 2050. EU and the 50 developing countries have been in favour; Japan, Russia, Canada, Australia and New Zealand have requested stronger commitment by the major emitters; Brazil, China, India and South Africa have postponed the decision at the Durban COP 17 Conference (December 2011), after preliminary negotiations. A fund of 30 billion \$ has been decided for now, together with another one of 100 Billion \$ in 2012, to help the poorest countries in adapting to the GW consequences [9]. The goal is to extend this help up to 2020. However it is not clear who will provide this money.

Moreover the following three resolutions have value of commitment:

- establishment of the Green Climate Fund; its Permanent Committee (15 industrialized countries and 25 developing countries) will collaborate with the World Bank for the Fund management; the Committee will have an Executive Technology Committee and a Climate Technological Centre and Network to select low-emission technology and to help the poorest countries in developing initiatives to adapt and implement new environmentally friendly technologies;
- approval of the REDD Plan (Reduction of Deforestation and forest Degradation) whose objective is to mitigate the consequences of deforestation and of forest degradation;
- immediate UNFCCC negotiations in order to have, for the Durban Conference (December 2011), the first 30 billion \$ fund ready and assigned as well as defined commitments for the post-Kyoto (2013 on).

Another four resolutions concern:

- the involvement of private sectors interested to invest in reducing GHG emissions and in the Carbon Market;
- the theme of emergency specific measures related to severe and sudden events, strongly backed by the Party AOSIS (Alliance of Small Island States);
- **Global Warming recognised as a process unequivocally due to human actions both, for extreme and gradual events³;**
- IPCC whose work has been appreciated, beyond all polemic positions that deny the GW, and supported to prepare, as expected, the Fifth Report in 2013.

³ An affirmation repeated in several Decisions states: "The Conference of the Parties recognizes that the warming of the climate system is unequivocal and the most of the observed increase in global average temperature since the mid twentieth century is very likely due the observed increase in the anthropogenic greenhouse gas concentration, as assessed by the Intergovernmental Panel on Climate Change in its Fourth Assessment Report."

Important progress indeed has been made in Cancun. A resolution adopted by 193 delegations (only Bolivia has voted NO) has **decided to proceed from now on without unanimity**, after deep mediations amongst all the views expressed. This decision has been accepted also by the representatives of the Great Powers; so it will be possible to proceed, at least in principle, without being immobilised by veto. Any delegation will have duty and responsibility to negotiate without blocking all other countries. From now on, the objective will be “moving forward” and not “reaching consensus”; this is also the basis for the rules of future governance [9].

6. What to do in the meantime?

The Road Map for the future, decided in Cancun, is encouraging; the hope being that the resolutions to be approved at 2011 COP 17 in Durban will effectively produce a reduction of the GW, even if procedural decisions at world level are intrinsically very complex.

In the meantime a common question, when discussing on GW and the problems encountered in finding solutions valid for the whole world is: **What to do?**

The Cancun Conference has indicated some appropriate key actions. Most of them are valid from several viewpoints (country, community, individuals). These actions origin from reflecting on the main consequences of Climate Change, whatever the cause, on ecosystems, human systems and their interactions. The most important consequences can be summarised as:

- precipitation distribution will change as well as extreme events;
- droughts and floods will occur more frequently;
- ocean levels will rise because of thermal expansion of seawater; it will affect principally the countries where the larger part of the population currently lives on coastal sites subject to sea invasion;
- ecosystems and human systems will be destabilized in terms of food supply, health and drinking water resources,
- crucial environmental issues will be much impacted: water quality and salt content, desertification, biodiversity, forestation, etc; these will cause migration and conflicts;
- limit the massive production of bio-fuels because of their negative impact on food production and cost [9].

The actions briefly indicated below are aimed at reducing and mitigating the increase of the Earth average temperature due to anthropogenic GHG emissions according to the more acknowledged scientific convincement. The most important are:

- cuts in using fossil fuels to produce energy for electricity, transportation, heating/cooling;
- supports in developing and using renewable energy (wind, photovoltaic on roofs and building façades, thermal solar, tidal, geothermal, hydroelectric, etc.),
- investments in the so-called thermodynamic solar (e.g. as operated in Spain and Germany).
- Development of serious plans for a solar production of electricity in the Sahara desert and its distribution in several countries. About that issue, Italy cannot accept to be excluded from the international cornering of materials, and from the research fields, that at present are developed in Europe mainly by Spain and Germany (solar towers) and by France (intelligent distribution grids).

7. Conclusions

In conclusion, the first move is to save energy and fight its waste; this is triplet goal at global, regional and individual level⁴. The second is a strong support to develop and use of renewable energy, combined with a drastic reduction in electricity produced by burning fossil fuels. is a concrete alternative that can fight effectively the GW and on top create high number of jobs. Undoubtedly, even if it will be immediately stopped the combustions (a practically impossible scenario for technical and economical reasons), the CO₂ concentrations in atmosphere have an “average” life-time⁵ and consequentially the above impact will continue to exist long after. This fact urges to achieve as soon as possible an international oratory on the use of fossil fuels.

References

- [1] Earth Observatory of NASA, 2010, October 5.
- [2] Barone G., Fessas D., Graziano G., 1993, “A Phenomenological Study on the Combined Effect of Increasing Concentrations of Greenhouse Gases on the Global Warming”, in *Trends in Ecological Physical Chemistry*, (L. Bonati et al. Eds.), Elsevier 127 – 145.
- [3] Barone G., September 2009, “I fattori che regolano il clima seguono differenti scale temporali”, *Chim.&Ind.* 96 – 103.
- [4] Tans P., 2009 “Trends in Carbon Dioxide”, NOAA/ESRL, <http://www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/>
- [5] Siegenthaler U. et al., 2005, “Stable Carbon Cycle–Climate Relationship during the Late Pleistocene”, *Science*, 310, 1313 – 1317.
- [6] Petit J.R., Jouzel J., Raynaud D., Barkov N., Barnola J.M., Basile I., Bender M., Chapellaz J., Davis J., Delaygue G., Delmotte M., Kotlyakov V., Legrand M., Lipenkov V.Y., Lorius C., Pepin L., Ritz C., Saltzman C., Stievenard M., 1999, “Climate and atmospheric history of the past 420000 years from the Vostok ice core, Antarctica”, *Nature*, 399, 429 – 436.
- [7] “The North Greenland Ice-Core Project”, 2003, the BBC News, July 23, <http://news.bbc.co.uk/2/hi/science/nature/3090279.stm>.
- [8] Emiliani C., 1992, Planet Earth, Cambridge Univ. Press.
- [9] “Climate Change 2007. The Fourth Assessment Report of the IPCC”, Cambridge Univ. Press on-line 2007.
- [10] Advanced version of the Draft Decision at Cancùn Conference (COP 16): “Outcome of the work of Ad Hoc Working Group on long-term Cooperative Action under the Convention”, 2010, 1 – 30, and the Annexes.
- [11] Piana V., Lombroso L., Castellari S., Caserini S., Gabrielli P., 2010 “Il passo avanti di Cancùn”, <http://www.climalteranti.it/2010/12/17/>.

⁴ Estimations of reasonable saving in the already existing buildings in Italy (lighting, heating/cooling, insulation, ...) give values of about 25% (within 2030) and 50% for new buildings.

⁵ The atmospheric lifetime characterises the decay of an instantaneous pulse input and quantifies the time interval needed to have that pulse decay to $1/e = 0.368$ of its original value in the hypothesis that the gas decays according to an exponential decrease, which is seldom the case. In the case of CO₂ an accepted lifetime, affected by several removal processes and depending on complex models, range around 100 years.

Base Changes of $\mathbf{B}(1)$ -Butler groups: a $\mathbb{Z}_2$ -linear and graph theory approach

Nota di Nicolò Messina¹

Presentata dal Socio Francesco de Giovanni
(Adunanza del 6 maggio 2011)

Keywords — Butler group, $\mathbf{B}(1)$ -groups, type, tent, base change, finite vector space on $\mathbb{Z}_2$, 2-connected graphs.

Abstract — Through a contravariant functor we traduce some questions of base changes of Butler $\mathbf{B}(1)$ -groups from spaces of bipartitions on a finite set I to the space of subsets of even order of I . Then, base changes of indecomposable Butler $\mathbf{B}(1)$ -groups are characterized in terms of 2-connected graphs.

Riassunto — Attraverso un funtore controvariante alcuni problemi sui cambi base dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi di Butler vengono ricondotti dallo spazio delle bipartizioni su un insieme finito I allo spazio dei sottoinsiemi di ordine pari di I . Quindi, i cambi base dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi di Butler indecomponibili vengono caratterizzati in termini di grafi 2-connessi.

1 Introduction

In this paper: group = torsion free Abelian group of finite rank.

A Butler $\mathbf{B}(1)$ -group G of finite rank $m-1$ is the sum of m pure rank one subgroups, $G = \langle g_1 \rangle_* + \cdots + \langle g_m \rangle_*$, subject to the relation $g_1 + \cdots + g_m = 0$. For each $i \in I = \{1, \dots, m\}$, let $t_i = t_G(g_i)$ be the type in G of the pure subgroup $\langle g_i \rangle_*$; then $(g_1, \dots, g_m)$ is called a base for G and $(t_1, \dots, t_m)$ a type-base for G .

In this subject, the usual basic equivalence is quasi-isomorphism (=isomorphism up to finite index ([F II])). But [FM] and subsequent studies (see references) have shown that many structure properties of $\mathbf{B}(1)$ -groups

¹Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”, Università degli Studi di Napoli “Federico II”, Complesso Monte S. Angelo, via Cintia - 80126 Napoli, Italy; e-mail: nicolo.messina@unina.it

depend only on certain properties of the inclusion of the typeset as sub- $\wedge$ -semilattice in the lattice of types.

The essential properties of this inclusion can be studied starting from a type-base, obtaining a representation in terms of a $\{0, 1\}$ -table called tent (see [DVM1]÷[DVM5], [DVM7] and the brief summary in Section 2). Important properties, such as indecomposability, depend only on the tent.

On the other hand, from a tent, one can build (see [DVM4]) infinitely many examples of groups which share, together with the tent, the properties that follow from it, although they are not isomorphic (nor quasi-isomorphic). This offers the opportunity to study important properties for a much broader equivalence than quasi-isomorphism, called isoscenism (see [DVM3]).

Different type-bases of the same group yield different tents; more generally, given two tents, the question arises of whether the class of isoscenism is the same, i.e. whether every group that admits the first tent from a base, admits the second from a different base.

Thus the notion of *base-change* arises, which may be studied without referring to a single group of the isoscenism class, but rather, more generally, as a common property of all groups of the class, and ultimately of the tent itself. (This justifies the term *base-change of the tent*).

Base changes of a tent (and thus of each group having such a tent) have a natural representation by invertible $\mathbb{Q}$ -matrices acting linearly on the vector space $G \otimes \mathbb{Q}$. However, a result in [GM] ensures that there is no loss of generality in confining the study to invertible $\mathbb{Z}_2$ -matrices acting linearly over the vector space $\mathbb{B}(I)$ of bipartitions on a finite set I (see [DVM3], [DVM5], [DVM7]).

The study of the action of automorphisms of $\mathbb{B}(I)$ is made difficult by the need to use both a quotient structure and operations on a lattice. In this paper, we show that a contravariant functor (Sections 3 and 7) allows to avoid both obstacles, while working in a purely $\mathbb{Z}_2$ -linear context, the space $\mathcal{P}^*(I)$ of even order subsets of I and its automorphisms.

Moreover, in this space there arises a natural interpretation of 2-element subsets in terms of edges of a graph (Section 5), giving the opportunity to associate a graph to each automorphism (Section 6), and studying with ease those automorphisms which have a rich enough graph (i.e. connected). This class is wide enough to contain all automorphisms of indecomposable $\mathbf{B}(1)$ -groups, which are characterized as the automorphisms of $\mathcal{P}^*(I)$ having a 2-connected graph (Theorem 2).

The structure of base-changes of indecomposable $\mathbf{B}(1)$ -group turns out to be severely restricted by Theorem 2, and deciding whether a matrix yields a base-change for indecomposable $\mathbf{B}(1)$ -groups (which used to be made dif-

ficult by the preliminary and complex calculation of the domain of the automorphism (see [DVM3]) is now trivial. Some propositions about the domain of an automorphism (Corollary 1) and applications to $\mathbf{B}(1)$ -groups (Theorem 3) conclude the paper.

2 Notation and basic settings

We will keep basic notation and tools introduced in [DVM2]÷[DVM5] and [DVM7]. For graph theory we refer to [D].

In particular $\mathbb{T}(\wedge, \vee)$ is the lattice of all types, with the added maximum ∞ denoting the type of the 0 group.

Let $I = \{1, \dots, m\}$ be a finite set. When needed, we will use for a subset $E \subseteq I$ the notation $I \setminus E = E^{-1}$. $\mathbb{P}(I)(\wedge, \vee)$ is the lattice of partitions of I . For $\emptyset \subseteq E \subseteq I$, $i \in I$, set:

$b_E (= b_{E^{-1}}) = \{E, E^{-1}\}$ the bipartition on E ;

$p_E = \{E^{-1}, \{i\} | i \in E\}$ the pointed partition on E ;

$p_i = p_{\{i\}} = b_{\{i\}}$ the pointed bipartition on $\{i\}$.

The maximum partition $\{I, \emptyset\} (= b_I = b_\emptyset = p_\emptyset)$ will also be called 0 (and considered as an improper bipartition); this because b_I is the 0 vector of the $\mathbb{Z}_2$ -vector space $\mathbb{B}(I)$ of bipartitions on I , identified with the quotient space $\mathcal{P}(I)/\langle I \rangle$ of the $\mathbb{Z}_2$ -vector space on the Boolean algebra $\mathcal{P}(I)$ of subsets of I ; thus with $b_E, b_F \in \mathbb{B}(I)$ we have:

$$b_E + b_F = b_{E+F} = \{(E \cap F) \cup (E^{-1} \cap F^{-1}), (E \cap F^{-1}) \cup (E^{-1} \cap F)\}.$$

The $\mathbb{Z}_2$ -dimension of $\mathbb{B}(I)$ is $m - 1 (= |I| - 1)$ and any $m - 1$ distinct pointed bipartitions yeld a base; then the m -tuple $\mathcal{I} = (p_1, \dots, p_m)$ is a *redundant base* of $\mathbb{B}(I)$, that is $\mathcal{I}$ is minimal dependent and $\sum_{i \in I} p_i = 0$. If $\mathcal{E}$ is an automorphism of $\mathbb{B}(I)$, we will often denote by $\mathcal{E}$ a $\mathbb{Z}_2$ -admissible m -tuple $(b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$, that is we will write $\mathcal{E}$ with respect to the redundant base $\mathcal{I} = (p_1, \dots, p_m)$, i.e. $b_{E_i} = \mathcal{E}(p_i)$ for $i \in I$.

If $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$ is a $\mathbf{B}(1)$ -group with type-base $(t_1, \dots, t_m)$ and $g \in G$, any expression of $g = \sum_{i \in I} \beta_i g_i$ as a linear combination of the base elements g_i will be called a representative of g ; its support $\{i \in I | \beta_i \neq 0\}$ is a support of g and its complement in I is called a zero-block of g . If $g \in G$, $t_G(g)$ denotes the type in G of the pure subgroup $\langle g \rangle_*$; typeset(G) = $\mathbb{T}(G) = \{t_G(g) | g \in G\}$ is a finite sub- $\wedge$ -semilattice of $\mathbb{T}$, hence (having ∞ as a maximum) a lattice.

If $g = \sum_{i \in I} \beta_i g_i \in G$, the *zero-blocks* of g are the blocks of the partition of I

$$\text{part}_G(g) = \{C_1, \dots, C_k\}$$

into “equal coefficient blocks”, that is indices i', i'' are in the same block C_r ($r = 1, \dots, k$) if and only if $\beta_{i'} = \beta_{i''}$. Setting for $E \subseteq I$

$$\tau(E) = \bigwedge_{i \in E} t_i$$

and

$$t_E = t(b_E) = \tau(E) \vee \tau(E^{-1}),$$

we have

$$t_G(g) = t(\text{part}_G(g)) = \tau(C_1^{-1}) \vee \dots \vee \tau(C_k^{-1}) = t_{C_1} \wedge \dots \wedge t_{C_k}.$$

In particular, setting

$$g_E = \sum_{i \in E} g_i,$$

we have $t_E = t_G(g_E)$.

Note that, because of the relation $g_1 + \dots + g_m = 0$, the type-base $(t_1, \dots, t_m)$ is a *regular* m -tuple, that is

$$\bigwedge_{j \neq i} t_j = \bigwedge_{j \in I} t_j, \quad \text{for each } i \in I.$$

If $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ is a partition of I , setting $\sigma = t(\mathcal{C}) (= \tau(C_1^{-1}) \vee \dots \vee \tau(C_k^{-1}))$, the pure subgroup of G

$$G(\mathcal{C}) = \{g \in G \mid \text{part}_G(g) \geq \mathcal{C}\}$$

coincides with the fully invariant subgroup of G

$$G(\sigma) = \{g \in G \mid t_G(g) \geq \sigma\};$$

moreover $G(\sigma)$ is the $\mathbf{B}(1)$ -group of rank $k - 1$

$$G(\mathcal{C}) = \langle g_{C_1} \rangle_* + \dots + \langle g_{C_k} \rangle_*, \quad g_{C_1} + \dots + g_{C_k} = 0$$

(cfr. [DVM4], Lemma 2). In particular, setting for $E \subseteq I$

$$G_E = \langle g_i \mid i \in E \rangle_*,$$

we have

$$G_E = G(p_E) = \left(+_{i \in E} \langle g_i \rangle_* \right) + \langle g_{E^{-1}} \rangle_*.$$

If σ is a type, $\text{part}_t(\sigma)$ is the minimum partition $\mathcal{C}$ of I for which $\sigma \leq t(\mathcal{C})$, thus $G(\sigma) = G(\text{part}_t(\sigma))$. Note that if $\sigma \neq \infty$, then $\text{part}_t(\sigma) = 0$ (the maximum of $\mathbb{P}(I)$) if and only if $\sigma \notin \text{typeset}(G)$, that is $G(\sigma) = \{0\}$.

As in the [DVM]s, we express the base types of a $\mathbf{B}(1)$ -group G as products of “primes”, marking the $\vee$ -irreducible types of G ; we form thus a table called “tent” (cfr. [DVM2], [DVM4]). By including $\text{typeset}(G)$ as a sub- $\wedge$ -semilattice in $(\mathbb{N}, \text{g.c.d.}, \text{l.c.m.})$ we view each type as product of primes; in particular, we say the prime p divides the type σ , but also $p \leq \sigma$; and if $\sigma = t_G(g)$ we say p is a *prime* of g , or p divides g . Expressing the base types of G as product of primes we obtain a *tent* where each prime p , viewed as a column in the tent, has a *support* $\text{supp}(p)$ and a *zero-block* $Z(p)$. Thus a tent is a $\{0, 1\}$ -table, whose columns represent the characteristic functions of a set of subsets of $I = \{1, \dots, m\}$ (“prime sets”), different from $I \setminus \{i\}$ for each $i \in I$, by regularity.

$PS(t)$ denotes the set of primes of the tent t . If $Z(p) = \emptyset$ (resp. $Z(p) = I$), p is the full (resp. empty) prime, and will in general be omitted.

Many topics in $\mathbf{B}(1)$ -groups (direct decompositions, base changes) depend only from their tents (cfr. [DVM1]÷[DVM7]).

Here we recall some known results, which will be useful in the sequel.

Proposition 1 ([DVM4], Lemma 6). *Let $\sigma \in \text{typeset}(G)$. Then σ is $\vee$ -irreducible if and only if $\text{part}_t(\sigma)$ is a pointed partition p_A on a prime set A .*

Proposition 2 ([DVM4], Proposition 7). *Let $\sigma = t(\mathcal{C}) \in \text{typeset}(G)$. Then*

$$\text{part}_t(\sigma) = \vee \{p_A \leq \mathcal{C} \mid A \in PS(t)\}$$

In particular, $\text{part}_t(t_i) = \vee \{p_A \mid A \in PS(t), i \in A\}$.

Proposition 3 ([FM] Theorem 3.3). *G is indecomposable if and only if $\text{part}_t(t_i) = p_i$ for each $i \in I$.*

Let $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$, with $g_I = 0$ and type-base $(t_1, \dots, t_m)$, and $G = \langle h_1 \rangle_* + \dots + \langle h_m \rangle_*$, with $h_I = 0$ and type-base $(u_1, \dots, u_m)$; thus we have a *base change* for G ; in [DVM5] it has been shown that there exists an $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m}) \in \text{Aut } \mathbb{B}(I)$ such that

$$t_G(h_i) = t_{E_i}, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

and, if $\mathcal{E}^{-1} = (b_{F_1}, \dots, b_{F_m})$, then

$$t_G(g_i) = u_{F_i}, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

As an example, let $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_4 \rangle_*$ and $H = \langle h_1 \rangle_* + \dots + \langle h_4 \rangle_*$ with type-bases

$$\begin{aligned} t_G(g_1) &= (\infty, \infty, 0, 0, 0, 0, \dots) \\ t_G(g_2) &= (0, \infty, \infty, 0, 0, 0, \dots) \\ t_G(g_3) &= (0, 0, \infty, \infty, 0, 0, \dots) \\ t_G(g_4) &= (\infty, 0, 0, \infty, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} t_H(h_1) &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots) \\ t_H(h_2) &= (0, 1, 2, 1, 1, 2, 0, 1, 2, 1, 2, \dots) \\ t_H(h_3) &= (0, 2, 2, 0, 2, 2, 0, 2, 2, 0, 2, \dots) \\ t_H(h_4) &= (1, 2, 1, 0, 2, 1, 1, 2, 1, 0, 2, \dots) \end{aligned}$$

Then G and H , given by these generators, share the following tent. Here, as in [DVM16], the primes of a tent will be indexed by their zero-blocks, which are marked by holes.

$$\begin{array}{cccccc} t_1 = & p_{23} & p_{34} & \bullet & \bullet & \\ t_2 = & \bullet & p_{34} & p_{14} & \bullet & \\ t_3 = & \bullet & \bullet & p_{14} & p_{12} & \\ t_4 = & p_{23} & \bullet & \bullet & p_{12} & \end{array}$$

Applying the algorithm described in [DVM4], “Pulling the strings” (based on Proposition 3), it’s easy to see that all groups which have this tent are indecomposable. Indeed, G and H are such.

The tent (and, thus, both groups) admits $\mathcal{E} = (b_{12}, p_2, b_{14}, p_4)$ as base-change, which transforms the previous tent in the following

$$\begin{array}{cccccc} t'_1 = & \bullet & q_{34} & \bullet & q_{23} & = t_{12} \\ t'_2 = & \bullet & q_{34} & q_{14} & \bullet & = t_2 \\ t'_3 = & q_{12} & \bullet & q_{14} & \bullet & = t_{14} \\ t'_4 = & q_{12} & \bullet & \bullet & q_{23} & = t_4 \end{array}$$

and the primes p_{23} in q_{12} , p_{34} in q_{34} , p_{14} in q_{14} and p_{12} in q_{23} . On this tent, obviously, the cited algorithm ([DVM4]) gives the same result of indecomposability (of all groups which have this tent).

The notion of *Domain* of an automorphism $\mathcal{E}$ of $\mathbb{B}(I)$ arises from the question on whether $\mathcal{E}$ performs a base change for a group G with a given tent t .

Definition 1 ([DVM5] Definition 7.4). For $A \subseteq I$, let $\mathcal{E}(A) = \{j \in I \mid b_{E_j} \geq p_A\}$; then the Domain $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ of $\mathcal{E}$ is the tent whose columns (or primes) are the subsets A of I such that $|\mathcal{E}(A)| = |A|$.

Then $\mathcal{E}$ performs a base change for a $\mathbf{B}(1)$ -group G with a given tent t if and only if the tent t is obtained from $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ by cancelling primes. For example, it is easy to find all the columns of the first tent among the columns of the following Domain tent of its base-change $\mathcal{E} = (b_{12}, p_2, b_{14}, p_4)$:

$$\begin{array}{cccccccc} t_1 = & \bullet & p_{34} & \bullet & p_{23} & \bullet & \bullet & \bullet \\ t_2 = & \bullet & p_{34} & p_{14} & \bullet & p_{13} & \bullet & p_{134} \\ t_3 = & p_{12} & \bullet & p_{14} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ t_4 = & p_{12} & \bullet & \bullet & p_{23} & p_{13} & p_{123} & \bullet \end{array}$$

Observe that, while there is an easy way to compute $\text{part}_t(\sigma)$ directly from the tent ([DVM4], Pulling the strings), Proposition 3 does not provide an easy way to establish whether $\mathcal{E}$ is a base change for indecomposable $\mathbf{B}(1)$ -groups, because the algorithm that builds the tent $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ requires quite complex computations (see [DVM3]).

As said in the introduction, our aim is to approach the study of tents through purely $\mathbb{Z}_2$ -linear tools, with the aid of an interpretation in terms of graphs. We will work in the $\mathbb{Z}_2$ -vector space of the subsets of even order of I , which we will denote by $\mathcal{P}^*(I)$; it is a hyperplane of the $\mathbb{Z}_2$ -vector space $\mathcal{P}(I)$ of the subsets of I , hence $\dim_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{P}^*(I) = m - 1 (= |I| - 1)$. By $\mathcal{P}_2(I)$ we will denote the set of all 2-element subsets of I , which obviously generates $\mathcal{P}^*(I)$.

3 A contravariant functor

Let I, J be sets of order resp. m and n . Let $\mathcal{E}$ be a homomorphism of $\mathbb{B}(I)$ in $\mathbb{B}(J)$, thus $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$, with $b_{E_i} = \mathcal{E}(p_i)$ a bipartition on J , for each $i \in I$.

We define a homomorphism $S_{\mathcal{E}}$ of $\mathcal{P}^*(J)$ into $\mathcal{P}^*(I)$ by

$$S_{\mathcal{E}}(A) := \{i \in I \mid A \cap E_i \text{ has odd order}\} \quad \text{for each } A \in \mathcal{P}^*(J)$$

Obviously, the definition is independent from the choice of the representative E_i or E_i^{-1} of a bipartition b_{E_i} .

$S_{\mathcal{E}}$ is a homomorphism, by the following proposition:

Proposition 4. *Let $A, B, E, E_1, \dots, E_r \in \mathcal{P}(J)$; then*

i) $E \cap (A + B)$ has odd order if and only if one and only one among $E \cap A$ and $E \cap B$ has odd order

ii) $A \cap (E_1 + \dots + E_r)$ has odd order if and only if $\{j | j = 1, \dots, r, |A \cap E_j| \text{ is odd}\}$ has itself odd order

Let $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ be a homomorphism of $\mathbb{B}(I)$ into $\mathbb{B}(J)$, then

iii) if $A, B \in \mathcal{P}^*(J)$ and $i \in I$, then $i \in S_{\mathcal{E}}(A + B)$ if and only if $i \in S_{\mathcal{E}}(A) + S_{\mathcal{E}}(B)$

iv) if $A \in \mathcal{P}^*(J)$, then $S_{\mathcal{E}}(A) \in \mathcal{P}^*(I)$.

Proof. i) This follows immediately from $E \cap (A + B) = [E \cap (A \cap B^{-1})] \cup [E \cap (B \cap A^{-1})]$, according to whether $|E \cap (A \cap B)|$ is even or odd.

ii) If $r \leq 2$ see i. For $r \geq 3$ an obvious inductive argument yields the statement.

iii) it follows easily from i).

iv) $E_1 + \dots + E_m \in \{\emptyset, J\}$, and since obviously $A \cap J = A \cap \emptyset$ is of even order, we have that $S_{\mathcal{E}}(A)$ is in $\mathcal{P}^*(I)$, by ii). $\square$

We define a contravariant functor from the concrete category of the $\mathbb{B}(I)$ s to the category of the $\mathcal{P}^*(I)$ s, by associating, for each finite set I , to the object $\mathbb{B}(I)$ obviously $\mathcal{P}^*(I)$, and to each morphism $\mathcal{E} : \mathbb{B}(I) \rightarrow \mathbb{B}(J)$ the morphism $S_{\mathcal{E}} : \mathcal{P}^*(J) \rightarrow \mathcal{P}^*(I)$. We will check functorial properties.

If $\mathcal{E} = 1_{\mathbb{B}(I)}$, then $\mathcal{E} = (p_1, \dots, p_m)$ and $S_{\mathcal{E}}(A) = \{i \in I | A \cap \{i\} \text{ has odd order}\}$, thus $S_{\mathcal{E}}(A) = A$ for each $A \in \mathcal{P}^*(I)$, and $S_{\mathcal{E}} = 1_{\mathcal{P}^*(I)}$.

Let now $\mathbb{B}(I) \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathbb{B}(J) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbb{B}(L)$, with $|I| = m$, $|J| = n$, $|L| = r$ and representations of $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ as an m -tuple of bipartitions on J , $\mathcal{F} = (b_{F_1}, \dots, b_{F_n})$ as an n -tuple of bipartitions on L .

Since $\mathcal{F} \circ \mathcal{E}$ is an homomorphism of $\mathbb{B}(I)$ into $\mathbb{B}(L)$, denote by $(b_{H_1}, \dots, b_{H_m})$ its representation as an m -tuple of bipartition on L . Thus, for each $i \in I$, we have by definition

$$b_{H_i} = (\mathcal{F} \circ \mathcal{E})(p_i) = \mathcal{F}(b_{E_i}) = \mathcal{F} \left(\sum_{j \in E_i} p_j \right) = \sum_{j \in E_i} b_{F_j}$$

and, with respect to the representative sets of the bipartitions,

$$\sum_{j \in E_i} F_j \in \{H_i, H_i^{-1}\}$$

For each $A \in \mathcal{P}^*(L)$ and $i \in I$, we have $i \in S_{\mathcal{F} \circ \mathcal{E}}(A)$ if and only if $A \cap \sum_{j \in E_i} F_j$ is of odd order, thus (by Proposition 4, iii.) if and only if the order of the set

$$\{j \in E_i | A \cap F_j \text{ has odd order}\} = E_i \cap \{j \in J | A \cap F_j \text{ has odd order}\}.$$

is odd.

Consider now

$$(S_{\mathcal{E}} \circ S_{\mathcal{F}})(A) = S_{\mathcal{E}}(S_{\mathcal{F}}(A)) = S_{\mathcal{E}}(\{j \in J | A \cap F_j \text{ has odd order}\}).$$

For each $i \in I$, by definition $i \in S_{\mathcal{E}}(S_{\mathcal{F}}(A))$ if and only if the order of the set $E_i \cap \{j \in J | A \cap F_j \text{ has odd order}\}$ is odd. It is now clear that $S_{\mathcal{E}} \circ S_{\mathcal{F}}(A) = S_{\mathcal{F} \circ \mathcal{E}}(A)$.

By the functorial properties, if $\mathcal{E}$ is an automorphism of $\mathbb{B}(I)$, then $S_{\mathcal{E}}$ is an automorphism of $\mathcal{P}^*(I)$. In the following, if not stated otherwise, $\mathcal{E}$ will denote an automorphism. We will describe the inverse functor $S \rightarrow \mathcal{E}_S$ in Section 7.

4 Examples and tables

Let $|I| = m$. As observed above, $\mathcal{P}_2(I)$ generates $\mathcal{P}^*(I)$, thus we can describe the action of a homomorphism $S_{\mathcal{E}} : \mathcal{P}^*(I) \rightarrow \mathcal{P}^*(J)$ representing $S(\{h, k\})$, for each $h \neq k \in I$, on a symmetrix $m \times m$ matrix (or table), and assigning the diagonal entries equal to $\emptyset$.

Let us illustrate the action of the functor and the use of the table representation by examples.

Example 1. Let $I = J = \{1, \dots, 5\}$, $\mathcal{E} = (p_1, b_{12}, b_{13}, b_{24}, b_{25})$, thus $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{1, 2\}$, ... Then, by definition, $S(\{h, k\})$ is the set of $j \in I$ such that the bipartition b_{E_j} separates h from k (for example, $h \in E_j$ and $k \in E_j^{-1}$). The table of $S_{\mathcal{E}}$ is the following 5×5 symmetrix matrix (for brevity we show only the upper triangle and omit the diagonal empty entries)

	1	2	3	4	5
1		1,3,4,5	1,2	1,2,3,4	1,2,3,5
2			2,3,4,5	2,5	2,4
3				3,4	3,5
4					4,5

For example $3 \in S(\{1, 2\}) = \{1, 3, 4, 5\}$ because $b_{E_3} = b_{13} = \{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}$ is a bipartition which separates 1 from 2, but $2 \notin S(\{1, 2\})$ because $b_{E_2} = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$ does not separate them.

This description of $S_{\mathcal{E}}$ is clearly redundant, and we will confine ourselves to describing the action of $S_{\mathcal{E}}$ on a base of $\mathcal{P}^*(I)$ contained in $\mathcal{P}_2(I)$. For typographical convenience we will use the first row of the table, since it is easy for the reader to complete the table, recalling that $S(\{h, k\}) = S(\{1, h\}) + S(\{1, k\})$ for each $h, k \in I$.

Here there are further examples, for future reference.

Example 2. Let $I = \{1, \dots, 7\}$. The automorphism S of $\mathcal{P}^*(I)$ represented by the table

	1	2	3	4	5	6	7
1		2,3,4,6	1,2,3,4	1,2,3,4,6,7	1,5	1,2,6,7	1,3,6,7

“read” in $\mathbb{B}(I)$ via our functor is the automorphism

$$\mathcal{E}_S = (b_{12}, b_{157}, b_{156}, b_{234}, p_5, b_{135}, b_{467}).$$

Example 3 (Suggested by Francesco Barioli). $I = \{1, \dots, 8\}$. The automorphism of $\mathbb{B}(I)$, $\mathcal{E} = (b_{1238}, b_{156}, b_{1278}, b_{246}, b_{1458}, b_{1247}, b_{678}, b_{258})$, read in $\mathcal{P}^*(I)$ via our functor, is represented by the table

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2,4,5,8	2,3,5,6	1,2,3,4	1,3,6,8	1,3,4,5,6,7	1,2,5,7	2,6,7,8

Example 4. $I = \{1, \dots, 10\}$. The automorphism S of $\mathcal{P}^*(I)$, given by the table

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		1,2	4,5	2,3	1,2	1,2	1,2,4	1,2,4	1,2,4	1,2
				4,5	3,4	4,9	6,7,9	6,7,10	6,8,10	4,8

and the automorphism $\mathcal{E} = (b_{1,3,4}, b_{1,3}, b_{4,5}, b_{1,2}, b_{3,4}, b_{7,8,9}, b_{7,8}, b_{9,10}, b_{6,7}, b_{8,9})$ are image of each other via our functor.

5 Bases and graphs in $\mathcal{P}^*(I)$

The 2-elements subsets $\mathbf{v} = \{x, y\}$ of I can be regarded as edges of a graph. In particular, for each $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_2(I)$, a graph is formed by taking $\mathcal{X}$ as edge set on $\text{Vert}(\mathcal{X}) = \bigcup \{\mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathcal{X}\} \subseteq I$. We will simply state this by saying that

$\mathcal{X}$ is a *graph on* $\text{Vert}(\mathcal{X})$. However, if $\text{Vert}(\mathcal{X}) \subset I$, we can think to $\mathcal{X}$ as a graph *in* I , referring to the elements in $I \setminus \text{Vert}(\mathcal{X})$ as *isolated points*.

For $a, b \in I$, we say that $\mathcal{X}$ contains a *path* (of length n) linking a and b if there exists a subset $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subseteq \mathcal{X}$ such that, for a suitable ordering of its element,

$$\mathbf{v}_1 = \{x_0, x_1\}, \mathbf{v}_2 = \{x_1, x_2\}, \dots, \mathbf{v}_n = \{x_{n-1}, x_n\}.$$

with $x_0 = a, x_n = b$.

Note that, since $\mathcal{X}$ is a set, such a path has edges all distinct; however, referring to a path by the natural sequence of its vertices $(x_0, \dots, x_n)$, it will be useful to take into account the general case of x_i not necessarily distinct and we will say, with abuse of language, that *the path does not contain cycles*, if it happens that the x_i are all distinct. (The absence of loops, i.e. edges of the form (x, x) , is assured by the fact that the graph is defined as a subset $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_2(I)$).

The meaning of phrases like *a, b are linked by a path*, *$\mathcal{X}$ contains a cycle*, *$\mathcal{X}$ is connected (simply connected, 2-connected)*, *connected components* of $\mathcal{X}$, are clear from elementary graph theory (for example, see the first chapter of [D]).

The *sum of a path* linking a and b is defined (according to the sum in $\mathcal{P}^*(I)$) by $\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_n = \{a, b\}$ if $a \neq b$, or zero ($= \emptyset$) if $a = b$ (and thus the path is a cycle).

It is clear that if $\mathcal{X}$ contains a cycle $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$, then $\mathcal{X}$ is dependent, since the sum of a cycle is zero. We show now that only cycles yield dependence relation.

Proposition 5. *Let $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_2(I)$. Then:*

i) $\mathcal{X}$ generates $\mathcal{P}^*(I)$ if and only if $\mathcal{X}$ is a connected graph on I .

ii) $\mathcal{X}$ is a base of $\mathcal{P}^*(I)$ if and only if $\mathcal{X}$ is a graph on I , simply connected

Proof. i) If $\mathcal{X}$ is connected on I , then $\mathcal{X}$ generates $\mathcal{P}_2(I)$ and $\mathcal{P}^*(I)$; in fact, for each $a, b \in I$, $\{a, b\}$ is the sum of a path linking a and b . If $\mathcal{X}$ is not connected, it has two or more connected components $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \dots$. If $\mathcal{X}$ is not on I , since $\text{Vert}(\mathcal{X}) \subset I$, the isolated points in $I \setminus \text{Vert}(\mathcal{X})$ are each a connected component by itself. In these cases, $\mathcal{X}$ does not generate some $A \in \mathcal{P}^*(I)$, for example those A such that $A \cap \text{Vert } \mathcal{C}$ has odd order.

ii) By i), $\mathcal{X}$ generates $\mathcal{P}^*(I)$ if and only if it is a connected graph on I . In this case, if $\mathcal{X}$ is a base, it does not contain cycles and thus it is simply connected. Conversely, if $\mathcal{X}$ is simply connected, then $\mathcal{X} \setminus \{\mathbf{v}\}$ is not connected for each $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$, and $\mathcal{X}$ is a minimal set generating $\mathcal{P}^*(I)$. $\square$

6 Graphs of automorphisms

In this section S will denote an automorphism of $\mathcal{P}^*(I)$, although the following applies also to isomorfisms.

We define the *graph of S* , by

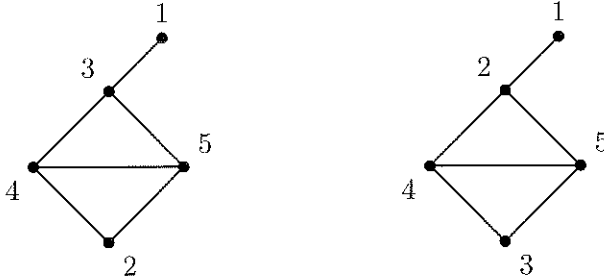
$$\mathcal{G}_S := \mathcal{P}_2(I) \cap S^{-1}(\mathcal{P}_2(I))$$

The graph $\mathcal{G}_S$ can be drawn by looking at the table of S , joining the vertices h, k whenever the cell $S(\{h, k\})$ has only two elements. The graph of S^{-1} is clearly

$$\mathcal{G}_{S^{-1}} = \mathcal{P}_2(I) \cap S(\mathcal{P}_2(I)) = S[S^{-1}(\mathcal{P}_2(I)) \cap \mathcal{P}_2(I)] = S(\mathcal{G}_S)$$

and can be drawn by looking at the table of S , joining i and j if and only if there exists a cell $S(\{h, k\}) = \{i, j\}$. These 2-element cells of the table of S describes a bijection from (the edge of) $\mathcal{G}_S$ to (the edge of) $\mathcal{G}_{S^{-1}}$, although this does not define a bijection from their vertex sets.

Let us show the graphs $\mathcal{G}_S$ and $\mathcal{G}_{S^{-1}}$ of Example 1:



It is not by chance that the numbers of triangle of the two graphs are the same. In fact we have:

Proposition 6. *If $\mathcal{X}$ is a cycle in $\mathcal{G}_S$, then $S(\mathcal{X})$ is a cycle in $\mathcal{G}_{S^{-1}}$.*

Proof. The sum of $\mathcal{X}$ is zero, thus so is the sum of $S(\mathcal{X})$. Hence for every $x \in \text{Vert}(S(\mathcal{X}))$ we have $x \in S(\mathbf{v})$ for an even number of $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$. Suppose that there is an x that belongs to four or more $S(\mathbf{v})$. Then $|\text{Vert}(S(\mathcal{X}))| < |\text{Vert}(\mathcal{X})|$, and while $\mathcal{X}$ generates a space of dimension $|\text{Vert}(\mathcal{X})| - 1$, $S(\mathcal{X})$ generates a space of smaller dimension, a contradiction. This proves that every $x \in \text{Vert}(S(\mathcal{X}))$ belongs exactly to two edges, thus $S(\mathcal{X})$ is a cycle. $\square$

However it is not true that $S(\mathcal{X})$ is connected if $\mathcal{X}$ is; see for example the path $\mathcal{X} = (1, 3, 5)$ in Example 1, whose image is $S(\mathcal{X}) = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}\}$ (see Corollary 1). In general, it is neither true that $\mathcal{G}_S$ and $\mathcal{G}_{S^{-1}}$ have the same *shape*, as one can see by drawing the graphs of Example 2, which are not connected, and the one of Example 5 (Section 8), which are instead connected.

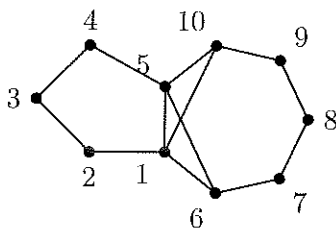
Connected graphs are very useful. In fact, by Proposition 5, it is easy to define an automorphism S of $\mathcal{P}^*(I)$ by a bijection S from the edges of a simply connected graph $\mathcal{C}$ on I , to those of a simply connected graph $\mathcal{D}$ on I ($|\mathcal{C}| = |\mathcal{D}| = |I| - 1$). Obviously, this S extends to exactly one automorphism of $\mathcal{P}^*(I)$ (called S , as well).

Having defined such a bijection, a table can be used (for relatively small ranks) to get a more complete description of S , together with the complete graph $\mathcal{G}_S$ (which in general properly includes $\mathcal{C}$): write the integer $\{i, j\}$ in the cell of index (h, k) whenever the bijection maps $\{h, k\} \mapsto \{i, j\}$, and complete the table according to the rule of the sum.

Indeed, many examples have been constructed in this way, showing that this $\mathbb{Z}_2$ -linear approach is by far easier than that the admissible m -tuples one. We will show in the next section that, however, the two approaches are equivalent.

One has to observe that S does not always have an interesting graph (i.e. connected), and that an S may have an empty graph too (see Example 3). We do not know any algorithm to construct such automorphisms.

However the interest in an S with connected graph lies in the fact that $\mathcal{G}_{S_{\mathcal{E}}}$ is 2-connected if and only if $\mathcal{E}$ performs a base change for *indecomposable* $\mathbf{B}(1)$ -groups (see Theorem 2). Example 4 provides such an S , here is its graph.



Thus we can check whether $\mathcal{E}$ performs a base-change for an indecomposable $\mathbf{B}(1)$ -group simply by looking at its table, avoiding the complex search for $A \in \mathbb{D}(\mathcal{E})$.

7 The inverse functor

Let us describe the inverse functor, associating to a homomorphism $S : \mathcal{P}^*(J) \rightarrow \mathcal{P}^*(I)$ a homomorphism $\mathcal{E}_S : \mathbb{B}(I) \rightarrow \mathbb{B}(J)$, such that $S_{(\mathcal{E}_S)} = S$ and $\mathcal{E}_{(S_{\mathcal{E}})} = \mathcal{E}$. We need the following observation.

Proposition 7. *Each hyperplane H of $\mathcal{P}^*(I)$ can be associated to a bipartition $b_{E(H)}$ of I , with $E(H) \neq \emptyset$, such that $H = \{A \in \mathcal{P}^*(I) \mid A \cap E(H) \text{ is of even order}\}$; in particular $H = \mathcal{P}^*(E(H)) \oplus \mathcal{P}^*(E(H)^{-1})$ (note that $\mathcal{P}^*(E(H)) = \emptyset$ if $E(H)$ is a singleton).*

Proof. Consider at first the 2-element sets $\{1, 2\}, \dots, \{1, m\}$ of $\mathcal{P}_2(I)$; reorder and separate this collection into two parts (one of them can be empty): $\{1, i_2\}, \dots, \{1, i_r\} \in H$ and $\{1, i_{r+1}\}, \dots, \{1, i_m\} \notin H$. Since the base field is $\mathbb{Z}_2$, H has index two in $\mathcal{P}^*(I)$, and for each distinct $h, k \in \{r+1, r+2, \dots, m\}$ we have $\{i_h, i_k\} = \{1, i_h\} + \{1, i_k\} \in H$. Then $\{1, i_2\}, \dots, \{1, i_r\}, \{i_{r+1}, i_{r+2}\}, \dots, \{i_{r+1}, i_m\}$ form a set of $m-1$ vectors of H , which does not contain cycles, thus generates a subspace of dimension $m-1$, necessarily equal to H . Thus $E(H) = \{1, i_2, \dots, i_r\}$. $\square$

Let now S be a homomorphism $\mathcal{P}^*(J) \rightarrow \mathcal{P}^*(I)$ with $|I| = m, |J| = n$. For each $i \in I$, denoting with $H_{|i}$ the hyperplane $\mathcal{P}^*(I \setminus \{i\})$ of $\mathcal{P}^*(I)$, we have that $H_{|i} \cap S(\mathcal{P}^*(J))$ is $S(\mathcal{P}^*(J))$ or a hyperplane; in the first case we set $b_{E_i} = \{\emptyset, J\}$; otherwise, looking at the table of S , it is easy to discover the b_{E_i} such that $\mathcal{P}^*(E_i) \oplus \mathcal{P}^*(E_i^{-1}) = S^{-1}(H_{|i})$: check the presence of the index i on the r -th row, let E_i^r be the set $\{j \in I \mid i \in S(\{r, j\})\}$; it is easy to prove that $b_{E_i^r} (= b_{E_i})$ is invariant with respect to r and that b_{E_i} is the desired bipartition.

Now we show that $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ is a homomorphism, that is $b_{E_1} + \dots + b_{E_m} = 0$. Let $i, j \in I$; observe that, for each $k \in I, k \notin S(\{i, i\}) = \emptyset$, thus, by definition of b_{E_k} , $k \in S(\{i, j\})$ if and only if b_{E_k} separates i, j . But $|S(\{i, j\})|$ is even, thus by Proposition 4 iii), $b_{E_1} + \dots + b_{E_m}$ does not separate i, j , for each i, j . Thus $b_{E_1} + \dots + b_{E_m}$ is zero.

It is easy to see that $S_{(\mathcal{E}_S)} = S$ and $\mathcal{E}_{(S_{\mathcal{E}})} = \mathcal{E}$. For example, to check the first identity, recall the previous observation, i.e. $k \in S(\{i, j\})$ if and only if b_{E_k} separates i, j , to obtain that $k \in S_{(\mathcal{E}_S)}(\{i, j\})$ if and only if $k \in S(\{i, j\})$.

8 The domain of S

Let now $A \subseteq I$, $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ be an automorphism of $\mathbb{B}(I)$. As an equivalent definition of the Domain of $\mathcal{E}$ (see Definition 1), we can say that

$A \in \mathbb{D}(\mathcal{E})$ if and only if $|A^{-1}| \neq 1$ and the set

$$\bar{A} = \{i \in I \mid E_i \cap A, E_i^{-1} \cap A \text{ are both not empty}\}$$

has order equal to $|A^{-1}|$.

Obviously $k \in \bar{A}$ if and only if there exist distinct $i, j \in A$ such that b_{E_k} separates i, j , thus if and only if $k \in S(\{i, j\})$, with $\{i, j\} \in \mathcal{P}^*(A)$. In general $S(\mathcal{P}^*(A)) \subseteq \mathcal{P}^*(\bar{A})$, hence, if $|\bar{A}| = |A^{-1}|$, equality holds, since the two spaces have the same dimension. Thus if we define

Definition 2. For $A \subseteq I$, with $|A| \neq 1$, A is in the domain $\mathbb{D}(S)$ of S if and only if there exists $\bar{A}$ such that $S(\mathcal{P}^*(A)) = \mathcal{P}^*(\bar{A})$

we have

Proposition 8. $A \in \mathbb{D}(S)$ if and only if $A^{-1} \in \mathbb{D}(\mathcal{E}_S)$.

One can check the property $S(\mathcal{P}^*(A)) = \mathcal{P}^*(\bar{A})$ by looking at the action of S on a base of $\mathcal{P}^*(A)$ (for example, if $i \in A$, then $\bar{A} = \bigcup_{j \in A \setminus \{i\}} S(\{i, j\})$), thus looking at the cells $S(\{i, j\})$ of the table of S with $\{i, j\} \subseteq A$. These cells describe the restriction $S|_{\mathcal{P}^*(A)}$ of S to $\mathcal{P}^*(A)$, then if $\mathcal{P}^*(\bar{A}) = S(\mathcal{P}^*(A))$, we have that $S|_{\mathcal{P}^*(A)} : \mathcal{P}^*(A) \rightarrow \mathcal{P}^*(\bar{A})$ is an isomorphism.

This suggests that it is convenient to extend the definition of domain of an automorphism S to the general case of isomorphism, to which it applies without modifications.

If there exist 2-elements cells on the table of S (thus, $\mathcal{G}_S$ is not empty), they are in $\mathbb{D}(S)$; further examples are sets $A = \text{Vert}(\mathcal{X})$ with $\mathcal{X}$ cycle, by Proposition 6. Furthermore, we have the following properties for the elements of the domain of S .

Proposition 9. Let $A \in \mathbb{D}(S)$. Then $\bar{A} \in \mathbb{D}(S^{-1})$.

Proof. Obvious by the definition of $\mathbb{D}(S)$. □

In the next proposition note that, for $A \subseteq I$, the dimension $\dim \mathcal{P}^*(A)$, if non-zero, yields $|A| = 1 + \dim \mathcal{P}^*(A)$, while, if $\dim \mathcal{P}^*(A) = 0$, then $|A| = 1$ or $A = \emptyset$.

Proposition 10. Let $A, B \in \mathbb{D}(S)$. Then:

- i) If $|A \cap B| \geq 2$, then $A \cap B \in \mathbb{D}(S)$ and $A \cup B \in \mathbb{D}(S)$.
- ii) If $|A \cap B| = 1$ then $A \cup B \in \mathbb{D}(S)$ if and only if $|\bar{A} \cap \bar{B}| = 1$.

- iii) If $|A \cap B| = |\overline{A} \cap \overline{B}| = 0$, then $A \cup B \in \mathbb{D}(S)$ if and only if $S(\{a, b\}) \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ for an arbitrary choice of $a \in A$ and $b \in B$.
- iv) If $|A \cap B| = 0$ and $|\overline{A} \cap \overline{B}| = 1$, then $A \cup B \in \mathbb{D}(S)$ if and only if there exists $k \notin \overline{A} \cup \overline{B}$ such that $S(\{a, b\}) \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \cup \{k\}$ for an arbitrary choice of $a \in A$ and $b \in B$.

Proof. In general, $\mathcal{P}^*(A \cap B) = \mathcal{P}^*(A) \cap \mathcal{P}^*(B)$, while $\mathcal{P}^*(A \cup B) = \mathcal{P}^*(A) + \mathcal{P}^*(B)$ if and only if $|A \cap B| \geq 1$. Let $A, B \in \mathbb{D}(A)$ and $|A \cap B| \geq 1$. Then $S(\mathcal{P}^*(A \cap B)) = S(\mathcal{P}^*(A)) \cap S(\mathcal{P}^*(B)) = \mathcal{P}^*(\overline{A}) \cap \mathcal{P}^*(\overline{B}) = \mathcal{P}^*(\overline{A} \cap \overline{B})$; on the other hand, $S(\mathcal{P}^*(A \cup B)) = S(\mathcal{P}^*(A)) + S(\mathcal{P}^*(B)) = \mathcal{P}^*(\overline{A}) + \mathcal{P}^*(\overline{B}) \leq \mathcal{P}^*(\overline{A} \cup \overline{B})$. For $A \cup B \in \mathbb{D}(S)$, equality must hold. Thus we obtain i) and ii). After that, iii) and iv) are obvious. $\square$

Example 5. In the following example

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1		1,2	2,3	1,2 3,4	4,5 6,7	4,6	3,4 6,7	3,4,5 6,7,10	3,4,5,6 7,8,9,10	3,4,5 6,7,8	3,4,6 7,9,11

check for i) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $\overline{A} = \{1, 2, 3\}$, $\overline{B} = \{1, 3, 4\}$; for ii) $A = \{3, 8, 10\}$, $B = \{3, 5\}$, $\overline{A} = \{5, 8, 10\}$, $\overline{B} = \{3, 5\}$; for iii) $A = \{3, 5, 7\} = \overline{A}$, $B = \{8, 9, 10\} = \overline{B}$; for iv) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{6, 7\}$, $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\overline{B} = \{3, 7\}$.

9 2-connected graphs of automorphisms and applications to B(1)-groups

The correspondence between $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ and $\mathbb{D}(S_{\mathcal{E}})$ (Proposition 8, and the cited algorithm in [DVM4]: Pulling the strings), suggests the following definition.

Definition 3. Let S be an isomorphism of $\mathcal{P}^*(I)$ into $\mathcal{P}^*(J)$. Then $\mathbb{D}(S)$ is called *indecomposable* if and only if, for each $a, b, k \in I$, there exist $n \in \mathbb{N}$, $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{D}(S_{\mathcal{E}})$ such that $a \in C_1$, $b \in C_n$, $k \notin C_i$ for each $i = 1, \dots, n$, and $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ for each $i = 1, \dots, n-1$.

Consequently, we get

Proposition 11. Let $\mathcal{E}$ be an automorphism of $\mathbb{B}(I)$. Then $\mathcal{E}$ performs a base change for an indecomposable $\mathbb{B}(1)$ -group if and only if $\mathbb{D}(S_{\mathcal{E}})$ is indecomposable.

To lighten the notation, we say that the sequence $C_1, \dots, C_n$ *links* a, b *outside* $\{k\}$ if $C_1, \dots, C_n$ verify the condition of Definition 3.

Note that, given k , the relation $a \sim b$ yielded by the existence of a sequence that links a, b outside $\{k\}$ is obviously an equivalence; we indicate with $[a]$ the equivalence class of a . Moreover, there exists a sequence that links a, b outside $\{k\}$ if and only if there exists such a sequence that links $c \in [a]$ and $d \in [b]$ (outside $\{k\}$); thus, the meaning of “the sequence $C_1, \dots, C_n$ links $[a], [b]$ outside k ” is clear.

The main theorem of this paper is

Theorem 1. *Let S be an isomorphism of $\mathcal{P}^*(I)$ into $\mathcal{P}^*(J)$. If $\mathbb{D}(S)$ is indecomposable and $A \in \mathbb{D}(S)$, then $\mathbb{D}(S|_{\mathcal{P}^*(A)})$ is indecomposable.*

An immediate corollary is

Theorem 2. *Let S be an isomorphism of $\mathcal{P}^*(I)$ into $\mathcal{P}^*(J)$. $\mathbb{D}(S)$ is indecomposable if and only if $\mathcal{G}_S$ is a 2-connected graph on I .*

Proof. Recall that every edge of $\mathcal{G}_S$ is in $\mathbb{D}(S)$. Then if $\mathcal{G}_S$ is a 2-connected graph on I , the condition of indecomposability of the domain $\mathbb{D}(S)$ is verified for each a, b, k , with $C_1, \dots, C_n$ given by a path $\mathcal{X}$ connecting a and b and which does not touch k .

Conversely, let $\mathbb{D}(S)$ be indecomposable. If $|I| = 2$, then the statement is obvious. Let $|I| \geq 3$ and, by induction, $\mathbb{D}(S|_{\mathcal{P}^*(A)})$ is indecomposable for all $A \in \mathbb{D}(S)$, $|A| < |I|$.

Let $k \in I$. For each $a, b \in I \setminus \{k\}$, there exists by hypothesis a sequence $C_1, \dots, C_n$ of elements of $\mathbb{D}(S)$, linking a and b , with $k \notin C_i$ for $i = 1, \dots, n$. By Theorem 1, for $i = 1, \dots, n$, $\mathbb{D}(S|_{\mathcal{P}^*(C_i)})$ is indecomposable and, by inductive hypothesis, the graph of $S|_{\mathcal{P}^*(C_i)}$ is 2-connected on C_i ; since $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$, the join of these graphs is a connected graph that contains a, b but not k . $\square$

Before proving Theorem 1, we have two lemmas. Observe that if $\mathcal{B}$ is a simply connected graph then, by Proposition 5, it is independent. Let $\mathcal{X}$ be a simply connected path that links two points $a, b \in \text{Vert}(\mathcal{B})$, such that $\mathcal{X} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ and $\text{Vert}(\mathcal{B}) \cap \text{Vert}(\mathcal{X}) = \{a, b\}$. Then, obviously, $\mathcal{B} \cup \mathcal{X}$ is dependent, because it contains a cycle; however, breaking this cycle, i.e. if we choose $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{B} \cup \mathcal{X}'$ is independent. The following lemmas provide a way of choosing $\mathcal{X}'$.

To lighten the notation, we say that y *occurs* in a path $\mathcal{X}$ whenever $y \in S(\mathbf{v})$, with $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$ and its *number of occurrences* will be the number of such $\mathbf{v}$'s (we will omit the reference to S , if there is no ambiguity).

Lemma 1. *Let S be an isomorphism of $\mathcal{P}^*(I)$ into $\mathcal{P}^*(J)$, $\mathcal{X}$ be a simply connected path $\mathbf{v}_1 = \{x_0, x_1\} \dots, \mathbf{v}_n = \{x_{n-1}, x_n\}$ in $\mathcal{G}_S$, with S -sum*

$$\left| \sum_{i=1}^n S(\mathbf{v}_i) \right| = |S(\{x_0, x_n\})| \geq 4$$

Then there exists a non-empty proper subset $\mathcal{X}'$ of $\mathcal{X}$ whose S -sum is contained in the S -sum of $\mathcal{X}$.

Proof. By hypothesis, every $y \in S(\{x_0, x_n\})$ has an odd number of occurrences in $\mathcal{X}$. Let $y_1 \in S(\{x_0, x_n\})$, choose $i_1 = \{1, \dots, n\}$ such that $y_1 \in S(\mathbf{v}_{i_1})$. Then $S(\mathbf{v}_{i_1}) = \{y_1, y_2\}$. If $y_2 \in S(\{x_0, x_n\})$, then $\mathcal{X}' = \{\mathbf{v}_{i_1}\}$; otherwise y_2 has an even number of occurrences in $\mathcal{X}$, then there exists $i_2 \in \{1, \dots, n\}$, $i_2 \neq i_1$ such that $y_2 \in S(\mathbf{v}_{i_2})$. Then $S(\mathbf{v}_{i_3}) = \{y_{i_2}, y_{i_3}\}$. If $y_{i_3} \in S(\{x_0, x_n\})$, then $\mathcal{X}' = \{\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}\}$; otherwise the algorithm goes on looking for another occurrence of y_{i_3} in $\mathcal{X}$. The algorithm will stop at step $n' < n$ such that $y_{n'+1} \in S(\{x_0, x_n\})$. Then $\mathcal{X}' = \{\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_{n'}}\}$, a proper subset of $\mathcal{X}$ because its sum is $\{y_{i_1}, y_{i_{n'}}\} \subset S(\{x_0, x_n\})$. Note that the i_j s are all distinct, because if there exists $j < k$ such that $i_j = i_k$, then the S -sum of $\mathbf{v}_{i_j}, \mathbf{v}_{i_j+1}, \dots, \mathbf{v}_{i_k}$ would be zero, which contradicts the independence of $\mathcal{X}$. $\square$

This lemma is generalized by the following one.

Lemma 2. *Let S be an isomorphism of $\mathcal{P}^*(I)$ into $\mathcal{P}^*(J)$, $\mathcal{X}$ be a simply connected path $\{\mathbf{v}_1 = \{x_0, x_1\}, \dots, \mathbf{v}_n = \{x_{n-1}, x_n\}\}$ in $\mathcal{P}_2(I)$, with S -sum*

$$\left| \sum_{i=1}^n S(\mathbf{v}_i) \right| = |S(\{x_0, x_n\})| \geq 4$$

Then there exist even subsets B_i of $S(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, \dots, n$, not all empty and at least one proper, such that $B_1 + \dots + B_n$ is contained in the S -sum of $\mathcal{X}$.

Proof. Setting $B_i = \emptyset$ for each $i = \{1, \dots, n\}$, we proceed as in the algorithm of the previous proof; at each step, we will redefine a certain B_i , by adjoining to it two elements. By hypothesis, every $y \in S(\{x_0, x_n\})$ has an odd number of occurrences in $\mathcal{X}$. Let $y_1 \in S(\{x_0, x_n\})$, choose $i_1 \in \{1, \dots, n\}$ such that $y_1 \in S(\mathbf{v}_{i_1}) \setminus B_{i_1}$. Then choose $y_2 \in S(\mathbf{v}_{i_1}) \setminus B_{i_1}$, with $y_2 \neq y_1$ and redefine $B_{i_1} = B_{i_1} \cup \{y_1, y_2\}$; the other B_j 's, with $j \neq i_1$, are unchanged.

If $y_2 \in S(\{x_0, x_n\})$, the algorithm stops. Otherwise, since y_2 has an even number of occurrences in $\mathcal{X}$, there exists $i_2 \in \{1, \dots, n\}$, such that

$y_2 \in S(\mathbf{v}_{i_2}) \setminus B_{i_2}$. Choose $y_3 \in S(\mathbf{v}_{i_2}) \setminus B_{i_2}$, with $y_3 \neq y_2$ and redefine as above $B_{i_2} = B_{i_2} \cup \{y_2, y_3\}$.

If $y_{i_3} \in S(\{x_0, x_n\})$, the algorithm stops. Otherwise the algorithm proceeds by looking for another occurrence of y_{i_3} in $\mathcal{X}$.

The algorithm will stop at a step $n' < n$ such that $y_{n'+1} \in S(\{x_0, x_n\})$. The integers i_j do not need to be all distinct, but the algorithm stops because at each step the orders of the B_i 's do not decrease, and the order of a certain $B_j \subset S(\mathbf{v}_j)$ increases by 2. Moreover, at the last step, $B_1 + \dots + B_n = \{y_1, y_{n'+1}\} \subset S(\{x_0, x_n\})$, thus the B_j 's are not all empty, and at least one of them is a proper subset of the respective $S(\mathbf{v}_j)$. $\square$

Proof of Theorem 1. It is enough to prove the statement when A is maximal in $\mathbb{D}(S)$. Let $\mathbb{D}(S)$ be indecomposable and suppose that $\mathbb{D}(S|_{\mathcal{P}^*(A)})$ is not indecomposable. Then, there exist $a, b, k \in A$ and a sequence $C_1, \dots, C_n$ in $\mathbb{D}(S)$ that links $[a]$ and $[b]$ outside $\{k\}$, but there is no such sequence in $\mathbb{D}(S|_{\mathcal{P}^*(A)})$.

Thus, we cannot have $|C_i \cap A| \geq 2$ for all i , because in this case $C_1 \cap A, \dots, C_n \cap A$ would be, by Proposition 10, a sequence in $\mathbb{D}(S|_{\mathcal{P}^*(A)})$ that links $[a], [b]$ outside $\{k\}$.

We can choose such a sequence of minimal length n ; as a consequences of this and of Proposition 10 we have:

1. $|C_i \cap C_{i+1}| = 1$ for each $i = 1, \dots, n-1$. In fact, such intersections are not empty by hypothesis; on the other hand, if $|C_i \cap C_{i+1}| \geq 2$, we would consider the sequence

$$C_1, \dots, C_{i-1}, C_i \cup C_{i+1}, C_{i+2}, \dots, C_n$$

of length $n-1$;

2. from (1) we get $\overline{C_i} \cap \overline{C_{i+1}} = \emptyset$ for each $i = 1, \dots, n-1$. Otherwise, $C_i \cup C_{i+1}$ is in $\mathbb{D}(S)$, and the length of the sequence decreases;

3. if $i+1 < j$ then $|C_i \cap C_j| = 0$; otherwise we have the sequence

$$C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_j, C_{j+1}, \dots, C_n$$

and the length decreases;

4. $n \geq 2$. If $n = 1$, C_1 links $[a], [b]$, thus $|C_1 \cap A| \geq 2$ and then $C_1 \cap A \in \mathbb{D}(S|_{\mathcal{P}^*(A)})$ links $[a], [b]$;
5. maximality of A forbids that, for some i , $|A \cap C_i| \geq 2$ and $A \cup C_i \subset I$

6. a little more attention is required to see that, for any i , $|A \cap C_i| \geq 2$ and $A \cup C_i = I$ does not occur. In fact for such a C_i , we would have $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ for each $j \neq i$, and the sequence would be of length 2. Let $C_i = C$ and D be the two elements of the sequence. Then, $|C \cap D| = 1$ and so $|D| = 2$. Now, $S(\mathcal{P}^*(I)) = S(\mathcal{P}^*(C \cup A)) = \mathcal{P}^*(I)$, then $\overline{C} \cup \overline{A} = I$; on the other hand, $\mathcal{P}^*(D) \cap \mathcal{P}^*(A) = \mathcal{P}^*(D) \cap \mathcal{P}^*(C) = 0$, hence $|\overline{D} \cap \overline{A}| = |\overline{D} \cap \overline{C}| = 1$. Thus $C \cup D \in \mathbb{D}(S)$, and we have a sequence of length 1.

Let r be the minimum $i > 1$ such that $|A \cap C_i| = 1$ (possibly $r = n$); let $C_1 \cap A = \{x_1\}$, $C_i \cap C_{i+1} = \{x_{i+1}\}$ for $i = 1, \dots, r-1$, $C_r \cap A = \{x_{r+1}\}$, while $|C_i \cap A| = 0$ for each $1 < i < r$. Then $\{x_1, x_{r+1}\} \subseteq A$; if $|S(\{x_1, x_{r+1}\})| = 2$, then $\{x_1, x_{r+1}\} \in [a]$ and, if $r < n$, we can consider the sequence $C_{r+1}, \dots, C_n$ and the length decreases, otherwise if $r = n$, $\{x_1, x_{n+1}\} \in \mathbb{D}(S|_{\mathcal{P}^*(A)})$ links $[a]$ and $[b]$.

The above ensures that $|S(\{x_1, x_{r+1}\})| \geq 4$ and we can use Lemmas 1 and 2. We consider the simply connected path $\mathcal{X}$ given by $\mathbf{v}_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ for $i = 1, \dots, r$. If $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{G}_S$ then, by Lemma 1, we can consider a non-empty proper subset $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$, such that the S -sum of $\mathcal{X}'$, say Y , is

$$\sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{X}'} S(\mathbf{w}) = Y \subset S(\{x_1, x_{r+1}\}) \subseteq \overline{A}$$

Consider a simply connected graph $\mathcal{B}$ on A having $\{x_1, x_{r+1}\}$ as an edge, so that $\mathcal{B}$ is a base of $\mathcal{P}^*(A)$ by Proposition 5. Since $S(\mathcal{P}^*(A)) = \mathcal{P}^*(\overline{A})$, there exists $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ such that

$$\sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{B}'} S(\mathbf{w}) = Y,$$

a contradiction, because, as observed before Lemma 1, $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}' = \emptyset$ and $\mathcal{B} \cup \mathcal{X}'$ is independent.

We conclude that $\mathcal{X} \not\subseteq \mathcal{G}_S$, and $|S(\{x_i, x_{i+1}\})| > 2$ for some i . We choose $B_i \subseteq S(\{x_i, x_{i+1}\})$ as in Lemma 2. For each C_i we consider a simply connected path $\mathcal{X}_i$ that links x_i and x_{i+1} . By joining these bases of the C_i we obtain a simply connected path $\mathcal{X}$ that links x_1, x_{r+1} . Since

$$B_i \subseteq S(\{x_i, x_{i+1}\}) \subseteq \overline{C_i}$$

and $S(\mathcal{P}^*(C_i)) = \mathcal{P}^*(\overline{C_i})$, there exists a subset $\mathcal{X}'_i$ of $\mathcal{X}_i$ such that

$$\sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{X}'_i} S(\mathbf{w}) = B_i$$

For at least one i , $B_i \subset S(\{x_i, x_{i+1}\})$, then by joining the $\mathcal{X}'_i$ we obtain a proper subset $\mathcal{X}'$ of $\mathcal{X}$. Then $B \cup \mathcal{X}'$ is independent, and

$$\sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{X}'} S(\mathbf{w}) = B_1 + \cdots + B_n = Y \subset S(\{x_1, x_n\}) \subseteq \overline{A}.$$

Finally we obtain a contradiction as above. $\square$

Now, it is easy to characterize the elements of $\mathbb{D}(S)$ when $\mathcal{G}_S$ is connected. They are given by connected subgraphs of $\mathcal{G}_S$ whose image by S is also connected.

Corollary 1. *Let $\mathcal{G}_S$ be connected, $A \subseteq I$. Then:*

i) *if $A \in \mathbb{D}(S)$, then $\mathcal{G}_{S|_{\mathcal{P}^*(A)}}$ is connected;*

ii) *$A \in \mathbb{D}(S)$ if and only if $\mathcal{G}_{S|_{\mathcal{P}^*(A)}}$ and $S(\mathcal{G}_{S|_{\mathcal{P}^*(A)}})$ are connected.*

Proof. i) Suppose that there exist $a, b \in A$ such that every simply connected path in $\mathcal{G}_S$, linking a and b , is not contained in $\mathcal{P}^*(A)$. Let $\mathcal{X}$ be one of these paths; by looking at the sequence of its vertices, one can choose $c, d \in A \cap \text{Vert}(\mathcal{X})$ such that $\{c, d\} \notin \mathcal{G}_{S|_{\mathcal{P}^*(A)}}$ and the path $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ linking c and d is all outside $\mathcal{P}^*(A)$. Then, using Lemma 1 as in the previous proof, one obtains a similar contradiction. Thus, for every $a, b \in A$ there exists a simply connected path $\mathcal{X}$, linking a and b , such that $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{G}_{S|_{\mathcal{P}^*(A)}}$, and $\mathcal{G}_{S|_{\mathcal{P}^*(A)}}$ is connected.

ii) If $A \in \mathbb{D}(S)$, then $\mathcal{G}_{S|_{\mathcal{P}^*(A)}}$ is connected by i), and $S(\mathcal{G}_{S|_{\mathcal{P}^*(A)}}) = \mathcal{G}_{S|_{\mathcal{P}^*(\overline{A})}}^{-1}$ is connected, again by i), by the definition at beginning of Section 6 and Proposition 9. Conversely, let $\mathcal{X} = \mathcal{G}_{S|_{\mathcal{P}^*(A)}}$ be connected. Then, by Proposition 5 i), $\mathcal{X}$ is a base for $\mathcal{P}^*(A)$, thus $S(\mathcal{X}) = S(\mathcal{G}_{S|_{\mathcal{P}^*(A)}})$ is a base of $S(\mathcal{P}^*(A))$. Set $\overline{A} = \text{Vert}(S(\mathcal{X}))$: then, again by Proposition 5 i), $S(\mathcal{X})$ is a base of $\mathcal{P}^*(\overline{A})$, thus $S(\mathcal{P}^*(A)) = \mathcal{P}^*(\overline{A})$ and $A \in \mathbb{D}(S)$. $\square$

Let us describe the Domain tent of Example 1.

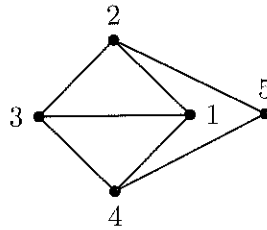
$t_1 =$	•	p_{45}	p_{24}	p_{25}	p_{34}	p_{35}	p_{245}	p_{345}	p_{2345}
$t_2 =$	p_{13}	p_{45}	•	•	p_{34}	p_{35}	•	p_{345}	•
$t_3 =$	•	p_{45}	p_{24}	p_{25}	•	•	p_{245}	•	•
$t_4 =$	p_{13}	•	•	p_{25}	•	p_{35}	•	•	•
$t_5 =$	p_{13}	•	p_{24}	•	p_{34}	•	•	•	•

We leave it to the reader to find elements of the domain of Examples 4, 5, by applying Corollary 1.

Not every 2-connected graph can be the graph of an automorphism. Indeed, if, for every graph $\mathcal{G}$ on a set of vertices I , and for every $X \subseteq I$, we define $\mathcal{G}(X)$ as the subgraph of $\mathcal{G}$ determined by X (whose edges link elements of X), we have

Corollary 2. *If $\mathcal{G}_S$ is the graph of an automorphism S , and $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ are 2-connected subgraphs such that $|\text{Vert}(\mathcal{X}) \cap \text{Vert}(\mathcal{Y})| \geq 2$, then $\mathcal{G}_S(\text{Vert}(\mathcal{X}) \cap \text{Vert}(\mathcal{Y}))$ is 2-connected.*

For example, the following graph cannot be a $\mathcal{G}_S$. Indeed, the subgraphs determined by $X = \{1, 2, 3, 4\}$ and $Y = \{1, 2, 4, 5\}$ are 2-connected, but not so the subgraph $\mathcal{G}(X \cap Y)$.



We conclude with a result on $\mathbf{B}(1)$ -groups. While an automorphism $\mathcal{E}$ of $\mathbb{B}(I)$ performs a base change for all $\mathbf{B}(1)$ -groups whose tent is obtained from $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ by cancelling primes, Theorems 1 and 2 apply directly to $\mathbf{B}(1)$ -groups whose tent is exactly $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ and to particular quotients of pure subgroups.

Theorem 3. *Let $\mathcal{E}$ be an automorphism of $\mathbb{B}(I)$, such that the graph $\mathcal{G}_{S_{\mathcal{E}}}$ is 2-connected. If G is a $\mathbf{B}(1)$ -group represented by the tent $\mathbb{D}(\mathcal{E})$, then for each $A \in \mathbb{D}(S_{\mathcal{E}})$, the $\mathbf{B}(1)$ -group $G_A/\langle g_A \rangle_*$ is indecomposable.*

In particular G is indecomposable.

Proof. Observe that the tent of $G_A/\langle g_A \rangle_*$ is obtained from the tent Domain of $\mathcal{E}$ by cancelling all the rows t_i , with $i \notin A$, and coincide with the tent Domain of $S_{\mathcal{E}|P^*(A)}$. Then apply Theorems 1 and 2.

For G , set $A = I$. □

References

- [AV] Arnold, D. and Vinsonhaler, C. *Finite rank Butler groups: a survey of recent results*, Abelian groups (Curaçao, 1991), Dekker, New York, 1993, 17-41

- [BDVM] Barioli, F., De Vivo, C. and Metelli, C. *On vector spaces with distinguished subspaces and redundant base*, Linear Algebra Appl. 374 (2003), 107-126
- [D] Diestel, R. *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 173, Springer-Verlag Heidelberg, New York (2005)
- [DVM1] De Vivo, C. and Metelli, C. *$\mathbf{B}(1)$ -groups: some counterexamples*, Abelian Groups and Modules, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 182 (1996), 227-232
- [DVM2] De Vivo, C. and Metelli, C. *Finite partition lattices and Butler groups*, Comm. Algebra, 27 (1999), no.4, 1571-1590
- [DVM3] De Vivo, C. and Metelli, C. *Admissible matrices as base changes of $\mathbf{B}(1)$ -groups: a realizing algorithm*, Trends in Mathematics (1999), Birkhauser Verlag Basel, 135-147
- [DVM4] De Vivo, C. and Metelli, C. *Decomposing $\mathbf{B}(1)$ -groups: an algorithm*, Comm. Algebra. Vol. 30, No. 12 (2002), 5621-5637
- [DVM5] De Vivo, C. and Metelli, C. *$\mathbb{Z}_2$ -linear order-preserving transformations of tent*, Ricerche di Matematica, Vol.LI, Fasc.1, (2002), 159-184
- [DVM7] De Vivo, C. and Metelli, C. *A constructive solution to the base change decomposition problem in $\mathbf{B}(1)$ -groups*, Proceedings of the Algebra Conference — Venezia 2002, Marcel Dekker, Inc. (2004), 119-132
- [DVM15] De Vivo, C. and Metelli C. *Pure $B(n)$ -subgroups of completely decomposable groups*, Preprint n.13, 2010, Dipartimento di Matematica e Applicazioi “R.Caccioppoli”, Università Federico II, Napoli (submitted)
- [DVM16] De Vivo, C. and Metelli, C. *Butler’s theorem revisited*, Preprint n.22, 2010, Dipartimento di Matematica e Applicazioi “R.Caccioppoli”, Università Federico II, Napoli (submitted)
- [F II] Fuchs, L. *Infinite abelian groups. Vol. II*. Academic Press, New York, 1973, Pure and Applied Mathematics. Vol. 36-II
- [FM] Fuchs, L. and Metelli, C. *On a class of Butler groups*, Manuscripta Math. 71 (1991), no.1, 1-28
- [GM] Goeters, H. Pat and Megibben, C. *Quasi-isomorphism and $\mathbb{Z}_2$ -representations for a class of Butler groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 106 (2001), 21-45

Inquinamento ambientale ed effetti sulle opere d'arte e sui calcestruzzi.

Air pollution and effects on monuments and concretes.

- Nota di Riccardo Sersale -

(Adunanza del dì 3 Giugno 2011)

Riassunto. La recente accelerazione del degrado di opere d'arte, dovuta all'aumentata immissione di contaminanti nell'aria, che nel XX secolo ha fatto seguito all'incremento delle attività antropiche, sollecita ad indagare sui meccanismi che ne provocano l'erosione. Si passano in rassegna opere d'arte che hanno sofferto gli attacchi dell'inquinamento e si fa luce sulle cause che hanno prodotto il conseguente deterioramento.

Con riferimento alle nuove costruzioni, ai fini di una ragionevole ottimizzazione della loro durabilità, si sottolinea l'opportunità di stabilire una relazione: durabilità dei calcestruzzi-impatto ambientale, redigendo una classificazione che tenga conto della severità dell'ambiente di vita, per una corretta scelta del tipo di cemento e delle modalità operative. Si raccomanda pure la messa a punto di prove accelerate di resistenza all'invecchiamento per azione degli agenti atmosferici.

Parole chiave: Inquinamento atmosferico. Degrado di opere d'arte e calcestruzzi.

Summary. The recent monuments decay acceleration, due to air pollution increase because of anthropic activeness growth in the XXth century, requests investigations on the reasons responsible for erosion. Weathering effects on monuments are reviewed and the decay mechanisms elucidated. Referring to recent buildings, the suitability in creating a relationship between concrete durability and environmental impact has been emphasized, drawing an accepted classification of climates for concrete deterioration, in order to allow a proper binder selection and optimize durability. Accelerated weathering ageing tests, for controlling environment and ensure reasonable concrete durability, are also recommended.

Key words: Air pollution. Monuments and concretes decay.

Lo sviluppo dei concentramenti urbani e degli stabilimenti industriali, l'incremento della motorizzazione, l'impiego di vari prodotti chimici in agricoltura, hanno modificato profondamente l'ambiente in cui si vive. Il cambiamento interessa principalmente i grandi concentramenti urbani e gli abitati prossimi a complessi industriali, per l'immissione quotidiana di tonnellate di anidride solforosa, di biossido di carbonio, di polveri in sospensione, di idrocarburi, di ossidi di azoto. Particolarmente corrosive sulle opere d'arte e sui calcestruzzi sono: l'anidride solforosa e l'anidride solforica, che producono danni assai maggiori di quelli constatati nel corso dei secoli.

Le atmosfere urbane del XX secolo stanno infatti creando seri problemi alle strutture esposte ai differenti ambienti. Recentemente (1970) in tutto il mondo ha destato grande preoccupazione il fenomeno delle piogge acide, prodotte dalle emissioni scandinave, generate dalle zone industrializzate dell'Europa Centrale, che hanno corrosi manufatti in calcare, marmo o calcestruzzo, anche a grande distanza dalle fonti di emissione. Si tratta di una forma d'inquinamento, a carattere transnazionale, dovuta ad un aumento di acidità atmosferica (pH 5,6-5,7). Tale aumento è in relazione appunto con lo sviluppo dell'industria, dei trasporti, dell'energia.

Il principale responsabile dell'acidità atmosferica è l'anidride solforosa, proveniente essenzialmente dall'utilizzazione di combustibili fossili nell'industria e nel riscaldamento domestico che, nell'atmosfera, sotto l'azione della luce solare, può trasformarsi in ione solfato, nel corso di una serie di reazioni. Anche gli ossidi d'azoto, provenienti dai gas di scarico degli autoveicoli, possono esser presenti nelle piogge acide sotto forma di acido nitrico.

Il degrado delle opere d'arte e dei manufatti per azione degli inquinanti dell'aria è stato relativamente mite nei periodi che hanno preceduto il XX secolo. Esso è riconducibile al processo geologico di erosione delle rocce ed interessa principalmente la superficie. E' influenzato da agenti corrosivi, quali: caratteristiche dell'atmosfera, piogge, umidità in risalita dal sottosuolo, corsi d'acqua, acque di laghi e di fiumi.

Gli effetti prodotti dalle condizioni ambientali sono notevolissimi, poiché quantità crescenti di contaminanti, provenienti dalle diverse attività al servizio dell'uomo, entrano nell'aria ed accelerano la velocità di degrado delle strutture. Ne esistono esempi clamorosi. Uno di essi riguarda l'attacco subito dall'obelisco di granito di Cleopatra, trasportato dall'Egitto alla città di New York (1). Dopo aver resistito circa 3500 anni al clima secco dell'Egitto, in meno di 75 anni l'aria umida e carica di agenti chimici della città di New York ha completamente cancellati i riporti gessosi di abbellimento, adagiati, con antica tecnica, sul granito. I sali intrappolati in tali riporti si sono idratati e successivamente, cristallizzando, hanno provocato espansione e successivo sbriciolamento.

Gli esempi dell'azione dannosa del clima su antichi monumenti sono innumerevoli e costituiscono la testimonianza storica degli effetti del suo cambiamento globale e di quello dei contaminanti nell'aria.

Come già sottolineato, le quantità crescenti di inquinanti che entrano nell'aria dalle diverse fonti al servizio dell'uomo, hanno accelerato nell'ultimo secolo il degrado delle strutture. Hanno prodotto sgretolamento in un'antica struttura statuarica come l'Acropoli di Atene, costituita da una massiccia collina di calcare grigio-bluastro, con venature rosate, ergentesi a 150 metri sulla pianura. Ha pareti rigide su tre lati ed una sella verso l'Areopago. Le pendici meridionali furono abitate fin dal tardo neolitico e, nel periodo miceneo, divenne una cittadella simile a quella di Tirinto e Micene. Negli ultimi quarant'anni è stato accertato un degrado per corrosione dei tesori d'arte dell'Acropoli, superiori a quelli prodotti nei 2400 anni precedenti (2), poiché le antiche opere d'arte sono costrette a convivere con l'industria e con il traffico automobilistico.

E' stato anche segnalato che l'aria inquinata ha provocato il degrado di altri monumenti storici, ancora intatti all'inizio del XX secolo, quali il Partenone in Grecia (447-488 a.C.), il Colosseo (69 a.C.) ed i palazzi veneziani in Italia, la Cattedrale di Strasburgo in Francia (3).

Nel corso di questo secolo è stato accertato un sensibile deterioramento delle Piramidi (4), che è stato attribuito all'azione dell'uomo con l'inquinamento ed il turismo. Anche l'acqua ascendente, salata, venendo in contatto con i monumenti calcarei, causa reazioni che generano una cristallizzazione dei sali, che induce pressione e successiva espansione e riduce in polvere il manufatto. Il monumento sepolcrale di Cheope, faraone egiziano della 4^a dinastia (2600 a.C. circa), la più grande delle piramidi di Giza, alta 147 m., è alta oggi m. 136.

La decisione di impiantare una raffineria di petrolio a Mathura (40 km a nord ovest di Agra, in India), ha creato grosse preoccupazioni per gli effetti rovinosi degli inquinanti sulla superficie bianco-latte del Tag Mahall, celebre mausoleo eretto dal sultano Shah Giahan per la sposa, morta nel 1631. E' considerato il capolavoro dell'arte mussulmana in India. In esso si fondono elementi dello stile persiano con quelli locali. E'sormontato da una grande cupola bulbosa, tipica

dell'architettura timuride. La tomba, in marmo bianco, sorge in un vasto giardino e reca intarsi di pietre dure. L'Ispettorato Archeologico Indiano, l'Agenzia governativa che cura la manutenzione del Tag, ha valutato la media mensile del livello di SO_2 in prossimità del monumento, dal 1988 al 1991 (5), alla cui azione è stato attribuito l'ingiallimento del marmo. Al degrado ha partecipato pure l'impatto del livello, insolitamente alto, di SO_2 , attribuibile alla combustione dei pozzi di petrolio nella regione del Golfo, durante la Guerra del Golfo (1993).

Processi di deterioramento del calcestruzzo.

Il degrado dipende da come ed a che livello il calcestruzzo interagisce con l'ambiente circostante.

I processi di degrado si possono suddividere in due categorie: modificazioni dovute ad azioni chimiche, con conseguente trasformazione di componenti del conglomerato ed azioni fisiche che inducono sbriciolamento. Si tratta di due azioni congiunte che attaccano i calcestruzzi, i quali riescono a sopravvivere solo quando le condizioni atmosferiche sono favorevoli.

Fra i meccanismi di degrado attribuibili a fattori chimici e fisici, si annoverano: la carbonatazione, la lisciviazione, il gelo-disgelo, le reazioni dovute a cloruri, l'attacco solfatico, l'alcali-reazione.

L'alterazione dovuta a fattori chimici costituisce un processo secondo il quale agenti atmosferici, idrosferici, biologici, reagiscono con i costituenti del calcestruzzo nell'ambito della zona d'influenza dell'atmosfera, producendo nuove fasi relativamente più stabili. Le modificazioni chimiche che hanno luogo sono essenzialmente: la rimozione dei componenti più solubili e la concomitante addizione di gruppi ossidrilici e, possibilmente, di ossigeno e biossido di carbonio provenienti dall'atmosfera.

Il trasferimento del carbonio fra terra, oceani ed atmosfera è governato dal ciclo geochimico.

Il biossido di carbonio atmosferico diffonde nel calcestruzzo attraverso i pori vuoti della matrice cementizia e reagisce con il cemento idratato. La reazione abbassa l'alcalinità dell'acqua dei pori, ciò che esercita un effetto negativo, particolarmente nel caso di strutture armate, perché distrugge lo strato di ossido passivo che ricopre il tondino e lo lascia in preda alla corrosione.

Nel caso di deterioramento del calcestruzzo per fissazione di CO_2 proveniente da inquinamento atmosferico, il processo può esser descritto come segue:

Degrado per carbonatazione: $\text{CaCO}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2 \rightarrow \text{Ca}^{2+} + 2\text{HCO}_3^-$.

Degrado del silicato: $\text{CaSiO}_3 + \text{H}_2\text{O} + 2\text{CO}_2 \rightarrow \text{Ca}^{2+} + 2\text{HCO}_3^- + \text{SiO}_2$

Degrado del silicato + formazione di carbonato: $\text{CaSiO}_3 + \text{CO}_2 \rightarrow \text{CaCO}_3 + \text{SiO}_2$.

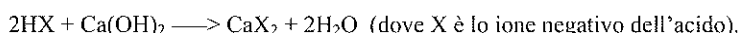
Nel corso del degrado chimico, i minerali silicato e carbonato, qui espressi come CaCO_3 e CaSiO_3 producono ioni bicarbonato (HCO_3^-), ioni calcio (Ca^{2+}) e silice disciolta (SiO_2), che vengono trasportati e liberano CO_2 che eventualmente passa nell'atmosfera, un naturale, lento omologo della combustione del combustibile fossile.

Dal punto di vista del ciclo globale della silice (6), se c'è presenza di solfato che può provenire da minerali, quali gesso ed anidrite, oppure da piogge acide, il processo si complica:

$2\text{CaCO}_3 + \text{H}_2\text{SO}_4 \longrightarrow 2\text{Ca}^{2+} + 2\text{HCO}_3^- + \text{SO}_4^{2-}$.

I tre inquinanti naturali dell'aria, prodotti dall'uomo, che figurano in cima alla lista sono: solfato, nitrato ed ozono. Il solfato, dalla combustione del combustibile fossile, carbone, petrolio, gas, è il maggior agente corrosivo di molti tipi di calcestruzzo, perché esso è suscettibile ad attacco acido per la sua natura alcalina. I componenti della pasta di cemento si disgregano nel corso del contatto

con acidi. La dissoluzione più pronunciata è quella dell'idrossido di calcio, che decorre secondo la seguente reazione:



La decomposizione del calcestruzzo dipende dalla porosità della pasta di cemento, dalla concentrazione dell'acido, dalla solubilità del sale di calcio acido (CaX_2) e dal trasporto di fluido attraverso il calcestruzzo. Acidi come quello cloridrico sono molto aggressivi, poiché i relativi sali di calcio si sciolgono rapidamente e vengono rimossi dal fronte d'attacco. Altri acidi, come quello umico, sono meno dannosi, poiché i relativi sali di calcio, grazie alla loro bassa solubilità, frenano l'attacco perché bloccano le vie d'ingresso all'interno del calcestruzzo (fessure intercomunicanti, vuoti e porosità). L'acido solforico poi è molto dannoso per il calcestruzzo, perché esso combina un attacco acido ed un attacco solfatico (7). Normalmente viene recato dalle piogge acide.

Anche un acido forte come l'acido nitrico è meno dannoso di quello solforico e dei solfati, per effetto della più alta reattività dei solfati verso il calcestruzzo.

Con riferimento alla durabilità dei calcestruzzi, la rilevanza da attribuire alle condizioni climatiche dipende dal comportamento che ci si attende dalla struttura realizzata. Non esiste ancora una classificazione dei climi più favorevoli al degrado, che venga condivisa. Maggiori sforzi dovrebbero pertanto esser compiuti per fissare una relazione durabilità del calcestruzzo-impatto ambientale.

La resistenza alle intemperie è una caratteristica importante di molti tipi di calcestruzzo di recente produzione, normalmente posti sul mercato, corredati delle proprietà meccaniche e fisiche. Raramente però si dispone di informazioni utili ad accertare, con ragionevole sicurezza, la durata di tempo nella quale, presumibilmente, la struttura assolverà soddisfacentemente le sue funzioni nelle diversificate situazioni. Prove sul campo sono un mezzo valido, ma richiedono tempi lunghi e forte dispendio. E' altresì auspicabile la messa a punto di prove sperimentali artificiali, idonee a ridurre i tempi d'attesa, bilanciando convenientemente una serie di parametri (caratteristiche dell'acqua, temperatura, agenti chimici).

Al presente viene condotta una serie di prove artificiali di degrado, al fine di ottenere risposte affidabili sulla previsione di durabilità dell'opera.

Per uno studio sistematico della durabilità, le prove artificiali di degrado offrono condizioni relativamente accettabili per quanto attiene alle condizioni di stabilità ambientale. Il parametro più complesso è però costituito dalla messa a punto di modalità di accelerazione del processo.

Le modificazioni chimiche del sistema vengono controllate dal mezzo di trasporto, costituito dalla fase acquosa.

Quando la durabilità deve costituire la prima caratteristica della struttura da realizzare, le aggiunte ad effetto "pozzolanico" trovano la loro più efficace manifestazione, principalmente dovuta alla presenza di silice ed allumina, che, in virtù della loro struttura amorfa, reagiscono con la calce ed incrementano compattezza. La loro presenza induce alta resistenza ad attacchi chimici, gelo-disgelo e mitiga la reazione alcali-aggregato nei calcestruzzi (8). E' pertanto possibile, in base alle copiose conoscenze nel settore, ottimizzare l'impiego di prodotti a comportamento "pozzolanico", per produrre calcestruzzi con proprietà ancor migliori di quelle ottenibili con tipico cemento Portland. A conferma di tale affermazione sta lo studio condotto sugli effetti del fumo di silice sullo sviluppo microstrutturale del manufatto (9). Si tratta di un prodotto polverulento, costituito da particelle finissime, in gran parte di diametro inferiore a $0.1 \mu\text{m}$, contenenti oltre il 90% di silice amorfa.

Si raccolgono nei filtri di depolverizzazione dei gas negli impianti di produzione di silicio metallico e di leghe ferro-silicio. L'ossido di silicio gassoso SiO , prodotto nel corso della riduzione del quarzo, si ossida a contatto con l'aria e rapidamente condensa sotto forma di particelle di silice non cristallina. Costituisce il prodotto "pozzolanico" più reattivo di cui si possa disporre, grazie all'elevatissima superficie specifica, e nonostante sia generato in quantità relativamente modeste,

presenta interesse commerciale. I maggiori Paesi produttori sono: Norvegia, Stati Uniti, Australia, Francia, Sud Africa, Giappone, Germania, Canada e Svezia.

Le particelle ultrafini del fumo di silice assicurano pertanto protezione a lungo termine. La Fig. 1 mostra la profondità di carbonatazione, determinata con il metodo di neutralizzazione alla fenolfaleina, di una serie di calcestruzzi a rapporto acqua/cemento 0.42, di composizione: cemento-sabbia standard-aggregato 1.0-2.75-2.75 (9).

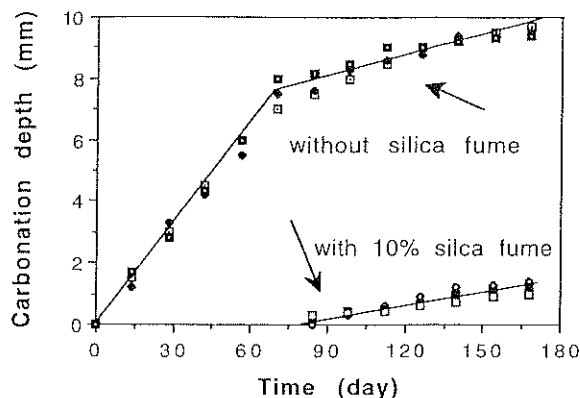


Fig.1 - Profondità di carbonatazione (9).

Conclusioni.

E' fuor di dubbio che nel XX secolo l'aumentata immissione di inquinanti dell'aria, per effetto delle accresciute attività antropiche, ha notevolmente accelerato il degrado delle strutture. Clamorosi casi dimostrano infatti che le odierne atmosfere urbane creano seri problemi ad opere d'arte che per lunghissimo tempo hanno resistito all'ingiuria degli agenti atmosferici ed anche a costruzioni di più recente edificazione.

L'attacco patito è riconducibile al processo geologico di erosione delle rocce ed addebitabile ad azioni concomitanti, sia chimiche di trasformazione di alcuni componenti, sia fisiche di semplice sgretolamento, caratterizzate da differenti meccanismi.

Risalta che, quando la durabilità deve costituire il primo requisito delle nuove costruzioni, è consigliabile il ricorso a cementi compositi ed è auspicabile la redazione di una classificazione degli ambienti di vita della struttura, in funzione della loro severità, per una saggia scelta del tipo di cemento ed una valida ottimizzazione della durabilità del manufatto. Altrettanto utile risulterebbe la messa a punto di prove accelerate di durabilità dei calcestruzzi, in funzione delle condizioni ambientali.

Bibliografia

1. Roy D:M., Jiang W. Concrete chemical degradation: ancient analogues and modern evaluation. In: Mechanisms of Chemical Degradation. Cement-Based Systems. K.L. Scrivener, J.F. Young Eds. E & FN Spon, 14-21. London (1997).
2. The Committee for Preservation of the Acropolis Monuments. The Acropolis at Athens. Ministry of Culture. Athens (1985).
3. Bequette F. Pollution unlimited. In: Environment. J. Allen Ed. The Duskin Publis. Group Inc. Sluice Dock. Guilford, VA (1990).
4. Hawass Z. The Egyptian Monuments: problems and solutions. In: Conservation of Stone and Other Materials. M.J. Thiel Ed. E & FN Spon. 1, 19-26. London (1993).
5. Sharma R.K., Gupta H.O. Dust pollution at the Taj Mahal- a case study. In: Conservation of Stone and Other Materials. M.J. Thiel Ed. E & FN Spon. 1, 11-18 (1993).
6. Wolfast R., Mackensie F.T. The global cycle of silica. In: Silicon Geochemistry and Biochemistry. S.R. Aston Ed. Academic Press. London (1988).
7. Sersale R. La reazione alcali-silice e l'attacco solfatico: due ulteriori cause di degrado chimico del calcestruzzo di cemento. Rend. Acc. Sc. fis. mat., Napoli, 68, 119-127 (2001).
8. Sersale R. Mitigazione della reazione alcali-silice (ASR) in malte e calcestruzzi di cemento. Rend. Acc. Sc. fis. mat., Napoli, 78 (2011).
9. Roy. D.M. Fly ash and silica fume chemistry and hydration. In: SP-114. Malhotra V.M Ed. ACI, 117-138. Detroit (1989).

Calcestruzzo per ricettacoli di rifiuti radioattivi.

Nota di Riccardo Sersale.

(Adunanza del dì 4 Novembre 2011)

Riassunto. La memoria esamina il comportamento di calcestruzzi preparati con cemento Portland ordinario a bassa alcalinità, idonei alla costruzione di ricettacoli sotterranei per l'immagazzinamento di rifiuti ad alta radioattività. Pone in evidenza l'opportunità di ridurre la frazione clinker di cemento e rimpiazzarla con alti contenuti di prodotto cementizio supplementare ad azione "pozzolanica", i quali, a seguito di fissazione di calce con conseguente formazione di silicato di calcio idrato supplementare, riducono l'alcalinità della soluzione dei pori della pasta di cemento e mitigano l'attacco della struttura da parte delle acque freatiche.

Particolarmente idoneo si rivela il taglio del clinker con fumo di silice, poiché esiste una relazione lineare fra alcalinità della soluzione dei pori della pasta di cemento e contenuto di silice dell'aggiunta attiva. Viene pertanto conseguita tanto una modifica della composizione dell'acqua dei pori della pasta di cemento, che diviene più povera di ioni Na^+ , K^+ , Ca^{++} , OH^- , quanto della microstruttura del silicato di calcio idrato, poiché si forma un idrato a più basso rapporto CaO/SiO_2 idoneo ad inglobare ioni alcalini.

Parole chiave: Calcestruzzo. Ricettacoli sotterranei.

Summary.

The behaviour of concrete based on low-pH ordinary Portland cement, suitable for storage of underground repositories of high level radioactive wastes has been examined. The suitability of clinker fraction cut of the cement fabricated and its replacement with cementitious supplementary materials with "pozzolanic" reaction, lime consumption and supplementary calcium silicate hydrate formation, is emphasized. Such a device lowers the alkalinity of the pore solution of cement paste and mitigates ground waters attack.

A high mineral admixture content, particularly silica fume, since a linear relationship exists between pore solution alkalinity of cement paste and silica content is recommended. A change in pore fluid composition which becomes poorer in Na^+ , K^+ , Ca^{++} and OH^- as well in the calcium silicate hydrate microstructure occurs, favouring a lower CaO/SiO_2 ratio hydrated calcium silicate, suitable for alkaline ions incorporation.

Key words. Concrete. Radioactive waste repositories.

Caratteristica irrinunciabile che si richiede ai ricettacoli per rifiuti ad alta radioattività è una accettabile resistenza della struttura all'attacco delle acque freatiche. Un ricettacolo realizzato in calcestruzzo di cemento Portland ordinario subisce infatti un'aggressione rilevabile dall'elevata alcalinità del lisciviato, con un aumento del pH dell'acqua dei pori della pasta di cemento fino a 13,5 (1).

Un'alcalinità tanto alta può danneggiare una delle barriere che compongono il ricettacolo, particolarmente quella realizzata in bentonite.

Si tratta di una roccia della famiglia delle argille, composta essenzialmente da un minerale argilloso del gruppo delle smectiti, solitamente montmorillonite o beidellite, derivato dall'alterazione di materiale vulcanico. In presenza di acqua la bentonite si rigonfia fino a dieci volte il suo volume ed aderisce fortemente, arrestando la perdita. Per le sue caratteristiche fisiche e chimiche (plasticità, adsorbimento) è anche largamente impiegata per l'eliminazione in loco di infiltrazioni in giunti e tubazioni.

La soluzione proposta per conferire alla bentonite una duratura stabilità, funzione dell'alcalinità, è quella di preparare un calcestruzzo che consenta il mantenimento di un'alcalinità dell'acqua presente nella soluzione dei pori della pasta di cemento uguale od inferiore ad 11, poiché, al di sotto di questo valore di pH (2), la modificazione dei componenti dell'argilla, responsabili della perdita di attitudine a rigonfiare, risulta notevolmente ridotta.

Costituiscono pertanto argomento di studio fattibilità e messa in opera di materiali cementanti a basso pH, per la costruzione di ricettacoli sotterranei che non vadano soggetti a questi inconvenienti (3).

La ricerca su materiali cementizi a basso pH si è inizialmente sviluppata in Canada (4) ed in Giappone (5) ed oggi si orienta in differenti direzioni, in funzione del tipo di cemento: cemento Portland ordinario (silicati di calcio), cementi di alluminati di calcio, caratterizzati dalla presenza di monocalcioalluminato, cementi fosfatici e cementi magnesio-fosfatici (espansivi).

Parecchi studiosi hanno posto in luce che il contatto del cemento Portland ordinario con acque freatiche, è responsabile della formazione di fluidi super-alcalini, generati dalla lisciviazione degli idrossidi di sodio e di potassio (6). Quando questi idrossidi alcalini vengono lisciviati, il pH della soluzione dei pori del calcestruzzo è governato dalla dissoluzione di una delle principali fasi della pasta di cemento Portland, la portlandite (Ca(OH)_2), e genera un picco alcalino che raggiunge un pH pari a 12.6. Fra un pH 12.6 e 10 ha luogo la dissoluzione del calcio di costituzione del gelo C-S-H (7). E' pertanto evidente che per diminuire il pH dell'acqua dei pori della pasta di cemento e portarlo ad un valore prossimo ad 11, risulta necessario tanto l'impiego di cementi a basso contenuto d'alcali, quanto l'eliminazione della portlandite, la principale fonte di ioni ossidrilici.

E' noto che per consumare portlandite si possono impiegare aggiunte minerali. La frazione di clinker di cemento Portland ordinario viene infatti ridotta e sostituita da aggiunte minerali ad azione "pozzolanica", con successiva combinazione della portlandite (la calce d'idrolisi), con la silice dell'aggiunta attiva e neo-formazione aggiuntiva di silicato di calcio idrato, con impegno di calce d'idrolisi (8).

L'alto contenuto di aggiunte minerali impiegate nella fabbricazione dei cementi abbassa l'alcalinità (pH 10-12) e notevolmente modifica la microstruttura delle paste di cemento a basso pH, che risulta assai diversa da quella del cemento Portland ordinario. Si registra una forte differenza nei silicati di calcio idrati (C-S-H) originati per idratazione, la principale fase legante di tutti i cementi a base di Portland. Il rapporto C/S del C-S-H nelle paste di cemento Portland ordinario varia da 1.2 a 2.3 (9). Al contrario, nelle paste di cemento a basso pH, questo rapporto varia da 1.2 a 0.8. Per realizzare un basso pH nel cemento, il rapporto C/S deve risultare inferiore ad 11. I geli C-S-H con tale rapporto CaO/SiO_2 sono considerati formati da catene di tetraedri di silice di maggiore lunghezza (10).

L'introduzione di un alto contenuto d'aggiunta minerale provoca pertanto rilevanti cambiamenti nella microstruttura delle paste di cemento a basso pH. Essa differisce notevolmente, come già sottolineato, da quella delle paste di cemento ordinario.

Più alto il contenuto di silice del legante, più basso il valore del pH del fluido dei pori della pasta di cemento. Tale effetto è più accentuato per stagionature di lunga durata (> 90 giorni). Da 90 giorni a 2 anni, il pH del fluido dei pori rimane stabile. Questo fatto indica che, nella formulazione del calcestruzzo, il tenore di silice deve superare il 45% per ottenere, a 90 giorni, un pH sotto 12.5, ciò che conferma che la portlandite nella pasta di cemento è stata tutta consumata.

In miscele binarie costituite da cemento Portland ordinario e fumo di silice, raggiungere tale contenuto di silice comporta che il tenore di fumo di silice impiegato nella formulazione del cemento non può scendere al di sotto del 40%. E' stato valutato (11) che per consumare totalmente la portlandite ed ottenere valori di pH del fluido dei pori inferiori ad 11, dovrebbe esser presente un contenuto di silice (inclusa la silice del fumo, quella del cemento e di altre aggiunte "pozzolaniche") maggiore di circa il 50%.

Le fasi cristalline presenti nelle paste di cemento Portland ordinario con aggiunte minerali mostrano che il contenuto di portlandite diminuisce con la durata della stagionatura e scompare completamente a 90 giorni in quelle con contenuto di silice uguale o superiore al 55%, mentre nel

campione di riferimento il picco della portlandite aumenta con la durata dell'idratazione. I picchi attribuibili ai granelli anidri di cemento Portland ordinario, belite ed alite, sono pur stati osservati, anche se sono meno chiaramente riconoscibili nelle paste di riferimento ed esistono nei campioni ad alto contenuto d'aggiunta minerale anche a lunghe stagionature. Picchi attribuibili all'ettringite potrebbero anche esser presenti nelle paste.

Un importante risultato è dunque, nelle miscele a basso pH, il decremento o la scomparsa della portlandite quando si impiegano aggiunte minerali ad alto contenuto di silice.

Con riferimento al contenuto d'alcali nel fluido dei pori di paste di cemento Portland a basso pH, va sottolineato che il processo di fissazione di alcali è più sentito quando il rapporto C/S dei geli di C-S-H si situa fra 1.2 e 0.85, come si registra nei cementi a basso pH. E' pertanto possibile che nei geli C-S-H gli ioni Na^+ e K^+ siano gradualmente legati e probabilmente sostituiti da Ca nella soluzione dei pori, per effetto di una necessità di elettroneutralizzazione del sistema, ciò che si accorda con l'aumento di Ca nel fluido dei pori.

Recenti ricerche, analizzando il lisciviato, hanno segnalato un rilascio di calcio nella soluzione liscivante, costituita da acqua deionizzata, da parte di materiali cementanti a basso pH, così come un processo di decalcificazione governato da diffusione. Il flusso di Ca veniva non solo bilanciato dal rilascio di ioni ossidrilici, ma anche da quello di ioni solfato (3). La decalcificazione di paste di cemento a basso pH è però molto più lenta di quella del cemento Portland ordinario. In corrispondenza delle superfici liscivate delle paste di cemento a basso pH è stata anche rilevata una scomparsa di ettringite ed un arricchimento di fase di tipo idrotalcite (3). Nelle prove di lisciviazione, impiegando acque freatiche imitate, è stata confermata la lisciviazione di Ca (12).

Una recente ricerca (1) è stata rivolta a rilevare ed esaminare la microstruttura di cementi a basso pH ed a studiare l'evoluzione del fluido dei pori sia in miscele binarie, costituite da cemento Portland ordinario addizionato di fumo di silice, sia in miscele ternarie composte da cemento Portland ordinario, fumo di silice e cenere volante. Ciò al fine di accertare l'attitudine di tali cementi compositi a realizzare calcestruzzi idonei alla produzione di ricettacoli sotterranei per l'immagazzinamento di rifiuti radioattivi. Tenuto inoltre conto che per tali strutture ci si aspetta una ragionevole durabilità, la ricerca ha anche analizzato i parametri afferenti a tale caratteristica, valutandone la resistenza all'attacco da parte di acque freatiche. Le prove di lisciviazione sono state anche utilizzate per esaminare le modificazioni prodotte sia nella microstruttura di calcestruzzi a bassa alcalinità, sia nella composizione del fluido dei pori, dopo esposizione dei provini ad un flusso costante di acqua freatica.

Al fine di condurre prove in condizioni quanto più prossime a quelle reali, la resistenza alle acque freatiche è stata valutata impiegando quella proveniente da un sito noto (Aspo in Svezia). Il degrado che ha interessato due tipi di calcestruzzo a basso pH è stato determinato con differenti modalità operative.

E' stato impiegato cemento Portland ordinario a basso contenuto di alcali e di alluminato, una frazione del quale è stato sostituito da alto quantitativo di aggiunta minerale. La composizione dei prodotti utilizzati è riportata in Tab.1.

Tab.1 – Composizione chimica delle aggiunte minerali

	SiO₂	Al₂O₃	Fe₂O₃	CaO	MgO	Na₂O	K₂O
OPC	18.0	4.85	5.26	62.4	1.84	0.18	0.35
SF	91.8	0.59	3.74	1.31	0.93	0.15	0.37
FA	54.3	26.9	5.38	4.52	2.24	0.61	3.17

Acqua deionizzata è stata impiegata per la preparazione delle paste, utilizzando un rapporto 0.5. Tutti i provini sono stati stagionati in camera a 98% di RH e 21°C di temperatura, fino al momento della prova. Le modificazioni di composizione del fluido dei pori e delle fasi solide dopo differenti giorni d'idratazione (2, 7, 30, 90 giorni e 2 anni) sono state valutate su pasta. Il fluido dei pori è stato estratto usando la Pore Fluid Expression Technique (13).

La composizione ionica del fluido dei pori è stata determinata computando pH, OH⁻, Ca, K, Na ed SO₄ mediante cromatografia ionica ed Si⁻ per fotometria. Determinazioni di analisi termica differenziale, termoponderale e raggi X sono state impiegate per seguire l'evoluzione della composizione e della microstruttura delle fasi solide delle paste preparate. Alcune paste sono anche state osservate in microscopia elettronica attraverso elettroni retrodiffusi e microanalisi in EDX, per determinare il rapporto C/S nel gelo C-S-H.

L'insieme delle risultanze sperimentali converge nell'indicare che:

- la formulazione di cementi a basso pH, a base di cemento Portland ordinario, richiede l'impiego di aggiunte minerali ad alto contenuto di silice reattiva, poiché esiste una relazione lineare fra il pH della soluzione dei pori di leganti a bassa alcalinità ed il loro contenuto di silice (14);
- nei cementi ad alto contenuto di fumo di silice si genera un'acqua dei pori della pasta di cemento a basso pH (intorno a 12);
- la microstruttura di paste di cemento a basso pH risulta assai differente da quella delle corrispondenti paste di cemento Portland ordinario. In calcestruzzi a basso pH il C-S-H originato per idratazione del cemento reca rapporti CaO/SiO₂ fra 1.2 e 0.8, od anche più bassi;
- il tenore d'alcali della acqua dei pori delle paste di cemento a basso pH non costituisce un fattore di controllo del pH come nei materiali cementanti a base di cemento Portland ordinario ed è possibile che, nei geli di C-S-H di cementi a basso pH gli ioni Na e K vengano gradualmente legati e probabilmente sostituiscono gli ioni Ca;
- dalle prove di lisciviazione si rileva un'accettabile resistenza dei calcestruzzi a basso pH alle acque freatiche, benché si possa osservare un fronte alterato in corrispondenza della superficie di tutti i provini;
- nei geli di C-S-H presenti sul fronte alterato è ipotizzabile l'incorporazione di ioni magnesio ceduti dall'acqua freatica e la possibile formazione di fasi M-S-H (15).

Bibliografia

1. Garcia Calvo J.L., Hidalgo A., Alonso C., Fernandez Luco. Development of low-pH cementitious materials for HLRW repositories. Resistance against ground waters aggression. *Cement Concrete Res.*, 40, 1290 (2010).
2. Ramirez S., Cuevas J., Vigil R., Leguey S. Hydrothermal alteration of "La Serrata" bentonita (Almeria, Spain) by alkaline solution. *Appl. Clay Sci.*, 2, 257 (2002).
3. Codina M., Cau-dit-Coumes C., Le Bescop P., Verdier J., Olivier J.P. Design and characterization of low-heat and low-alkalinity cements. *Cement Concrete Res.*, 38, 437 (2008).
4. Gray M.N., Shenton B.S. For better concrete, take out some of the cement. *Proc. 6th ACI/CANMET Symposium on the Durability of Concrete*. Bangkok, Thailand, May 31-June 5 (1998).
5. Iriya K., Matsui A., Mihara M. Study on applicability of HFSC for radioactive waste repositories. *Radioactive Waste Management and Environmental Remediation*. ASME Conferente, Nagoya, Japan, September 16-30 (1999).
6. Braney M.C., Haworth A., Jefferies N.L., Smith A.C. A study of the effect of an alkaline plume from a cementitious repository on geological materials. *J. Contam. Hydrol.* 13, 379 (1993).
7. Faucon P., Adenot F., Jacquinet J.F., Petit J.C., Cabrillac R., Jorda M. Long-term behaviour of cement pastes used for nuclear waste disposal: review of physico-chemical mechanisms of water degradation. *Cement Concrete Res.*, 28, 847 (1998).
8. Sersale R. Blended cements. In: *Progress in Cement and Concrete*. Cement and Concrete Science and Technology. 1. Part 1, 314. Ghosh Ed. ABI Books pvt.Ltd. New Dehli (1991).
9. Klur I., Pollet B., Virlet J., Nonat A. C-S-H structure evolution with calcium content by multinuclear N.M.R. In: P. Colombet Ed. Springer, Berlin, 119 (1998).
10. Cong X., Kirkpatrick R.J. ²⁹Si MAS NMR study on the structure of calcium silicate hydrate. *Adv. Cem. Based Mater.*, 3, 3/4, 144 (1996).
11. Saeki T., Monteiro P.J.M. A model to predict the amount of calcium hydroxide in concrete containing mineral admixtures. *Cement Concrete Res.*, 35, 1914 (2005).
12. Yamamoto T., Imoto H., Ueda H., Hironaga M. Leaching alteration of cementitious materials and release of organic additives. *Proc. R&D on Low-pH Cement for Geological Repository*. 3rd Workshop June 13, 52 Paris (2007).
13. Barneyback R.S., Diamond S. Expression and analysis of pore fluids from hardened cement pastes and mortars. *Cement Concrete Res.*, 11, 279 (1981).
14. Cau Dit Coumes C., Sorgenti M., Prenè S., Bourbon X. Formulating a low-alkalinity and low-heat cement. Literature Review. R&D Program and Preliminary Results. *Proc. Qualification of Low-pH Cement for a Geological Repository*. Workshop. Suède. October 15 (2003).
15. Zhang T., Cheeseman C.R., Vanderre L.J. Development of low-pH cement systems forming magnesium silicate hydrate (M-S-H). *Cement Concrete Res.*, 41, 439 (2011).

I carteggi Cesàro-Torelli, Landau-Torelli

Luciano Carbone¹–Maria Rosaria Enea²–Romano Gatto³

Presentato dal socio Luciano Carbone
(adunanza del 4 novembre 2011)

Key words: Torelli, Cesàro, Landau, teoria dei numeri, corrispondenza.

Abstract: In this work, we describe the papers of Neapolitan mathematician Gabriele Torelli, now in Florence, and publish the letters that Cesàro and Landau wrote to Torelli between 1884 and 1905. Main topics of the correspondence are their researchs about number theory and, especially, about the distribution of prime numbers. Another important item discussed in the letters is the composition of some relevant books. Great space is dedicated to questions relating to the assignation of some university chairs.

Riassunto: In questo lavoro descriviamo il fondo del matematico napoletano Gabriele Torelli, conservato a Firenze, e presentiamo le lettere che Cesàro e Landau scrissero a Torelli tra il 1884 e il 1905. La corrispondenza tratta soprattutto di alcune questioni relative alle loro ricerche in teoria dei numeri e in particolare intorno alla distribuzione dei numeri primi. Un altro tema discusso nelle lettere è la composizione di alcuni importanti testi universitari. Molto spazio è dedicato anche a varie questioni concernenti concorsi universitari.

1. Introduzione

Quando agli inizi degli anni Novanta fu ritrovato il fondo Cesàro apparve subito evidente la rilevanza scientifica e culturale dei carteggi

¹ Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Cacioppoli”, Università degli Studi di Napoli “Federico II”- Complesso Universitario di Monte Sant’Angelo, via Cintia, Napoli; mail: luciano.carbone@unina.it.

² Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi della Basilicata Macchia Romana, via dell’Ateneo Lucano, Potenza; e-mail: maria.enea@unibas.it.

³ Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi della Basilicata Macchia Romana, via dell’Ateneo Lucano, Potenza; e-mail: romano.gatto@unibas.it

Cesàro-Torelli, Cesàro-Landau, Torelli-Landau, Cipolla-Cesàro che apparivano tra loro intimamente connessi. Nel fondo erano presenti un cospicuo numero di lettere inviate da Torelli a Cesàro, qualche lettera dell'allora giovanissimo Cipolla allo stesso Cesàro, alcune minute di risposta a Torelli e Landau da parte di Cesàro. Furono cercate le lettere di Cesàro a Torelli, ma inutilmente. Nel 1996 furono allora pubblicati e analizzati solo i materiali contenuti nel fondo Cesàro e furono formulate varie congetture sui contenuti dei documenti al momento non ritrovati ([Carbone *et al.* 1996]).

Nel corso di quest'anno è stata evidenziata la presenza presso la Biblioteca di Matematica dell'Università degli Studi di Firenze di una parte esigua dell'epistolario di Gabriele Torelli, donato dalla figlia Beatrice.

Esso si compone di 124 lettere che coprono un arco cronologico che va dal 1863 al 1929, una delle quali di un mittente non identificato. È stato riordinato, dal personale della biblioteca probabilmente tra la fine degli anni settanta e gli inizi degli anni ottanta, in 36 cartelle nominative.

Fortunatamente in questo gruppo di lettere si sono conservate quelle inviate da Cesàro e Landau a Torelli e due lettere di Landau a Cesàro, trasmesse da quest'ultimo a Torelli. Si tratta dunque proprio delle lettere "mancanti".

Le lettere risultano in ottimo stato di conservazione, ben leggibili salvo i naturali problemi d'interpretazione di singole gra

Nell'elenco che segue vengono dati nome e cognome o ragione sociale dei corrispondenti, consistenza della corrispondenza, data della prima e dell'ultima missiva presenti in questo fondo Torelli

ALAGNA	Rosario	1	4.4.1900	
BASSANI	Francesco	1	16.3.1903	
BELLAVITIS	Giusto	4	15.7.1867	19.12.1869
BERTINI	Eugenio	3	[1877]	28.10.1892
BLANCHI	Luigi	1	19.8.1883	
CAPORALI	Ettore	15	24.12.1878	25.6.1886
CASORATI	Felice	2	12.4.[1880]	6.8.1880
CASSANI	Pietro	1	22.10.1876	
CESÀRO	Ernesto	31	12.7.1884	20.7.1905
CREMONA	Luigi	6	16.6.1869	28.2.1891
DE JONQUIÈRE	Ernest	1	8.10.1885	

DEL RE	Alfonso	1	20.5.1897	
D'OVIDIO	Enrico	11	13.1.1894	13.5.1911
FIEDLER	William	4	30.9.1877	21.8.1879
FRANEL	J.	1	7.3.1905	
FUCHS	Lazarus	1	17.10.1889	
GAZZANIGA	Paolo	1	3.5.1910	
GENOCCHI	Angelo	1	3.6.1874	
GERBALDI	Francesco	2	30.2.1895	4.11.1898
GUCCIA	Giovan Battista	5	8.5.1884	26.10.1895
HERMITE	Charles	1	28.6.1889	
HIRST	Thomas Archer	1	18.3.1877	
JUNG	Giuseppe	4	22.12.1874	1.4.1891
LANDAU	Edmund	6	27.12.1902	31.7.1905
MAISANO	Giovanni	4	23.1.1895	16.3.1915
MAYER-MÜLLER VERLAG		1	24.3.1903	
MITTAG- LEFFLER	Gösta	1	24.2.1903	
NOETHER	Emmy	1	23.11.1912	
PADELLETTI	Dino	3	[1882-83]	16.6.1891
PINTO	Luigi	1	[1880-81]	
PITTARELLI	Giulio	1	23.11.1888	
SARDI	Ciro	1	2011.1863	
SCARPIS	Umberto	3	4.11.1911	2.3.1912
VITELLI	Girolamo	1	13.8.1929	
WORKMAN	W.P.	1	23.4.1887	

Segnaliamo una lacuna particolarmente significativa nel fondo ovvero la mancanza della corrispondenza con Michele Cipolla che, tra gli allievi di Torelli, fu sicuramente quello scientificamente e umanamente a lui più legato.

Vengono qui presentati i carteggi Cesàro-Torelli e Landau-Torelli che completano così i carteggi rinvenuti nel fondo Cesàro e già pubblicati in [Carbone *et al.* 1996] e qualche altra lettera ad essi collegata.

Si tratta più precisamente di:

- 31 lettere inviate da Ernesto Cesàro a Gabriele Torelli

- quattro lettere inviate da Edmund Landau a Gabriele Torelli
- due lettere inviate da Edmund Landau a Ernesto Cesàro e da questi trasmesse a Torelli, la cui mancanza era stata esplicitamente segnalata in [Carbone *et al.* 1996]
- una lettera di Gösta Mittag-Leffler a Gabriele Torelli
- una lettera della casa editrice Mayer-Müller a Gabriele Torelli.

Nell'edizione di questi materiali abbiamo seguito un criterio strettamente diplomatico; non abbiamo perciò né razionalizzato la punteggiatura né aggiornato l'ortografia né sciolto le abbreviazioni. Qualche raro intervento è stato inserito tra parentesi quadre.

È appena il caso di osservare che, come per lo più accade, il complesso delle lettere conservate presenta delle lacune rispetto al complesso delle lettere effettivamente scritte. Va inoltre segnalato che Torelli e Cesàro ebbero numerosi incontri personali e di conseguenza molte delle questioni accennate in maniera scritta furono probabilmente affrontate anche oralmente.

Per facilitare la lettura dei carteggi, abbiamo qui compilato:

- (a) un indice cronologico combinato delle lettere qui presentate e delle lettere pubblicate in [Carbone *et al.* 1996];
- (b) un indice dei nomi di persona citati in tale complesso di lettere con l'indicazione specifica delle lettere nelle quali il nome stesso è presente; tale indice, voce per voce, è arricchito da cenni biografici, utili alla comprensione dei fatti, e da una indicazione bibliografica;
- (c) una bibliografia integrata delle voci richiamate qui e in [Carbone *et al.* 1996];
- (d) brevi note biografiche concernenti i corrispondenti epistolari di Gabriele Torelli: Ernesto Cesàro, Michele Cipolla e Edmund Landau.

Le questioni rilevanti che emergono dal carteggio sono state già ampiamente analizzate in [Carbone *et al.* 1996]; ci limitiamo a ricordarle per completezza:

- le complesse vicende concorsuali che si conclusero con il trasferimento di Ernesto Cesàro all'Università di Napoli e col conseguimento da parte di Gabriele Torelli della cattedra di professore straordinario di Algebra complementare a Palermo mentre rimanevano frustrate (almeno temporaneamente) le aspirazioni di trasferimento su questa stessa cattedra di Giovanni Maisano, all'epoca professore presso l'Università di Messina

- le osservazioni didattiche e bibliografiche connesse alla revisione che Torelli fece dei testi di Analisi algebrica e Calcolo scritti da Cesàro e da lui adottati a lezione
- il crescente interesse di Torelli verso la teoria dei numeri che, sostenuto da Cesàro, lo porterà a pubblicare la vasta e documentata monografia *Sulla totalità dei numeri primi fino a un limite assegnato* e a indirizzare verso lo studio di queste teorie Michele Cipolla, il suo più valente allievo.
- le osservazioni critiche di Landau alla nota di Cesàro, *Sulla distribuzione dei numeri primi*, e di conseguenza alla monografia di Torelli
- gli inizi delle attività di ricerca di Michele Cipolla.

Qui ci soffermeremo allora su alcuni aspetti della vita privata e accademica di Gabriele Torelli servendoci di appunti da lui stesso redatti nell'agosto del 1927 e recanti il titolo *Ricordi (1849-1927)*. Queste note ci sono stata fornite da un nipote omonimo di Torelli⁴, si tratta di due fascicoletti: il primo, dattiloscritto⁵, contiene notizie biografiche; il secondo, manoscritto, ripercorre la sua opera scientifica, e ne fornisce una bibliografia, arricchita per lo più da brevi cenni sugli argomenti trattati nei singoli lavori.

È molto probabile che Torelli, come era d'uso, abbia compilato questi due fascicoletti sia per lasciare memoria degli eventi in ambito familiare sia per facilitare e indirizzare il lavoro di chi avrebbe avuto il compito di scrivere il suo necrologio. In effetti si ha l'impressione leggendo i necrologi composti da Cipolla e da Marcolongo ([Cipolla 1932], [Marcolongo 1932]) che ne abbiano per l'appunto tenuto conto.

Nelle note biografiche che ci accingiamo a dare cercheremo allora di fornire quelle notizie che a quel tempo potevano apparire comuni o poco interessanti (e dunque sono cadute) ma che col trascorrere degli anni sono diventate assai meno chiare o hanno acquisito un diverso interesse, in particolare quelle concernenti i suoi studi. È quello di Torelli infatti un classico esempio di un *curriculum* scolastico comune nelle famiglie agiate

⁴ Si tratta del professore Gabriele Torelli, ordinario presso il Dipartimento di Fisica "E. Fermi" dell'Università di Pisa, figlio di Guido Torelli, laureato in chimica all'Università di Bologna, e direttore, nel 1927 (data a cui risalgono i *Ricordi*), di una fabbrica di fiammiferi a Benevento.

⁵ La trascrizione è dovuta a Romana Torelli, moglie del Gabriele, nipote, che, riferendosi all'originale, scrive: "L'originale di queste memorie è fra quella parte delle carte di famiglia che ci è stata consegnata da zia Bice. Quasi sicuramente si tratta di una prima stesura; il testo è redatto su fogli di carta a righe, utilizzati solo nella metà destra; sono moltissime le correzioni, le cancellature, le aggiunte di interi periodi."

dell'Italia preunitaria (o quanto meno a cavallo dell'unificazione) quasi del tutto fondato su insegnamenti dati da docenti privati, sistema che di lì a poco sarebbe stato sostituito in larghissima misura da quello fondato sull'insegnamento pubblico.

Peraltro, utilizzando i materiali epistolari reperiti nel fondo, daremo qualche ulteriore dettaglio sulla vicenda concorsuale su accennata, sui suoi prodromi e sugli sviluppi successivi.

2. Gabriele Torelli

Gabriele Torelli nacque a Napoli il 26 marzo del 1849 da Baldassarre e da Caterina Mazzelli.

Il padre, che giocò un ruolo importante nella sua formazione, era un avvocato specializzato in questioni di Diritto Canonico: apparteneva alla così detta "Scuola dei Giannottisti", la quale sosteneva i diritti dello Stato contro le invadenze del clero nelle relazioni tra Stato e Chiesa⁶.

Dopo aver collaborato col Ministro delle finanze Giovanni D'Andrea⁷, fu nominato, nel 1840, *Ufficiale di carico* nel Ministero degli Affari ecclesiastici, arrivando al grado di *Capo di ripartimento* (capo divisione) nel 1860. Fu Segretario Capo alla Cassa Ecclesiastica per le provincie meridionali fino al 1866 anno in cui, per ragioni di salute, chiese ed ottenne il collocamento a riposo.

Nella famiglia paterna di Torelli vi sono vari giuristi e letterati, tra questi ricordiamo Eugenio Torelli Viollier⁸ (cugino di Gabriele) che fondò e diresse a Milano, quasi fino al 1900, il *Corriere della Sera*.

⁶ Pietro Giannone (1676-1748) filosofo, storico e giurista, fu un esponente di spicco dell'Illuminismo italiano. Nella sua opera più conosciuta, *Dell'istoria civile del regno di Napoli*, unendo storia politica e storia ecclesiastica, mostrò come le istituzioni ecclesiastiche avessero invaso l'ambito proprio dello stato, determinando, così, a suo avviso una situazione di arretratezza. Il termine *giannottisti* era utilizzato in modo sprezzante dal partito della Curia per definire i lettori consenzienti dell'opera.

⁷ Giovanni D'Andrea (1776-1841). Dopo gli studi di Giurisprudenza all'Università di Napoli, fu nominato, nel 1803, giudice della Gran Corte della Vicaria. Fu Ministro delle Finanze dal 1821 fino 1822, quando Luigi de' Medici assunse tale carica. Tornò alla guida dello stesso Ministero nel 1830, con l'avvento al trono di Ferdinando II.

⁸ Eugenio Torelli Viollier (1842-1900). Giornalista e uomo politico italiano. Figlio dell'avvocato Francesco Torelli, cugino di Gabriele, e di Josephine Viollier. Garibaldino, entra a far parte dell'amministrazione provvisoria di Napoli nel 1861. Dopo aver lavorato per il quotidiano partenopeo *L'Indipendente*, fondato da Alexandre Dumas, diventa nel 1866 redattore e direttore responsabile di due periodici di Edoardo

I primi precettori di Gabriele Torelli furono proprio il padre e il cugino Eugenio. Nel 1859 cominciò a frequentare lo studio privato dell'Abate Antonio Mirabelli⁹ famoso sia come grande conoscitore dell'antica Roma sia come scrittore in lingua latina. Oltre a corsi di Fisica e Storia naturale, nel 1863 Torelli cominciò a frequentare le lezioni di matematica che impartiva nel suo studio privato Achille Sannia¹⁰.

Anche Torelli avrebbe dovuto studiare, per restare fedele alle tradizioni di famiglia, Giurisprudenza, ma la sua passione per la matematica e l'insistenza di Sannia a non abbandonare tali studi convinsero anche il padre a lasciarlo proseguire. Così nel 1864-65 seguì, sempre nello studio di Sannia, i corsi di Algebra complementare, di Geometria analitica e di Calcolo infinitesimale, per poi passare, l'anno dopo, all'Università di Napoli.

Nell'anno accademico 1865-67 all'università seguì i corsi di Meccanica razionale di Fortunato Padula¹¹, Teoria e disegno di Geometria descrittiva di Achille Sannia, che intanto per ragioni di salute aveva chiuso lo studio privato, Analisi superiore di Emmanuele Fergola, Geometria superiore di Giuseppe Battaglini, Fisica sperimentale di Giuliano Giordano¹² e Chimica inorganica di Sebastiano De Luca¹³. Nel successivo

Sonzogno, *L'Illustrazione universale* e *L'Emporio pittoresco*. Nel 1871 comincia a lavorare per il principale quotidiano milanese, *Il Secolo*, edito sempre da Sonzogno, e collabora con *Il Gazzettino rosa* di Bizzoni e Cavallotti. Nel 1872, per divergenze politiche, passa al *Corriere di Milano* e nel 1875 ottiene la direzione di *La Lombardia*, appena acquisito da Riccardo Pavesi. Nel 1876 fonderà con Pavesi, Riccardo Bonetti e Pio Morbio, il *Corriere della Sera*, giornale improntato ai valori della Destra ma capace di dialogo e confronto costruttivo con la Sinistra.

⁹ Antonio Mirabelli (1812-1883) fu chiamato nel 1872 sulla cattedra di Letteratura latina all'Università di Napoli.

¹⁰ Achille Sannia (1823-1892). Dal 1856 diresse a Napoli uno dei più importanti studi privati di Matematica. Nel 1865 fu chiamato sulla cattedra di Geometria proiettiva dell'università. Fu Senatore del Regno ([Tricomi 1962]).

¹¹ Fortunato Padula (1815-1881). Insegnò dapprima Matematica al Collegio Militare e in quello di Marina a Napoli, poi nel 1860 fu nominato professore di Meccanica razionale all'Università di Napoli. Dal 1864 fu direttore della Scuola degli Ingegneri di Napoli ([Tricomi 1962]).

¹² Giuliano Giordano (1812-1878). Fu dal 1850 professore di Fisica sperimentale e direttore del relativo Gabinetto all'Università di Napoli ([Gatto 2000] pp. 360-372).

¹³ Sebastiano De Luca (1820-1880). Compiuti i primi studi a Catanzaro, li completò a Napoli dal 1838 al 1842 studiando chimica con Raffaele Piria. Avendo partecipato attivamente ai moti del 1848, fu costretto a rifugiarsi a Parigi dove ebbe inizio, nel 1850, la sua carriera scientifica come allievo e collaboratore di M. Berthelot. Nel 1857,

anno accademico invece seguì, oltre a due nuovi corsi di Analisi e Geometria superiore, Astronomia tenuto da Annibale De Gasparis¹⁴, Meccanica celeste e Fisica matematica tenuti, rispettivamente, da Remigio del Grosso¹⁵ e Michele Zannotti¹⁶.

Torelli conseguì la laurea nel dicembre del 1867; questa e quelle conseguite da Luigi Rajola¹⁷, Angelo Armenante¹⁸ e Giuseppe Jung¹⁹ furono le prime quattro lauree conferite dall'Università di Napoli dopo il suo riordino²⁰.

La sua carriera di insegnante cominciò qualche mese prima della laurea: all'inizio del 1867 risultò idoneo, secondo dopo Enrico D'Ovidio, per un posto di professore di Matematica nel Ginnasio Giannone di Napoli, e nell'ottobre dello stesso anno venne nominato professore di matematica nella Scuola tecnica municipale Flavio Gioia appena fondata. Nel 1870 fu trasferito nel Convitto municipale di marina mercantile Francesco Caracciolo.

L'anno dopo vinse, *ex-aequo* con Davide Besso²¹, il concorso per titoli bandito dal Ministero dell'Agricoltura, Industria e Commercio per

grazie a Piria, ottenne la cattedra di Chimica all'Università di Pisa, nel 1862 si trasferì a Napoli ([DBI voce a cura di R.A. Nicolaus]).

¹⁴ Annibale De Gasparis (1819-1892). Fu nominato nel 1853 professore di Matematica, Geodesia e Astronomia all'Università di Napoli, dal 1864 fu anche direttore dell'Osservatorio astronomico di Capodimonte ([DBI voce a cura di S. Mancuso]).

¹⁵ Remigio del Grosso (1813-1876). Dal 1840 lavorò all'osservatorio di Capodimonte come aiutante di Annibale de Gasparis e dal 1843 al 1845 andò all'osservatorio Ximeniano di Firenze con Giuseppe Inghirami. Nel 1860 fu nominato professore all'Università di Napoli, prima di Meccanica applicata e poi nel 1863 anche di Meccanica celeste ([Gatto 2000]).

¹⁶ Michele Zannotti (1803-1874). Nel 1860 gli fu affidata la prima cattedra di Meccanica razionale dell'Università di Napoli e poi, dal 1862 quella di Fisica e Matematica ([Gatto 2000]).

¹⁷ Luigi Rajola Pescarini. Fu professore di Matematica al liceo Umberto I di Napoli.

¹⁸ Angelo Armenante (1844-1878). Laureatosi in Matematica a Napoli, insegnò nei Licei di Parma, Chieti e Roma. Nel riordino dell'Università di Roma, nel 1870, fu prima incaricato di Analisi superiore e poi straordinario di Geometria analitica ([Tricomi 1962]).

¹⁹ Giuseppe Jung (1845-1926). Dopo essere stato assistente di Cremona al Politecnico di Milano, nel 1876, fu qui nominato straordinario di Proiettiva e Statica grafica ([Tricomi 1962]).

²⁰ L'affermazione è contenuta nel fascicolo di *Ricordi* stilato da Torelli.

²¹ Davide Besso (1845-1906). Dopo vari anni di insegnamento nelle scuole, nel 1888 fu chiamato sulla Cattedra di Calcolo infinitesimale all'Università di Modena. Nel 1886 fondò a Roma il Periodico di Matematiche [Tricomi 1962].

ricoprire le cattedre dell'Istituto tecnico che si stava aprendo a Roma. Sapendo che avrebbe arrecato un gran dolore al padre, Torelli rinunciò al trasferimento. Ma quel "primo posto" non passò inosservato agli occhi del colonnello Luigi Consalvo, comandante del Collegio di Marina che, nel 1873, lo chiamò come insegnante di Matematica.

Sempre nel 1873, Torelli vinse, *ex-aequo* con Giuseppe Moreno²², suo collega anche al Collegio Militare, il concorso per titoli al posto di professore di matematica nell'Istituto tecnico di Napoli: il posto fu assegnato a Moreno perché più anziano, a lui fu dato l'incarico di Geometria descrittiva.

Nel 1883, tenuto conto dei precedenti concorsi, il Ministero lo promosse a titolare di Matematica nel secondo biennio dell'Istituto tecnico.

Nell'agosto di quello stesso anno Torelli sposa Amalia Fergola, figlia del suo maestro Emanuele Fergola. Alla moglie e alla sua prematura scomparsa²³, Torelli dedicò un parte dei suoi "Ricordi".

Nel novembre del 1883 Nicola Trudi, professore ordinario di Calcolo infinitesimale a Napoli, per l'aggravarsi delle sue condizioni di salute, chiese ed ottenne dal Ministero il permesso di farsi sostituire a lezione. Il posto di assistente fu proposto, dallo stesso Trudi, a Torelli che già nel 1877 aveva conseguito per titoli la libera docenza in Geometria proiettiva e descrittiva: non era previsto uno stipendio solo una gratifica di un migliaio di lire, accettare l'incarico poteva però aiutarlo nel passaggio all'insegnamento superiore.

Torelli accetta la supplenza, ma per potersi preparare degnamente ai concorsi universitari deve intensificare la sua produzione scientifica, quindi decide, sostenuto in questa difficile scelta dalla moglie, di lasciare il Collegio Militare.

Morto Trudi, nel 1884, Torelli divenne prima incaricato di Calcolo infinitesimale, poi assistente di Giuseppe Battaglini, che nel frattempo aveva chiesto il trasferimento dall'Università di Roma a quella di Napoli sul posto lasciato vuoto da Trudi, e infine coadiutore nella Facoltà di Matematica con il compito di proporre e risolvere esercizi con gli studenti di primo biennio.

²² Giuseppe Moreno pubblicò alcuni trattati elementari, *Elementi di Algebra* (Torino, 1885, V edizione), *Elementi di Geometria* (Napoli 1890, XI edizione), e alcuni articoli sul Giornale di Matematiche.

²³ Amalia Fergola muore nel 1908 all'età di 46 anni.

Nel 1890-91, essendosi Battaglini spostato sulla cattedra di Analisi superiore, Torelli, ebbe nuovamente l'incarico di Calcolo.

Nel lavoro [Carbone *et al.* 1996] vengono descritte, soprattutto alla luce delle carte conservate nel fondo Cesàro, le vicende legate ai concorsi a cui Torelli partecipò prima di arrivare a Palermo come straordinario di Algebra complementare nel novembre 1891: protagonisti insieme a lui furono il giovane Ernesto Pascal²⁴, cresciuto anche lui alla Facoltà di Napoli, e Cesàro, che desiderava trasferirsi da Palermo a Napoli²⁵. Noi qui ci limitiamo a ricordarne le tappe principali aggiungendo solo qualche nuova informazione ricavata dalle lettere del fondo Torelli.

I primi tentativi effettuati da Torelli per conseguire una cattedra universitaria risalgono al 1886 anno nel quale egli ottiene l'eleggibilità alle cattedre di Algebra complementare a Napoli, di Calcolo infinitesimale a Messina, di Analisi superiore a Genova. Ma le sue aspirazione si intrecciano con quelle di tanti altri colleghi; così infatti scriveva²⁶ Cremona a Fergola il 19 novembre 1886:

Mi duole di non potervi dare, circa l'affare di vostro genero, notizie così buone come giustamente deliberate.

Informandomi al Ministero, ho saputo che il Cesàro andrà a Palermo, nella cattedra lasciata dal Capelli, e il Maggi andrà a Messina, per [sic], dov'è riuscito primo eleggibile dopo il Cesàro: l'una nomina e l'altra vennero proposte dal Consiglio Superiore. La nomina del Torelli a Genova non può avere luogo per quella deliberazione del Consiglio, che voi sapeste, e che non è irragionevole se si prescinde da qualche caso speciale.

Me ne dispiace pel bravo Torelli, che io stimo moltissimo; ma sono persuaso che non tarderà a presentargli un'altra occasione e con più felice esito.

In effetti va chiarito che Cremona aveva svolto in questa prima occasione un ruolo molto importante per favorire l'ascesa di Cesàro alla cattedra palermitana (cfr. sulla vicenda [Carbone *et al.* 2002]).

Nel 1890 Torelli ottenne anche l'eleggibilità alle cattedre di Calcolo infinitesimale a Torino, di Algebra complementare a Padova e nell'ottobre

²⁴ Ernesto Pascal (1865-1940). Dopo la laurea nel 1887, seguì corsi di perfezionamento a Pisa e a Gottinga con Klein. Nel 1890 fu nominato professore di Calcolo infinitesimale all'Università di Pavia, nel 1907 passò all'Università di Napoli ([Tricomi 1962]).

²⁵ Per le vicende concorsuali si veda anche [Palladino *et al.* 2012].

²⁶ La lettera è conservata tra quelle di Cremona a Torelli nel fondo Torelli.

del 1891 a Palermo: qui la commissione e il Consiglio Superiore avevano proposto Pascal come primo e Torelli come secondo con l'esplicita dichiarazione che se il Pascal da Pavia, dov'era già professore straordinario di Calcolo, non si recasse a Palermo, su tale insegnamento poteva essere chiamato Torelli.

Ma bandire questa cattedra di Algebra complementare non era stato facile: Cesàro, che aveva ottenuto il trasferimento a Napoli grazie anche alla disponibilità di Torelli ad andare a Palermo, lavorò a lungo all'interno della Facoltà di Matematica di Palermo per impedire il trasferimento su questa cattedra di Maisano, all'epoca professore all'Università di Messina.

Le difficoltà sono ben messe in evidenza da una lettera²⁷ che Cremona scrisse allo stesso Torelli il 28 febbraio 1891:

Caro Prof. Torelli,

Anch'io ho avuto notizie da Palermo, secondo le quali si sono impegnati a favore di Maisano.

Ella dovrebbe ora rivolgere le sue applicazioni a Messina, al posto che il Maisano lascerebbe vacante. Faccia conoscere al Ministero che gradirebbe quel posto e si giovi delle sue relazioni in quell'Università, se ne ha, dal canto mio io farò quanto mi sarà possibile, e sarò ben lieto se le sarà resa giustizia.

Il suo aff.

L. Cremona.

Lo stesso Cremona, dunque, uomo di vasta influenza, riteneva ormai perduta la causa di Torelli.

Come abbiamo già detto Torelli divenne straordinario di Algebra complementare all'Università di Palermo, e vi conseguì anche la promozione ad ordinario nel dicembre del 1895.

Nel novembre del 1896 si trasferì sulla cattedra di Calcolo infinitesimale per favorire, sanando l'antica rivalità, il rientro del "rivale" di un tempo, il Maisano che, il 23 gennaio 1895, così gli aveva scritto²⁸:

Gentilissimo Professore,

Mi vorrò perdonare se tardi rispondo alla sua gentilissima l corr. mese, sono stato da un paio di settimane a letto con catarro bronchiale ed entro appena in convalescenza.

²⁷ La lettera è conservata nel fondo Torelli.

²⁸ La lettera è conservata nel fondo Torelli.

Sebbene l'affare del mio trasferimento sia entrato in una fase molto incerta, le dico d'aver esaminato il suo corso e di essere disposto ad adottarlo quando verrò a Palermo, se pure la Facoltà, insistendo sulla sua proposta, otterrà l'adesione ministeriale.

Io mi trovo in serio imbarazzo. Non posso, debole come sono, avventurarmi ad un lungo viaggio e tornare a disporre in mio favore il Ministero, come mi era riuscito di fare lo scorso ottobre.

Dopo aver superato tante difficoltà e aver concepito le più belle speranze siamo proprio da capo. Io non so se la Facoltà continuerà ad insistere nella sua proposta, osservo solamente che può farlo liberamente, purché non impegnata sulla promozione del Peratoner e senza far danno a quest'ultimo, il quale mettendo in mezzo le sue buone relazioni, può a suo tempo e con comodo risolvere la difficoltà che ora su due piedi riesce impossibile.

Mi dispiace di dover dichiarar che ho fatto molto a fidanza sulla parola di qualche amico. Per esempio il prof. Paternò mi aveva promesso di eliminare la difficoltà sul numero degli ordinari pregando il prof. di Geodesia a passare sulla Scuola d'Applicazioni. Non si può far comprendere al prof. Peratoner che la proposta della Facoltà sul mio trasferimento può andare d'accordo con la di lui promozione, tanto più se, come mi assicurava il prof. [sic] non è limitato per la Facoltà di Palermo, il numero degli ordinari? A me non resta che fare assegnamento sulla benevolenza dei colleghi.

Mi perdoni la fretta e se ho scelto un brutto quarto d'ora per farmi vivo.

Con i più affettuosi saluti

*Suo aff.mo
G. Maisano*

Torelli racconta, nei suoi *Ricordi*, di aver trascorso a Palermo uno dei periodi più belli della sua vita e tanti sono i colleghi che ricorda con affetto.

Il suo atteggiamento fu costantemente moderato ma fermo e talora dovette assumere anche posizioni rigide: nel 1898, ad esempio, si dimise dalla carica di Preside per attirare l'attenzione sull'importante questione delle nomine dei professori universitari²⁹, e nel 1904 non esitò a votare

²⁹ Il sistema delle nomine a straordinario in mancanza di indicazioni di recenti concorsi non poteva che essere dannosa per l'insegnamento, pertanto in questi casi occorreva, secondo il Torelli ma non secondo tutta la Facoltà, procedere conferendo l'incarico. Cfr. anche lettera A₁₃ in [Carbone et al. 1996].

contro l'amico Guccia per render la biblioteca del Circolo Matematico, di cui era direttore, biblioteca universitaria³⁰.

Ma Torelli lasciò un'indelebile traccia a Palermo soprattutto come maestro, insieme a Guccia e Gerbaldi, di alcuni tra i principali matematici palermitani della generazione successiva, Michele de Franchis e del già citato Michele Cipolla, la cui produzione scientifica animò la vita matematica siciliana dando originali contributi anche a quella nazionale.

Nel 1907 all'Università di Napoli erano vacanti i due insegnamenti di Calcolo infinitesimale e Analisi superiore per il deliberato trasferimento di Cesaro a Bologna, trasferimento che non ebbe luogo a causa della sua prematura scomparsa. La Facoltà di Matematica propose allora che fosse affidata la cattedra di Calcolo a Torelli e a Pascal quella di Analisi superiore, così nell'ottobre del 1907 la famiglia Torelli lasciò Palermo.

A Napoli Torelli tenne, oltre al suo corso di Calcolo, il corso di Matematiche superiori, quello di Matematiche per Chimici e Naturalisti e di Analisi matematica nell'Istituto superiore navale. Fu collocato a riposo il 31 luglio 1924.

La gioia del rientro a Napoli venne, però, subito oscurata dalla morte della moglie Amalia.

Torelli morì a Napoli nel 1931.

Una larga parte dei *Ricordi* di Torelli è dedicata ai suoi 11 figli: quasi tutti seguirono corsi di studio di tipo scientifico, eccetto due figlie, le artiste di casa, che si dedicarono all'arte dell'incisione con la tecnica dell'acquaforte e allo studio del violino.

Il primogenito, Ruggiero, seguì le orme paterne: allievo della Normale di Pisa, si laureò nel 1904; fu assistente di Severi³¹ a Parma e a Padova e poi di Bertini³² a Pisa.

³⁰ Si veda A. Brigaglia, G. Masotto, *Il circolo matematico di Palermo*, Dedalo, Bari, 1982.

³¹ Francesco Severi (1879-1961). Laureatosi in Matematica nel 1900 con Segre, viene nominato assistente di D'Ovidio a Torino. Nel 1902 è assistente di Enriques e l'anno successivo di Bertini. Nel 1904 divenne professore all'Università di Parma, l'anno successivo si trasferì a Padova. Nel 1922 passò all'Università di Roma di cui fu anche rettore. Nel 1939 fondò l'Istituto di Alta Matematica (cfr. [DSB voce a cura di B. Segre]).

³² Eugenio Bertini (1846-1933). Fu uno dei maggiori allievo di Cremona. Dopo alcuni anni d'insegnamento nelle scuole medie, nel 1875 fu nominato professore di Geometria superiore all'Università di Pisa, da cui passò a Pavia nel 1880. Nel 1892 tornò definitivamente a Pisa (cfr. [DSB voce a cura di E. Carruccio]).

Mobilitato nel 1915, allo scoppio della prima guerra mondiale, e mandato al fronte come sergente morì a trentuno anni in zona di guerra, a Monfalcone, per un attacco cardiaco.

3. I corrispondenti: Cesàro, Cipolla e Landau

3.1 Ernesto Cesàro

Nacque a Napoli nel 1859. Ebbe una vita movimentata spesso irta di difficoltà economiche. Studiò pertanto in modo irregolare a Napoli, a Roma e a Liegi, ove conobbe il suo maestro E. Catalan. Nel 1886 ottenne, per concorso, la cattedra di Analisi algebrica di Palermo, nonostante non avesse ancora la laurea, che gli fu conferita l'anno dopo *ad honorem*. Nel 1891 passò all'Università di Napoli sulla cattedra di Calcolo infinitesimale. Morì tragicamente, nel 1906, nel tentativo di salvare il figlio Manlio che annegava nelle acque del mare di Torre Annunziata.

Cesàro ha spaziato nei più svariati campi della matematica, lasciando, nonostante la prematura morte, oltre 250 lavori e vari trattati. Oggi è soprattutto ricordato per il suo classico metodo di sommazione delle serie.

Per estese biografie su Cesàro si vedano [DBI voce a cura di E. Togliatti], [DBS voce a cura di J. Folta]; per biografie d'epoca si vedano [Perna 1907], [Del Pezzo 1906]; il ritrovamento del fondo Cesaro, avvenuto agli inizi degli anni 90, ha consentito notevoli approfondimenti sulla sua figura per i quali si vedano [Carbone *et al.* 2002] e la bibliografia ivi contenuta.

3.2 Michele Cipolla

Nacque a Palermo nel 1880. Iniziò gli studi universitari alla Scuola Normale Superiore di Pisa, dove fu allievo di L. Bianchi³³.

Trasferitosi all'Università di Palermo, si laureò nel 1902 con una tesi in teoria dei numeri

³³ Luigi Bianchi (1856-1928). Nel 1877 si laureò presso la Scuola Normale Superiore di Pisa. Dopo due anni di perfezionamento a Monaco e a Gottinga, rientrò a Pisa come professore incaricato all'Università e alla Scuola Normale. Dal 1886 fu professore di Geometria analitica all'Università (cfr. [DSB voce a cura di E. Carruccio e G. Piccoli]).

assegnatagli da Gabriele Torelli. Dopo essersi dedicato per un periodo all'insegnamento medio, nel 1911 fu nominato professore di Analisi algebrica all'Università di Catania, da dove, nel 1923, passò a Palermo.

Cipolla fu uno dei maggiori algebristi italiani del suo tempo; molti i suoi contributi alla teoria dei numeri, a quella dei gruppi, alla critica dei fondamenti e alla storia e didattica della matematica.

Morì a Palermo nel 1947.

Per biografie su Cipolla si vedano [DBI voce a cura di F. S. Rossi] e il volume [Cipolla. 1997]; per una biografia d'epoca si veda [Sansone 1956].

3.3 Edmund Landau

Nacque a Berlino nel 1877. Dopo aver studiato matematica all'Università di Berlino, conseguì, nel 1899, il dottorato con una tesi in teoria dei numeri assegnatagli da Frobenius³⁴. La sua tesi per l'abilitazione, presentata nel 1901, era sulle serie di Dirichlet. Rimase a Berlino come libero docente fino al 1909, anno in cui fu nominato professore ordinario a Gottinga, come successore di Minkowski³⁵.

Nel 1920 contribuì alla nascita dell'Università Ebraica di Gerusalemme, dove si trasferì nel 1927.

Per le difficoltà incontrate dalla famiglia per ambientarsi e per suoi dissapori con i colleghi, tornò ad insegnare a Gottinga fino a quando, nel 1933, il regime nazista lo espulse. Morì a Berlino nel 1938.

Landau si occupò soprattutto di teoria analitica dei numeri e in particolare della distribuzione dei numeri primi: il suo *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, per la dettagliata e sistematica esposizione, divenne subito il testo di riferimento nel campo.

³⁴ Ferdinand G. Frobenius (1849-1917). Laureatosi all'Università di Berlino, fu chiamato, nel 1875, come professore ordinario al Politecnico di Zurigo. Nel 1892 rientrò a Berlino come successore di Kronecker (cfr. [DSB voce a cura di H. Wussing]).

³⁵ Hermann Minkowski (1864-1909). Mentre era ancora studente all'Università di Königsberg, nel 1883, venne insignito di un Premio dell'Académie des Sciences francese per un suo lavoro sulla teoria delle forme quadratiche. Nel 1887 conseguì l'abilitazione presso l'Università di Bonn, fu docente a Königsberg e al Politecnico di Zurigo e infine dal 1902 all'Università Gottinga (cfr. [DSB voce a cura di J. Dieudonné e J.M. Bliss]).

Per una biografia su Landau si veda [DSB voce a cura di B. Schöneberg]; per biografie d'epoca si vedano [Hardy *et al.* 1939], [Knopp 1951].

4. Indice cronologico complessivo delle lettere pubblicate

Nell'indice e nell'epistolario per individuare i corrispondenti delle lettere vengono utilizzate le seguenti sigle:

CT: lettere di Cesàro a Torelli;
 LC: lettere di Landau a Cesàro;
 LT: lettere di Landau a Torelli;
 MLT: Mittag-Leffler a Torelli;
 MMT: Mayer-Müller a Torelli;
 A: lettere di Torelli a Cesàro;
 B: anonimo (ma Torelli) a Cesàro;
 C: minute delle lettere di Cesàro a Torelli;
 D₁, D₂: lettere di Landau a Cesàro;
 D₃, D₄: minute di lettere di Cesàro a Landau;
 E: lettere di Cipolla a Cesàro.

Ricordiamo esplicitamente che le lettere con sigla A, B, C, D, E sono state pubblicate in [Carbone *et al.* 1996]

CT1	Cesàro a Torelli	Torre Annunziata, 12 Luglio, 1884
CT2	Cesàro a Torelli	Torre Annunziata, 6 Aprile 1885
CT3	Cesàro a Torelli	Torre Annunziata, 18 Luglio 1885
CT4	Cesàro a Torelli	Torre Annunziata, 10 Aprile 1886
CT5	Cesàro a Torelli	Palermo, 10 Febbraio 1891
CT6	Cesàro a Torelli	Palermo, 20 Febbraio 1891
A ₁	Torelli a Cesàro	Napoli, 26 febbraio 1891
A ₂	Torelli a Cesàro	Napoli, 6 marzo 1891
CT7	Cesàro a Torelli	Palermo, 13 Marzo 1891
A ₃	Torelli a Cesàro	Napoli, 7 agosto 1891
A ₄	Torelli a Cesàro	Napoli, 31 dicembre 1891
A ₅	Torelli a Cesàro	Palermo, 19 aprile 1892
CT8	Cesàro a Torelli	Torre Annunziata, 8 Maggio 1892
CT9	Cesàro a Torelli	Torre Annunziata, 24 Agosto 1892
A ₆	Torelli a Cesàro	Palermo, 19 dicembre 1893

CT10	Cesàro a Torelli	Torre Annunziata, 29 Dicembre 1893
A ₇	Torelli a Cesàro	Palermo, 23 gennaio 1894
CT11	Cesàro a Torelli	Torre Annunziata, 31 Agosto 1894
A ₈	Torelli a Cesàro	Palermo, 8 settembre 1894
A ₉	Torelli a Cesàro	Palermo, 2 novembre 1894
CT12	Cesàro a Torelli	Torre Annunziata, 7 Novembre 1894
A ₁₀	Torelli a Cesàro	Palermo, 20 settembre 1895
CT13	Cesàro a Torelli	Napoli, 28 Dicembre 1896
CT14	Cesàro a Torelli	Napoli, 26 Febbraio 1897
A ₁₁	Torelli a Cesàro	Palermo, 6 dicembre 1897
CT15	Cesàro a Torelli	Napoli, 12 Dicembre 1897
A ₁₂	Torelli a Cesàro	Palermo, 18 dicembre 1897
B ₁	Torelli a Cesàro	[Palermo], 3 ottobre 1898
A ₁₃	Torelli a Cesàro	Palermo, 22 novembre 1898
CT16	Cesàro a Torelli	Napoli, 1 Dicembre 1898
A ₁₄	Torelli a Cesàro	Palermo, 10 gennaio 1901
A ₁₅	Torelli a Cesàro	Palermo, 13 marzo 1901
A ₁₆	Torelli a Cesàro	Palermo, 28 marzo 1901
CT17 /C ₁	Cesàro a Torelli	Napoli, 31 Marzo 1901
A ₁₇	Torelli a Cesàro	Palermo, 9 aprile 1901
A ₁₈	Torelli a Cesàro	Palermo, 21 agosto 1901
CT18	Cesàro a Torelli	[Napoli], 30 Gennaio 1902
CT19	Cesàro a Torelli	Napoli, 1 Febbraio 1902
A ₁₉	Torelli a Cesàro	Palermo, 23 maggio 1902
CT20	Cesàro a Torelli	Napoli, 26 Maggio 1902
CT21	Cesàro a Torelli	Napoli, 14 Giugno 1902
CT22 /C ₂	Cesàro a Torelli	Napoli, 6 Gennaio 1903
A ₂₀	Torelli a Cesàro	Palermo, 9 gennaio 1903
A ₂₁	Torelli a Cesàro	Palermo, 8 marzo 1903
CT23 /C ₃	Cesàro a Torelli	Napoli, 17 Marzo 1903
A ₂₂ /C ₄	Torelli a Cesàro	Palermo, 30 aprile 1903
A ₂₃	Torelli a Cesàro	Messina, 14 giugno 1903
CT24	Cesàro a Torelli	Napoli, 22 giugno 1903

A ₂₄	Torelli a Cesàro	Palermo, 26 giugno 1903
CT25	Cesàro a Torelli	Napoli, 10 Novembre 1903
A ₂₅	Torelli a Cesàro	Palermo, 15 Novembre 1903
CT26*	Cesàro a Torelli	Napoli, 19 Novembre 1903
A ₂₆	Torelli a Cesàro	Palermo, 13 dicembre 1903
A ₂₇	Torelli a Cesàro	Palermo, 9 Marzo 1904
CT27	Cesàro a Torelli	Napoli, 11 Marzo 1904
A ₂₈	Torelli a Cesàro	Palermo, 12 luglio 1904
A ₂₉	Torelli a Cesàro	Palermo, 28 luglio 1904
CT28	Cesàro a Torelli	Napoli, 2 Dicembre 1904
CT29	Cesàro a Torelli	Napoli, 2 Febbraio, 1905
A ₃₀	Torelli a Cesàro	Palermo, 13 Febbraio 1905
CT30	Cesàro a Torelli	Napoli, 15 Febbraio 1905
A ₃₁	Torelli a Cesàro	Palermo, 18 Luglio 1905
CT31	Cesàro a Torelli	Napoli, 20 Luglio 1905
MLT	Mittag-Leffler a Torelli	Stoccolma, 21 Febbraio 1903
MMT	Mayer-Müller a Torelli	Berlino, 24 marzo 1903
D ₁	Landau a Cesàro	Parigi, 1 gennaio 1900
LC1	Landau a Cesàro	Berlino, 27 dicembre 1902
D ₃	Cesàro a Landau	[1902] (minuta di risposta alla LC1)
LC2	Landau a Cesàro	Berlino, 3 gennaio 1903
LT1	Landau a Torelli	Berlino, 7 febbraio 1903
LT2	Landau a Torelli	Berlino, 25 febbraio 1904
D ₂	Landau a Cesàro	Charlottenburg, 30 maggio 1905
LT3	Landau a Torelli	Charlottenburg, 30 maggio 1905
LT4	Landau a Torelli	Charlottenburg, 31 luglio 1905
D ₄	Cesàro a Landau	[1095] (minuta)
E ₁	Cipolla a Cesàro	Palermo, 8 agosto 1902
E ₂	Cipolla a Cesàro	Palermo, 28 dicembre 1905
E ₃	Cipolla a Cesàro	Palermo, 1 gennaio 1906
E ₄	Cipolla a Cesàro	Palermo, 7 gennaio 1906

* In [Carbone *et al.* 1996] è contenuta anche una lettera di Gabriele Torelli a destinatario sconosciuto, datata Palermo 21 novembre 1903, il cui contenuto è connesso alla CT26.

5. L'Epistolario

CT1

Onorevole Signore,

Come ho avuto l'onore di dichiararle l'altro giorno, io desidero fare qualche aggiustata alla seconda parte del mio ultimo articolo¹.

Si tratta soltanto di corredare di opportuni esempi alcuni passaggi del detto articolo, i quali, senza ciò, potrebbero sembrare oscuri,

Siccome, però non ne ho presente una copia, così tale lavoro mi riesce quasi impossibile.

Mi rivolgo dunque alla sua bontà, perché voglia farmi tenere per un giorno solo il mio articolo.

Le prometto di restituirglielo subito, per non intralciare in alcun modo la stampa del Giornale².

Non si meravigli di questo mio speciale interessamento all'articolo in questione, giacché esso contiene teoremi di somma importanza.

Alcuni dimostrati differentemente, stanno per essere pubblicati nei Resoconti dell'Accademia di Parigi³, per cura del Prof. Hermite⁴, e l'articolo stesso servirà di base ad un mio prossimo lavoro: Teoria delle funzioni olomorfe, di genere ω ⁵.

Colgo l'occasione per domandarle notizie di un periodico intitolato *Giornale della Società di Letture e Conversazioni scientifiche*⁶. So che contiene un articolo del Prof. Rafanelli⁷ su tre teoremi miei, e sarei curioso di consultarlo.

Mi scusi pel doppio disturbo che le arreco, e voglia gradire, Onorevole Signore, i miei ringraziamenti e l'espressione dei miei sentimenti rispettosi.

Ernesto Cesàro

Torre Annunziata, 12 Luglio, 1884.⁸

¹ Si tratta del lavoro [Cesàro 1884 a].

² Si tratta del *Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane*, fondato a Napoli da Giuseppe Battaglini, Nicola Trudi e Vincenzo Janni nel 1863

(noto, com'era d'uso, come *Giornale di Battaglini*). Dopo il 1866, Battaglini assunse da solo la direzione del giornale che tenne fino alla morte. Cfr. [Gatto 2000].

³ Si tratta dei *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, rivista scientifica fondata nel 1835 come continuazione delle *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, pubblicate fin dal 1666.

⁴ Il lavoro [Hermite 1885] sarà pubblicato sul *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.

⁵ Il lavoro è [Cesàro 1884 b].

⁶ La società di Letture e Conversazioni Scientifiche, fondata nel 1866, è uno dei più antichi sodalizi culturali di Genova. Per decenni ha svolto un ruolo primario nella vita culturale della città e oggi continua la sua attività nello spirito della sua tradizione.

⁷ In [Rafanelli 1884] vengono date le dimostrazioni di tre *Questioni* proposte da Cesàro in [Cesàro 1884 c].

CT2

Onorevole Signor Professore,

Parecchi mesi fa, Ella mi fece l'onore di darmi comunicazione di una interessantissima memoria del Prof. Trudi, concernente il Calcolo isobarico¹. Essendo io pervenuto, nel seguito delle mie ricerche su tale soggetto, a risultati importanti, ho deciso di farne oggetto di dissertazione scritta², per conseguire la laurea dottorale. Mi sarebbe perciò di potentissimo aiuto la citata Memoria del Prof. Trudi, e son sicuro di poterla nuovamente ottenere dalla sua bontà fino al 1° Luglio. Mi recai, qualche tempo fa, alla Biblioteca dell'Università di Napoli, per avere in prestito opuscoli riferentisi al calcolo isobarico, ma non potei nulla ottenere.

Avrò l'onore di presentarmi da lei Mercoledì Mattina^(*) verso le 11. Laonde, vivamente La prego di lasciare detto dove e quando potrò vederla, sia per la suddetta preghiera, sia per altre, circa le quali il Sig. Pellerano non ha creduto dovermi dare risposta.

Gradisca, intanto, Onorevole Signor Professore, l'espressione dei miei rispettosi sentimenti.

Ernesto Cesàro

Torre Annunziata, 6 Aprile 1885.

(*) tempo permettendo

¹ Il lavoro richiesto è [Trudi 1874].

² Viene estratto dalla tesi il lavoro [Cesàro 1885 a].

CT3

Illustrissimo Signor Professore,

Apprendo, pochi giorni fa, l'ultimo fascicolo del Giornale di Matematiche, sono stato colpito da due articoli: Il primo del Sig. A. Mollo¹, pieno di errori madornali da cima a fondo, m'ha spinto a redigere l'articolo qui accluso: in esso, dopo aver fatto la critica dell'articolo del Sig. Mollo, propongo una nuova dimostrazione, che giaceva seppellita in una mia Memoria di Termodinamica, rimasta inedita per mancanza di tempo². L'altro articolo è quello del sig. Vivanti, che pubblica, sotto altra forma, molti risultati³ da me trovati l'anno scorso e condensati nel breve scritto «Remarques sur les fonctions holomorphes»⁴.

Il Sig. Vivanti cita autori francesi, tedeschi, americani, olandesi ..., e me non cita, che sono italiano, ed ho pubblicato le mie ricerche nel Giornale stesso in cui egli scrive. Siccome desidero farmi conoscere dal Sig. Vivanti, io La prego di darmi il suo indirizzo, affinché possa mettermi in relazione con lui.

Attualmente, Ella ha sette articoli miei pel Giornale di Napoli. Se destinassi la Memoria sui poliedri⁵, che sto per condurre a termine, allo stesso giornale farei ostruzione agli altri ed a me, mentre è mio vivo desiderio condurre innanzi la pubblicazione dei miei scritti con la massima alacrità. Le sarei perciò gratissimo se Ella volesse disporre del mio lavoro sui poliedri in modo da fargli ottenere pubblicità nel più breve tempo possibile. Io avrò l'onore di presentarle il manoscritto fra pochi giorni, ed allora, se l'Accademia delle Scienze di Napoli lo rifiuta, credo che Ella potrà facilmente trovare qualche altra Società o qualche Giornale che soglia incaricarsene.

Gradisca, Illustrissimo Signor Professore, l'espressione del mio profondo rispetto.

Ernesto Cesàro

Torre Annunziata, 18 Luglio 1885

¹ Si tratta del lavoro [Mollo 1885].

² L'articolo è [Cesàro 1886 e].

³ L'articolo è [Vivanti 1885].

⁴ Si tratta del già citato [Cesàro 1884 a].

⁵ Si parla del lavoro [Cesàro 1886 a].

CT4

Ch.^{mo} Sig. Professore,

Benché la nuova soluzione della questione 54¹ sia molto oscura, mi sono convinto che il Sig. De Marco sia riuscito a rimuovere gli ostacoli che si presentavano nella prima². La sua dimostrazione mi sembra giusta; ma è priva di quell'efficacia che potrebbe soltanto conferirle una rappresentazione geometrica. Infatti per essere strettamente rigorosi, bisognerebbe ancora dimostrare che le quantità h , quali risultano da quel sistema speciale che il Sig. De Marco considera, costituiscono un corpo di numeri continuo ed uniformemente denso. Il Sig. De Marco dimostra soltanto che le h sono tutte dello stesso segno.

Le ho già spedito le bozze del mio articoletto sulle eliche³. Per quello di termodinamica⁴ son dispostissimo a sopportare le spese occorrenti alle figure, ma desidero di non dover trattare direttamente col Pellerano.

Ho una preghiera da farle circa l'articolo «Alcune misure negli iperspazii»⁵.

Almeno nelle copie a parte, (che dovrebbero essere cinquanta, come quelle dell'articoletto «Rottura del diamante»⁶), vorrei inserire, dopo il titolo, i seguenti versi:

..... foulant à mes pieds cet univers visible
je plane en liberté dans les champs du possible.
(Lamartine)⁷

La prego di perdonarmi il disturbo che Le reco, ed anche un po' la mia mania - molto innocente, del resto - di ricorrere con soverchia frequenza a citazioni lamartiniane.

Gradisca, Ch.^{mo} Sigr. Professore l'espressione dei miei rispettosi sentimenti.

Ernesto Cesaro

Torre annunziata, 10 Aprile, 86.

¹ La *Question* 54, proposta da Cesàro, è contenuta in [Cesàro 1885 b].

² La soluzione è pubblicata in [De Marco 1885].

³ Il lavoro pubblicato è [Cesàro 1886 b].

⁴ Il lavoro è [Cesàro 1886 e].

⁵ L'articolo è [Cesàro 1886 c].

⁶ Il lavoro è [Cesàro 1886 d].

⁷ L'amore di Cesàro per il poeta francese (e uomo politico di idee repubblicane) Alphonse de Lamartine (1790-1869) era anche dovuto ai ricordi del suo maestro e benefattore Eugène Catalan (1814-1894) (anch'egli acceso repubblicano) che aveva avuto un'intensa frequentazione col poeta e insieme a lui aveva avuto parte assai attiva nelle giornate rivoluzionarie del febbraio 1848 a Parigi. Tali giornate portarono alla caduta della monarchia di Luigi Filippo e alla instaurazione della seconda repubblica in Francia; Lamartine fu ministro nel nuovo governo. La "mania" non era quindi del tutto, nell'Italia a regime monarchico dell'epoca, innocente come Cesàro tende a far credere.

CT5

Ch.^{mo} Sig. Professore,

Comincio dal ringraziarla vivamente delle parole indirzzatemi nella penultima sua lettera. Non ho risposto subito all'ultima lettera perché desideravo saper qualche cosa intorno alle intenzioni dei "protettori" del Maisano. Questi ha tempestato di lettere il rettore Macaluso ed i professori Paternò, Gemmellaro, Cervello, ecc.. affinché la Facoltà ritorni sulla presa deliberazione¹. Pare che tutti gli abbiano risposto: è troppo tardi. Non son riuscito a sapere se la nota deliberazione (di cui le trasmetterò copia fedele posdomani) sia stata comunicata al Ministero; ma lo saprò fra qualche giorno, senza destar sospetti. Ad ogni modo vigilerò. Domani si riunisce la Facoltà e malgrado che nell'ordine del giorno non si accenni alla questione che ci interessa, interverrò con gli amici, pronto a porre la questione pregiudiziale. Nella discussione avrò buon giuoco, appunto perché aderii alla proposta di chiedere il concorso per ordinario anziché per straordinario. In ogni caso se la mafia prevalesse (ciò che non credo, perché sono rimasti sconcertati dalla franchezza del nostro giuoco) una seconda deliberazione della facoltà non andrebbe scompagnata da una nostra viva protesta, che verrebbe inserita nel verbale. Un amico del Maisano mi confessava che nulla si può fare dopo la Sua domanda, e che se la Facoltà avesse preso un'altra deliberazione non avrebbe fatto altro che prepararsi uno scacco al Ministero ed in Consiglio superiore. Non dubiti del successo: la mossa da Lei fatta ha reso inespugnabile la Sua posizione². E non creda che qui troverà un ambiente ostile per amore del Maisano: "Le amicizie" di costui si riducono a semplici Legami di mafia.

Il Maisano sente la sua impotenza, ed è per questo che tanto si agita: arriverà domani o posdomani a Palermo, ma non concluderà nulla.

È probabile che, dopo, venga costà, e tutti i suoi sforzi si ridurranno a piegare il Suo animo.

Qui ha fatto sapere che, anche se si bandisse il concorso per ordinario, egli non si ci metterebbe. È un curioso modo di muovere a compassione la gente! Ora cercherà di impietosire il Prof. Battaglini (della cui buona fede ha in altri tempi abusato, insieme ad altri malfattori, per denigrarmi) ed allora si tenterà di indurre Lei a cambiar proposito. Quanto mi rincrescerebbe se ciò riuscisse! Da un suo parente mi è stato anzi detto che il Maisano è sicuro di venire ad un accordo con Lei. Vuol dire che ha grandi bugie da contarle. Non lo creda, per carità! Mi scusi se mi son permesso di darle qualche consiglio: ciò mi è un po' consentito, nell'attuale faccenda, dalla conoscenza che ho dell'ambiente universitario palermitano, ed è giustificato dal desiderio vivissimo che nutro di vederla assumere qui gli insegnamenti di Analisi algebrica e Fisica matematica: il Maisano può ben aspettare qualche anno. Le scriverò fra pochi giorni per informarla di tutto.

Gradisca, Ch.^{mo} Sig. Professore, l'espressione dei miei migliori sentimenti.

E.Cesàro

Palermo, 10 Febbraio 1891

¹ Qui e nella successiva lettera si parla del concorso a professore ordinario di Algebra complementare bandito a Palermo. Ricordiamo che Cesàro aveva già ottenuto il trasferimento a Napoli sulla cattedra di Calcolo che, in un primo momento, la Facoltà di Napoli voleva bandire per Torelli.

² Nel 1890 per poter permettere il trasferimento di Cesàro a Napoli, Cremona e Salvatore-Dino avevano pensato che se Torelli avesse ottenuto l'eleggibilità al concorso di professore straordinario di Calcolo infinitesimale presso l'Università di Torino, si sarebbe potuto chiedere al ministro di assegnargli un posto in una Università senza un nuovo concorso (cfr. lettera di Gerbaldi a Cesàro, datata 7 luglio 1890, e conservata nel Fondo Cesàro a Napoli). La domanda prodotta da Torelli (alla Facoltà o al Ministero), a cui si accenna nella lettera, potrebbe essere proprio di disponibilità a ricoprire la cattedra di Algebra a Palermo. Cfr. anche lettera successiva.

CT6

Palermo, 20 Febr. 1891

Chiarissimo Signor Professore¹,

Non mi sono affrettato a rispondere alla Sua gentilissima lettera solo perché desideravo avere qualche cosa di positivo da comunicarle. Torno ora dalla seduta di Facoltà, in cui si è deciso con nove voti contro tre di proporre il concorso per ordinario. È quasi sicuro che il Ministero non accoglierà integralmente la deliberazione della Facoltà, e bandirà il concorso per straordinario. Ad ogni modo Ella non corre altro rischio se non quello di venire qui come ordinario. Dato l'ambiente, l'accettazione pura e semplice della sua domanda non era possibile! Pel suo trasferimento io disponeva soltanto di quattro voti, compreso il mio, quattro voti non siciliani (Gerbaldi Pagliani, Venturi ed io). Se alla seduta si fossero presentati, come al solito, sei o sette professori, Ella avrebbe avuto immediata vittoria. Ma la questione è stata pregiudicata fin dal principio dallo stesso Preside, che ha domandato: "dobbiamo noi sottostare alle suggerzioni del Ministro?" Ha continuato Calderara (quello di fama europea) sostenendo addirittura che si dovesse non tener conto della lettera del Ministro (scritta veramente con troppo zelo) e proporre invece il trasferimento del Maisano, che nulla chiedeva ufficialmente! Non ho dovuto spendere molte parole per mettere in evidenza tutta l'enormità della proposta, e non ho esitato a dire senza riguardi tutto ciò che pensavo di Lei e del Maisano. A questo punto il Preside ha proposto la sospensiva, ed io, per combatterla, ho dovuto abbandonare, insieme ai miei amici, ogni idea di trasferimento, e "me rallier" a quelli che chiedevano il concorso. Così la sospensiva è stata respinta, e si è poi deliberato di aprire il concorso per ordinario.

Ora, mi permette di darle un consiglio? Ella dovrebbe intendersi coi Suoi amici delle varie Università per la nomina dalla Commissione, affinché questa risulti composta di uomini competenti.

Io, per esempio, proporrei Brioschi, d'Ovidio, Pincherle, Capelli, e mi metterei quinto, non per la competenza, ma perché sarei lieto di poterle rendere giustizia². La prego di tenermi informato di quanto sarà per decidere in proposito: così io stesso potrò scriverne ai miei amici di Torino, Genova, Padova e Bologna. Questo è necessario, perché il Maisano ha l'abitudine di prendere simili precauzioni, ed alcuni mesi fa, per la promozione ad ordinario, ebbe cura di mandar qui al Preside, a Macaluso ed a Paternò una lista di nomi impossibili, che per mia opera vennero sostituiti da altri.

Disgraziatamente ora le votazioni per commissioni non le fanno più le Facoltà, ma i professori, e con ciò il giuoco dei Maisani è favorito. Ad ogni modo Ella non ha nulla da temere dalla sestica binaria, e solo se il concorso si bandisse per ordinario Ella potrebbe incontrare qualche concorrente degno di Lei, il Maggi per esempio, ma che soccomberebbe ugualmente perché privo di titoli algebrici.

Colgo questa occasione per pregarla di conservarmi sempre la Sua benevolenza, malgrado che imprescindibili circostanze di famiglia mi abbiano messo nella dolorosa necessità di ostacolare per qualche tempo (che auguro e prevedo non lungo) la sue legittime aspirazioni. La prego, Chiarissimo Signor Professore, di voler disporre di me in qualunque occasione, e di gradire l'espressione dei miei migliori sentimenti.

E. Cesàro

¹ Si veda la lettera A₁ di risposta, datata 26 Febbraio 1891.

² Della commissione fecero parte: E. Beltrami, A. Capelli, E. Cesàro, E. D'Ovidio, S. Pincherle.

CT7

Palermo¹, 13 Marzo 1891

Chi.^{mo} Sig. Professore²,

Nell'avvenuta riunione della Facoltà non si fece motto della nota faccenda. Anzi per le conversazioni avute con diversi professori, son venuto nella persuasione che nulla si tenterà in favore del Maisano. Del resto la deliberazione è stata spedita al Ministero, ed ora Ella non ha più nulla da temere da nessuna parte, tranne che da Lei stesso. Ella non tarderà infatti a ricevere sollecitazioni dirette ed indirette perché si compiaccia cedere il posto di Palermo (che può considerare come suo) al Maisano, che in cambio di degnerà finalmente prometterle il posto di Messina. Così Ella, per far piacere al Maisano, rinuncerà ad insegnare Algebra qui per andare ad insegnare Algebra e Geometria Analitica a Messina; rinuncerà ad impiegar qui, nell'incarico di fisica matematica, la Sua vasta conoscenza del Calcolo, per insegnar forse Analisi superiore a Messina, dove rimangono deserte le stesse scuole del primo biennio; si rassegnerà infine a lasciare una Università di primo ordine, qual è quella di Palermo, per andar a perder tempo e forza nella meschina Università messinese, proprio nel momento che si torna ad agitare la grave questione della riduzione delle

Università! E sempre per far piacere al Maisano Ella non penserà che a Messina manca ogni mezzo di studio, mentre in Palermo si è creato e si comincia ad ammirare un discreto “foyer” nel Circolo Matematico³, dove affluiscono numerose le pubblicazioni periodiche.

Ella farà a meno di tutte queste considerazioni unicamente perché avrà compassione del Maisano.

Questi si dice sicuro di venire ad un accordo con Lei: perché? Per finire Le dirò che qui il voto segreto di alcuni “protettori” del Maisano è che venga lei, anche perché non si saprebbe a chi affidare l’insegnamento della Fisica Matematica.

Gradisca, Ch.^{mo} Sig. Professore, l’espressione dei miei migliori sentimenti

E. Cesàro

¹ Biglietto postale.

² Questa lettera è di risposta a quella di Torelli a Cesàro, datata 6 marzo 1891, lettera A₂. Torelli chiede se le delibere della Facoltà di Palermo, relative al concorso di cui si parla nelle precedenti lettere, siano state inviate a Roma al Ministero.

³ Si tratta del *Circolo Matematico di Palermo* fondato nel 1884 da Giovan Battista Guccia. Cfr. [Brigaglia *et al.* 1982].

CT8

Torre Annunziata, 8 Maggio 92

Chiarissimo Professore¹,

Ella vorrà scusarmi se le numerose occupazioni non mi hanno mai permesso di scriverle, come da tanto tempo avrei desiderato. Rimandando dall’oggi all’indomani la risposta a ciascheduna delle sue lettere, ho poi finito per non scrivere più, contando un po’ sulla Sua indulgenza. Quello che mi toglie via molto tempo è il “Corso di Calcolo” perché assolutamente quello di Battaglini² non può andare. Vi ho già introdotto numerosissime modificazioni, e durante la vacanze, continuando a modificare, redigerò un corso mio, che farò litografare³, con l’intenzione di mandarlo alle stampe dopo due o tre anni d’insegnamento.

Io qui mi trovo bene, e credo che le universali prevenzioni si siano dissipate, tranne quelle di certo insetto geodetico⁴, che fa il pajo col suo mellifluo venturino collega di Palermo⁵.

Veramente non credo che il nobile uomo abbia prevenzioni contro di me, ma gli giova fingere di averne per profittare di quelle degli altri, o, meglio, di quelle che egli crede che gli altri abbiano.

Disgraziatamente ha fatto male i conti, perché io son ben deciso ad armarmi di pazienza e a tirar dritto per la mia via, senza dar retta ai cani che mi abbaiano dietro. Così accadrà, come già è accaduto, che il povero Arminio, sia che spari di me in classe, sia che vada ad esercitare la sua lingua viperina presso il Prof. Battaglini, sia che più o meno apertamente mi punzecchi in Facoltà, non riuscirà ad altro che a darsi della zappa sui piedi. E sì che egli non avrebbe mai dovuto maneggiare altro strumento!

Niente novità tranne, forse, in avvenire, la mia nomina all'Accademia⁶, dietro proposta del Prof. Fergola. Quanto al povero Prof. Battaglini, egli sta sempre in quello stato, ch'è peggio che morte.

Spero che Ella abbia già ricevuto i primi undici fogli del mio "Corso di Analisi Algebrica"⁷.

È inutile dirle che aspetto con vivo desiderio il Suo giudizio, e che farò tesoro delle sue critiche per l'edizione francese, alla quale mi propongo di por mano appena saranno passati sei mesi dalla pubblicazione dell'edizione attuale.

Gradisca, Chiarissimo Professore, i più distinti saluti ed una cordiale stretta di mano da chi ama dirsi

Suo dev.^{mo} amico

E. Cesàro

¹ Questa lettera è di risposta a quella di Torelli a Cesàro, datata 19 aprile 1892, lettera A₅. Torelli, che si trova a Palermo come straordinario, parla dei problemi della sua Facoltà e dei suoi corsi e chiede notizie a Cesàro sul suo inserimento a Napoli.

² Riteniamo che Cesàro si riferisca a [Battaglini 1889].

³ Il testo pubblicato è [Cesàro 1892].

⁴ Si riferisce ad Arminio Nobile. Sulla sua aspra polemica con Cesàro cfr. [Carbone *et al.* 1997].

⁵ Si riferisce dall'astronomo Adolfo Venturi.

⁶ Si tratta dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli. Motivo di contesa tra Cesàro e Nobile poteva anche essere la nomina a socio ordinario residente all'Accademia. Entrambi ricevettero, a distanza di pochi giorni, l'ambita nomina: Cesàro il 3/12/1892 mentre Nobile il 10/12/1892.

⁷ Il testo pubblicato è [Cesàro 1894 a].

CT9

Torre Annunziata, 24 Agosto, 92

Chiarissimo Signor Professore,

Accolga i più caldi ringraziamenti pel gentile dono che Ella si è compiaciuto farmi inviandomi la Sua fotografia. Spero di potere, fra breve, vincere la ripugnanza che ho sempre avuta a “posare” innanzi alla macchina fotografica, e mettermi così in grado di mandarle in cambio il mio primo ritratto, pregandola di considerarlo come quello di uno dei Suoi più devoti amici.

Se da una parte mi è dispiaciuto di non poter, quest'anno, rivederla in persona, dall'altra ho appreso con grande soddisfazione, da Certo e da Giudice che Ella si trova bene a Palermo, anche per l'educazione dei figlioli, che per noi costituisce la più grave delle cure.

Fra non molto Ella riceverà tre altre dispense (18, 19, 29) del Corso di “Analisi”¹. Resteranno poi cento altre pagine, circa, dedicate alle equazioni. Ella sa che io aspetto un Suo giudizio. Quello del Prof. Battaglini mi è stato, non senza mia meraviglia^(*), assai favorevole.

Gradisca, Chiarissimo Signor Professore, la viva espressione dei miei più distinti saluti sentimenti.

E. Cesàro

(*) date le idee del Professore circa l'insegnamento universitario

¹ Il testo, già citato nella precedente lettera, è [Cesàro 1894 a].

CT10

Torre Annunziata¹, 29 Dicembre, 93Ch^{mo} Sig^r Professore²,

Ho ben ricevuta la Sua del 19 corrente, e non Le ho risposto subito perché ho intenzione di prendere un po' di tempo per mandarle notizie complete circa la questione messa a concorso dalla nostra Accademia³. Ad ogni modo Ella riceverà nell'entrante settimana una mia Memoria⁴, che contiene molte informazioni in proposito.

Ai F.^{li} Bocca ho già scritto due volte perché siano più solleciti a spedire copie a Palermo, a Napoli, ecc. finora a Napoli non è arrivato niente⁵.

Scriverò una terza volta.

Gradisca mille auguri e cordiali saluti del Suo dev.^{mo}

E. Cesàro

¹ Cartolina postale.

² Questa lettera è di risposta a quella di Torelli a Cesàro, datata 19 dicembre 1893, lettera A₆. Torelli, chiede notizie sul tema di teoria dei numeri messo a concorso dall'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli.

³ Il tema di teoria dei numeri proposto dall'Accademia delle Scienze di Napoli, molto probabilmente dietro iniziativa di Cesàro, era il seguente: «Esporre, discutere e coordinare in forma possibilmente compendiosa tutte le ricerche concernenti la determinazione della totalità dei numeri primi, apportando qualche notevole contributo alla conoscenza delle leggi, secondo le quali questi numeri si distribuiscono fra i numeri interi». Il premio era di mille lire, la scadenza 31 marzo 1896.

⁴ Si tratta di [Cesàro 1894 d].

⁵ Torelli adotterà il libro di Cesàro ([Cesàro 1894 a]) come testo nel suo corso.

CT11

Torre Annunziata, 31 Ag., 94

Chiarissimo Sig^r Professore¹,

Ella vorrà scusarmi se non ho finora potuto mantenere la promessa di mandarle un elenco delle pubblicazioni concernenti i numeri primi. Ciò è dipeso soltanto dal fatto che un elenco da me posseduto, e che avevo redatto con molta cura quando avevo ancora l'intenzione di scrivere una monografia sulla totalità dei numeri primi, non mi è stato possibile rintracciarlo fra le mie carte.

Speravo di poterlo trovare ora che sto raccogliendo tutte le mie piccole cose in occasione del trasferimento del mio domicilio a Napoli, ma ho dovuto rinunziarvi. In cambio mi sono caduti sott'occhio vari articoli "sur la fréquence et la totalité des nombres premiers" inseriti nei vol. V e VI della "Nouvelle Corresp. Mathém." di H. Brocard². Siccome è improbabile che le riesca di trovare costà questo periodico, estinto nel 1880, credo di farle piacere trascrivendole qui appresso tutte le citazioni fatte dal Brocard, segnando quelle che mi sembrano più importanti. Gradisca, chiarissimo Signor Professore, l'espressione dei più distinti sentimenti del Suo dev.^{mo}

E. Césaro

- S. Günther³. Ziele und Result. der neueren math.-hist. Forschung. (Erlangen, 1876).
- Nesselmann⁴. Algebra der Griechen, p.186.
- Le Besgue⁵. Tables diverses pour la décomp. des nombres en leurs facteurs premiers. (Paris, 1864).
 - Klügel⁶. Mathem. Wörterbuch. (Leipzig, 1808, 3^{em}, p. 897).
 - Stifel⁷. Arithmetica integra. (Nuremberg, 1544, p. 14).
 - Cantor⁸. Zeitschrift für Math. und Ph., 2^o anno, pp. 353, 374.
 - Eulero⁹. Memorie dell'Accademia di Pietroburgo, t. VI e XIII.
 - Lambert¹⁰. Anlage zur Archit. des Einfachsten, etc... (Riga, 1771, p. 507).
 - Clausen¹¹. Beitrag zur Theorie der Reihen (Crelle, 3^oq.).
 - Scherk¹². Bemerkungen über die Lambertsche Reihe (Crelle, 9^o q., p. 162).
 - Burhenne¹³. Ueber das Gesetz der Primzahlen. (Archives de Math. et Phys., 19^o q., p.442).
 - Hankel¹⁴. Die Entwicklung der Mathemath., etc. (Tübingen, 1869, p. 22).
 - ***- Riemann¹⁵. Ueber die Anzahl der Primzahlen, ecc. (Berliner Monatsberichte, 1860, p. 671) o nel vol. delle opere.
 - Cahen¹⁶. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, sur des fonctions analogues, Annales de l'Ec. norm supér. 3 s. t. X, 1894 p. 75-164.
 - Curtze¹⁷. Notes diverses sur la série de Lambert et la loi des nombres premiers (Annali di Matematica, 2^a serie, t. I, p. 285).
 - *- Gauss¹⁸. Opere complete, t. II, 1876, p. 444
 - *- Legendre¹⁹. Théorie des nombres, t. II, p. 65, 91, ecc.
 - ***- Tchébychew²⁰. (Journal de Liouville, 1852?)
 - ** - Lejeune Dirichlet²¹. (Crelle, t. XVIII)
 - Catalan²². Manual d'Arith. et d'Algebre, 8^{em} éd., p. 30. Mélanges Mathématiques, p. 134
 - Moreau²³. (Nouvelles Annales de Math., 1873, p. 323)
 - Dupré²⁴. Examen d'une proposition de Legendre. (Paris, Mallet-Bachelier, 1859)
 - Piarron²⁵ de Mondésir (Annuaire de l'Association française, Congrès du Havre)
 - *- Meissel²⁶. Math. Annalen (pochi anni prima del 1877) II, III
 - *- Drach²⁷. (Philos. Magazine, 1844, p. 192)

- *- Lorenz. (Tidskrift fur Mathematik, di Zeuthen, 1880?)
- ? Journal de Mathématiques. (1866, p. 188)²⁸
- Hadamard²⁹. Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. Journal de math. pures et appliqués 4^e, s. 7, IX, p. 171-213).
- Le Besque³⁰. (Nouvelles Annales, 1856, p. 130)
- Dirichlet³¹. (Journal de Math., 1839, p. 393)
- Desboves³². (Nouv. Annales, 1855, p. 281)
- Dirichlet³³. (Crelle, t. XLVII)
- Serret³⁴. (Journal de Math., t. XVII, p. 186)
- Terquem³⁵. (Nouv. Annales, 1846, p. 610)
- " (" , 1855, p. 117)³⁶
- Lionnet³⁷. (" , 1879, p. 356) et 1871, p. 181
- Hargreave³⁸. (Philosoph. Magazine, 1849, 1854)
- J.W.L. Glaisher³⁹. Totalité des nombres premiers de la forme $4n+1$ or $4n-1$. (Proceedings of the R.S., 1879)
- J.W.L. Glaisher⁴⁰. Groupes de nombres impairs consécutive premiers. (Messenger of Math., 1878)
- O. Bonnet⁴¹. Jorunal de Mathém., 1843, pp. 73, 81
- Dormoy⁴². Formule générale des nombres premier (Comptes rendus, 1866)
- *- J.W.L. Glaisher⁴³. Sur la valeur de la constante de la formule de Legendre (Proceedings of the Cambrige Phil. Soc., 1879)
- Le Besgue⁴⁴. (Nouv. Annales, 1862)
- Guibert⁴⁵. (Journal de Math., 1862, p. 414)
- ***- Mertens⁴⁶. (Crelle, 1873, 1874)
- Chabert⁴⁷. (Nouv. Ann., 1844, p. 251)
- Poincaré. ? E. Lucas. ? Genocchi. ?
- Lugli⁴⁸. Sul numero dei num. Primi da 1 a n. Giornale di Batt. XXVI, p. 86

¹ A questa lettera Torelli risponderà con quella datata 8 settembre 1894, lettera Ag. Torelli oltre a ringraziare per le notizie fornite, segnala, come richiesto dall'amico, mende e dubbi sul testo [Cesàro 1894 a] adottato a lezione.

² Gli articoli sono [Brocard 1880].

³ [Günther 1876].

⁴ [Nesselmann 1842].

⁵ [Le Besgue 1864].

⁶ [Klügel 1808].

-
- ⁷ [Stifel 1544].
⁸ [Cantor 1857].
⁹ [Euler 1738].
¹⁰ [Lambert 1771].
¹¹ [Clausen 1828].
¹² [Scherk 1832].
¹³ [Burhenne 1852].
¹⁴ [Hankel 1869].
¹⁵ [Riemann 1860].
¹⁶ [Cahen 1894].
¹⁷ [Curtze 1867].
¹⁸ [Gauss 1863].
¹⁹ [Legendre 1830].
²⁰ [Tchébychef 1852].
²¹ [Dirichlet 1838].
²² [Catalan 1885].
²³ [Moreau 1873 a], [Moreau 1873 b].
²⁴ [Dupré 1859].
²⁵ [Piarron 1878].
²⁶ [Meissel 1870], [Meissel 1871].
²⁷ [Drach 1844].
²⁸ [William 1866].
²⁹ [Hadamard 1893].
³⁰ [Le Besque 1856].
³¹ [Dirichlet 1839].
³² [Desboves 1855].
³³ [Dirichlet 1854].
³⁴ [Serret 1852].
³⁵ [Terquem 1846].
³⁶ Il volume 14 del 1855 delle “Nouvelles Annales de Mathématiques” contiene solo un articolo di Alfred Terquem sull’insegnamento della geometria descrittiva.
³⁷ [Lionnet 1879].
³⁸ [Hargreave 1849], [Hargreave 1854].
³⁹ [Glaisher 1879 a].
⁴⁰ Nel volume del The Messenger of Mathematics ci sono vari articoli di Glaisher, l’articolo qui citato potrebbe essere [Glaisher 1878].
⁴¹ [Bonnet 1843].
⁴² [Dormoy 1866].
⁴³ [Glaisher 1879 b].
⁴⁴ [Le Besque 1862].
⁴⁵ [Guibert 1862].
⁴⁶ [Mertens 1873], [Mertens 1874 a].
⁴⁷ [Chabert 1844].
⁴⁸ [Lugli 1888].

CT12

Torre Annunziata, 7 Novembre 1894

Chiarissimo Professore¹,

Ella vorrà scusarmi se le eccezionalissime circostanze nelle quali mi son trovato e tuttora mi trovo non mi hanno concesso di scriverle la lunga lettera che avrei dovuto. La mia casa è in piena disorganizzazione per un “déménagement” iniziato un mese fa e spezzato dal capriccio d’un “padrone di casa”. Solo nella seconda metà di questo mese potrò cominciare a trasferirmi nella casa che ho finalmente presa a Napoli, in Via Sapienza, 29. Allora più comodamente potrò rispondere alle osservazioni, quasi tutte giuste, che Ella fece sul mio “corso” e delle quali la ringrazio. Tengo soltanto a confessarle subito il grave ed imperdonabile errore (degno d’un cultore di “curve speciali”) nel quale sono caduto a pag. 107². Intanto ho conservate le sue osservazioni insieme alle mie per servirmene in una eventuale nuova edizione³.

Spero che Ella mi darà agio di fare altrettanto per l’Elasticità⁴, sebbene dai fogli rinviatimi mi sono accorto che Ella non ha trovato ancora il tempo di guardarla.

Gradisca, chiarissimo Professore, l’espressione dei miei distinti sentimenti.

E. Cesàro

¹ Risposta alla lettera A₉, datata 2 novembre 1894. Le notazioni di Torelli al testo [Cesàro 1894 a], contenute nella lettera A₈, vennero raccolte in sei pagine; purtroppo è andato perduto un foglio con le prime quattro pagine. Il riferimento a pag. 107 doveva essere contenuto proprio nel foglio mancante; si veda la nota 2 nella lettera A₈.

² A pagina 107 del suo testo di Analisi Algebrica Cesàro dà delle applicazioni di alcune disuguaglianze stabilite nella pagina precedente e più precisamente della seguente disuguaglianza

$$(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \dots < 1 - (\alpha + \beta + \gamma + \dots) + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \dots)$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ compresi tra 0 e 1. Come prima applicazione prova che

“Le potenze di un numero compreso tra 0 e 1 tendono a zero quando gli esponenti crescono all’infinito”.

Egli indica con $1 - \alpha$ il numero e dalla disuguaglianza precedente deduce

$$(1 - \alpha)^n < 1 - n\alpha + n(n - 1) \frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2} [(1 - n\alpha)^2 + (1 - n\alpha^2)]$$

Conclude allora così:

“Siccome $1 - n\alpha$ è inferiore ad $1 - n\alpha^2$, basterà prendere n superiore ad $\frac{1-\varepsilon}{\alpha^2}$ perchè $(1 - \alpha)^n$ riesca inferiore al numero ε , dato piccolo a piacere”

Tale conclusione è evidentemente erronea in quanto la quantità $1 - n\alpha + n(n-1)\frac{\alpha^2}{2}$ diverge positivamente al divergere di n . L'errore nasce probabilmente dalla seguente distrazione: Cesàro deve aver considerato la quantità $1 - n\alpha$ inferiore ad 1, il quadrato di conseguenza lo ha considerato inferiore alla quantità stessa, maggiore il secondo termine della disuguaglianza con $1 - n\alpha^2$, e fissato ε individua n affinché valga $1 - n\alpha^2 < \varepsilon$. In [Cesàro 1904] pagina 104 verrà ridata la disuguaglianza relativa ai numeri $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ma non verrà più riproposta l'applicazione alla prova che a^n tende a zero per $0 < a < 1$.

³ Cesàro non pubblicò mai una nuova edizione del suo corso di Analisi Algebrica [Cesàro 1894a], forse perché non diede più corsi di Analisi algebrica. Una parte del materiale ivi contenuto trovò posto in [Cesàro 1904].

⁴ Il testo è [Cesàro 1894 b].

CT13

Napoli¹, 28 Dic., 96

Chiarissimo Signor Professore,

Il Prof. G.[ebbia]² non ha risposto alla mia offerta (*) di far pubblicare la Sua Memoria (di Elasticità)³ negli Atti dell'Accademia di Napoli. Siccome io non posso fare altro, sicuro come sono che un mio giudizio favorevole, comunicato al Prof. B.⁴, avrebbe l'effetto diametralmente opposto a quello che il Prof. G.[ebbia] se ne ripromette, così vengo a Pregarla di volermi informare se il Prof. G.[ebbia] respinse la mia proposta, affinché io sappia come regolarli riguardo al manoscritto.

Colgo questa occasione per presentarle, insieme all'espressione dei mie migliori sentimenti, i migliori auguri pel nuovo anno.

E. Cesàro

(*) ed all'invio della mia Nota “Sulla distrib. dei numeri primi”⁵

A proposito :- l'Accademia riproporrà il tema sui numeri primi⁶.

¹ Cartolina postale.

² Si confronti lettera successiva.

³ Michele Gebbia aveva ottenuto i suoi più importanti risultati sulle deformazioni tipiche dei corpi solidi e sulla loro rappresentazione analitica nel periodo 1892-95, ma differì la pubblicazione del suo lavoro fino ai primi anni del nuovo secolo quando il

problema era già stato completamente risolto da E.I. Fredholm. Il lavoro [Gebbia 1902] verrà pubblicato sugli Annali di Matematica.

⁴ Fino alla fine del 1897 è Brioschi a dirigere gli Annali di Matematiche. La terza serie sarà invece diretta da Beltrami, Cremona, Jung e Dini. Non si può comunque escludere che Beltrami già nel 1896 collaborasse con la rivista.

⁵ Si tratta di [Cesàro 1896].

⁶ Il 31 marzo 1896 allo scadere del bando (cfr. lettera CT10) furono presentati all'Accademia di Napoli due manoscritti. Nella seduta del 31 gennaio 1897, ritenuti entrambi i manoscritti insufficienti, l'Accademia deliberò di rimettere a concorso lo stesso tema, con un premio della stessa cifra e con la scadenza fissata al 31 marzo 1898.

CT14

Napoli¹, 26 Febbrajo, 97

Chiarissimo Signor Professore,

Ella vorrà tenermi iscusato se non mi è stato possibile, rispondere alla Sua ultima lettera.

Voglia attribuire ciò unicamente al pessimo stato di salute in cui mi trovo da circa due mesi, e ad una serie di grattacapi di varia specie, che mi hanno fortemente distolto dalle mie occupazioni abituali. Oggi ho ripreso il lavoro interrotto da un mese, e mi son trovato di fronte ad una quindicina di lettere! Ciò mi obbliga ad essere breve. Le scrivo principalmente per dirle che, malgrado tutta la buona volontà, non mi è riuscito di rintracciare i miei appunti bibliografici sulla teoria dei numeri, ed altri miei scritti. Temo che, nel gran disordine in cui son costretto a vivere, aspettando il giorno della liberazione, tutta questa roba sia stata distrutta per opera dei miei ragazzi.

Debbo anche pregarla d'informare^(*) il Sig. Gebbia che il suo manoscritto sulla elasticità² sta, dietro la porta di casa mia, a disposizione sua o di qualunque persona che verrà a richiederlo in suo nome, non essendo io disposto a spendere neppure un centesimo per rimandarglielo, dopo aver con lui sprecato troppa cortesia.

La prego di gradire, chiarissimo Signor Professore, l'espressione dei miei distinti sentimenti.

E. Cesàro

(*) presentandosene l'occasione

¹ Cartolina postale.² Confronta lettera precedente.

CT15

Napoli, 12 Dic., 97

Chiarissimo Signor Professore,

Non sono riuscito a ricordarmi del modo di rendersi conto del passaggio a cui Ella accenna¹; ma credo che si possa risparmiare ogni calcolo riferendosi a quanto si è detto per dimostrare l'unicità della soluzione delle equazioni dell'equilibrio, giacché, se non erro, la dimostrazione fatta (e che coincide, in fondo, con quella da Lei accennata) mostra appunto che non vi può essere un secondo sistema di funzioni $p_{xx}, p_{xy}, \dots$, soddisfacenti alle suddette equazioni. Non sono ben sicuro di ciò, perché sto troppo lontano da questo genere di studii; ma esaminerò meglio la questione, e cercherò di colmare la lacuna che Ella ha avuto la gentilezza di segnalarmi. Anche dagli studii aritmologici mi sono allontanato fin troppo; ma non tarderò, appena terminato il "Calcolo"² a far ritorno ad essi.

Il mio "premier mémoire"³ non potrebbe esserle di alcuna utilità nella questione proposta dall'Accademia^(**), e se mi duole di non possederne una copia per poterla mettere a sua disposizione, ne sono dall'altra parte quasi lieto, perché sono ben lungi dal ritenermi soddisfatto di quel mio lavoro di gioventù, che vorrei poter distruggere.^(*) Le offro invece di spedirle, nel caso che Ella non l'abbia già acquistata una interessante memoria di La Vallée-Poussin (di circa 200 pag.) pubblicata recentemente negli "Annali della Société Scientifique de Bruxelles"⁴. Quanto al volume della "Nouv. Correspondence", in cui si trovano gli articoli bibliografici del Brocard⁵, non mi è stato possibile ritrovarlo. L'ho forse dato in prestito a qualcheduno, che non si è curato di restituirmelo.

Lemoine mi ha scritto che lo stesso Brocard non ha nessun "estratto" dei suoi articoli, ma mi ha offerto di mandarmi il volume della "Nouv. Corresp." per pochi giorni, a condizione di restituirglielo subito, raccomandato. Se Ella vuole, lo farò spedire direttamente a Lei; ma non credo che ciò sia per recarle grande vantaggio nel Suo lavoro. Mi auguro che prima della scadenza⁶ Ella trovi modo di aggiungere qualche cosa di suo alle ricerche sui numeri primi, per poter così riportare vittoria

completa! Sarò poi felicissimo di poter utilizzare il suo lavoro nel redigere la mia "Aritmetica assintotica"⁷, che verrà subito dopo il Calcolo.

Questo è in via di pubblicazione, e fra pochi giorni avrò il piacere di offrirle le prime quaranta pagine.

In attesa d'una sua risposta, circa il lavoro di La Vallée-Poussin, La prego di gradire, chiarissimo Signor Professore, l'espressione dei miei distinti sentimenti.

E. Cesàro⁸

(**) giacché non tratta di numeri primi

(*) Sarei curioso di sapere da chi e dove sono stato battezzato geometra belga!⁹

¹ Questa lettera è di risposta a quella inviata dal Torelli a Cesàro, datata 6 dicembre 1897, lettera A₁₁. La domanda riguarda certe equazioni contenute nel capitolo «Distribuzione delle azioni interne» nel *Trattato dell'elasticità* [Cesàro 1894 b].

² Cesàro si riferisce [Cesàro 1897 a].

³ Torelli chiede a Cesàro copia della sua memoria [Cesàro 1883]; si tratta di una copiosa raccolta di vari scritti.

⁴ La memoria è [La Vallée Poussin 1896].

⁵ Cfr. lettera CT 11.

⁶ Si riferisce al concorso bandito dall'Accademia di Napoli, cfr. lettere CT10, CT15. Alla scadenza Torelli presenterà solo una parte dei risultati che avrebbe voluto presentare nella memoria, «*Meditationis est perscrutari occulta*». Fu proprio la sua incompletezza, che spinse l'Accademia a negare il premio a Torelli e a bandire di nuovo il concorso nel 1899 con lo stesso tema. Scadenza del bando 31 marzo 1900.

⁷ Cesàro non pubblicò mai tale volume, anzi di lì a poco avrebbe abbandonato definitivamente lo studio della teoria dei numeri.

⁸ Torelli risponderà il 18 dicembre 1897, lettera A₁₂. Riporterà la citazione del Gram e accetterà di prendere in prestito la memoria di La Vallée Poussin.

⁹ Torelli trova che Cesàro viene indicato come *geometra belga* nella monografia [Gram 1884].

CT16

Napoli, 1° Dic., 98

Chiarissimo Signor Professore¹,

Mi congratulo vivamente con Lei per la condotta tenuta in codesta Facoltà (sempre la stessa!), specialmente dopo l'incredibile ultima Gesuitica deliberazione.

Fino ad un certo punto si sarebbe potuto scusare l'interessamento per una persona, ma non si potrebbe abbastanza deplorare la parzialità commessa in danno di due bravi insegnanti per favorire una vera nullità.

La ringrazio fin da ora per le osservazioni che Ella mi promette intorno al "Calcolo"², e che io metterò insieme a quelle, già numerose, che ho avuto occasione di fare io stesso. A questo proposito credo utile segnalare un'altra dimostrazione³ del teor. II, indipendente dal secondo lemma:

Supponiamo che la funzione sia finita intorno a tutti i punti di (a, b) . Dal fatto che la funzione è finita a destra di a risulta l'esistenza di numeri $x > a$, tali che in (a, x) la funzione è finita.

Consideriamo tutti i numeri x , non maggiori di b , tali che in (a, x) la funzione sia finita. Sia $\xi (\leq b)$ il limite superiore dell'insieme di questi numeri. Dico che ξ è il massimo numero dell'insieme. Infatti, preso ξ' minore di ξ e sufficientemente vicino a ξ , la funzione è finita, per ipotesi, in (ξ', ξ) ; essa è finita anche in (a, ξ') , e però è finita in (a, ξ) .

Se fosse $\xi < b$, si potrebbe trovare un numero $\xi'' > \xi$, sufficientemente vicino a ξ , tale che in (ξ, ξ'') , e per conseguenza in (a, ξ'') , la funzione sia finita, e ξ non sarebbe il massimo dell'insieme considerato. Dunque $\xi = b$, e però la funzione è finita in (a, b) .

Nel venturo anno io porterò innanzi a tutto ciò che riguarda la variabile indipendente, ed enuncerò il precedente teorema in modo più generale come una proprietà degli intervalli: "Sia Ω una proprietà tale che, se è vera nelle due parti in cui si può spezzare un intervallo è vera nell'intervallo totale. Se Ω è vera intorno a tutti i punti d'un intervallo, è vera nell'intervallo"⁴.

Gradisca, chiarissimo Signor Professore, l'espressione dei più distinti sentimenti del Sup dev.^{mo}

E. Cesàro

¹ Questa lettera è di risposta a quella di Torelli a Cesàro datata 22 novembre 1898, lettera A₁₃. Torelli racconta di essersi dimesso dalla carica di Preside della Facoltà di Scienze dell'Università di Palermo per attirare l'attenzione sull'importante questione delle nomine dei professori universitari; il sistema delle nomine a straordinario in mancanza di indicazioni di recenti concorsi non poteva che essere dannosa per l'insegnamento, in questi casi occorreva, secondo il Torelli ma non secondo tutta la Facoltà, procedere conferendo l'incarico. I docenti a cui fa riferimento Cesàro sono: Francesco Paternò, nominato straordinario di Geometria descrittiva, Michele Albeggiani e Michele Gebbia, rispettivamente incaricati di Applicazioni della Geometria descrittiva e Fisica Matematica.

² Si tratta del già citato [Cesàro 1897 a].

³ Questa dimostrazione troverà posto nella seconda edizione di [Cesàro 1897 a] a pag. 14.

⁴ Questa proposizione, un po' oscura nella formulazione, non troverà posto in nessuna delle due edizioni del testo di Cesàro.

CT17

Napoli, 31 Marzo, 01

Ch.^{mo} Sig. Professore,

Non riesco a ricordare il significato preciso del passaggio da lei citato; ma credo che si debba intendere nel seguente modo¹. Ammessa la convergenza della serie

$$a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \dots = k, \quad (1)$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum \frac{a_n}{n^x} = k \quad (x > 1) \quad (2)$$

Ne segue, quando è vera la (2), che la serie considerata, se converge, ha la somma k . In particolare, per²

$$a_n = \frac{1}{\log n} - [\vartheta(n) - \vartheta(n-1)], \quad (\text{ed } a_1 = 0)$$

essendo vera la (2) con $k = A + B - C$, è anche vera la (1), sicché si tende ad avere

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \dots + \frac{1}{n \log n} - \sum_2^n \frac{\vartheta(n) - \vartheta(n-1)}{n} = A + B - C,$$

restando sempre ipotetica la convergenza della serie (1). D'altra parte tende ad essere vera anche l'eguaglianza

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \dots + \frac{1}{n \log n} - \log \log n = B.$$

Dunque

$$\sum_2^n \frac{\vartheta(n) - \vartheta(n-1)}{n} = \log \log n + C - A.$$

L'altro esempio, che Ella adduce nella sua lettera, non si potrebbe giustificare nell'istessa guisa.

Quanto al teorema enunciato in principio, forse la mia "Memoria" (che non ho presente) ne contiene la dimostrazione implicita. Ad ogni modo, per dimostrarlo, basta porre

$$a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \dots + \frac{1}{n}a_n = k_n,$$

e scrivere

$$\sum \frac{a_n}{n^x} = \sum \frac{k_n - k_{n-1}}{n^{x-1}} = \sum k_n \left\{ \frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}} \right\}$$

poi, osservando che, per $x > 1$,

$$\frac{x-1}{(n+1)^x} < \frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}} < \frac{x-1}{n^x}$$

si ha (*)

$$(x-1) \sum \frac{k_{n-1}}{n^x} < \sum \frac{a_n}{n^x} < (x-1) \sum \frac{k_n}{n^x},$$

e finalmente

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum \frac{a_n}{n^x} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \sum \frac{k_n}{n^x} = k.$$

Mentre la ringrazio di aver richiamato la mia attenzione sopra un passaggio, in verità troppo oscuro, della mia Memoria, La prego di gradire, Ch.^{mo} Sig. Professore, l'espressione dei mie più distinti sentimenti.

E. Cesàro

(*) si può sempre supporre $k > 0$, e quindi, almeno a partire da un certo valore dell'indice, $k_n > 0$.

¹ Questa lettera è di risposta a quella di Torelli a Cesàro datata 28 marzo 1901, lettera A₁₆. Torelli ha vinto con la sua memoria, «*Die Arithmetik ist die Königin der Mathematik!*», il concorso bandito dall'Accademia di Napoli. Prima della sua pubblicazione consulta Cesàro su alcune questioni aritmetiche. Torelli, nella sua lettera, chiede spiegazioni su alcuni passaggi presenti nella memoria [Cesàro 1894 c]. Una minuta incompleta è la lettera C₁. Nel [Landau 1909] si trova un ampio studio sulla convergenza delle serie del tipo $\sum \frac{a_n}{n^x}$, dette serie di Dirichlet, e alla loro applicazione alla teoria dei numeri primi. Cfr. lettera LC1.

² Con $\theta(n)$ viene indicato il numero dei primi inferiori ad n ; per tale funzione oggi si usa correntemente il simbolo $\pi(n)$.

CT18

[Napoli] 30 Gennaio, 1902

Ch.^{mo} Sig. Professore¹,

Mi occorrerebbe, il più presto possibile, un certificato di codesta Facoltà (munito di tutti i bolli, atti a renderlo ufficiale) per attestare che per cinque anni ho insegnato costà, con diligenza, Analisi algebrica, in qualità di prof. ordinario, e Fisica Matematica, e che ho svolto i corsi seguenti:

-Funzioni potenziali, Elasticità, Teorie elettriche di Maxwell, Teoria matematica della luce, ecc.

Posso rivolgermi alla Sua cortesia per farmi avere tale certificato? Esso deve servirmi per accompagnare la mia domanda al Ministro dell'Interno del Belgio, per essere compreso fra i candidati alle cattedre di Meccanica analitica e Fisica matematica, vacanti nell'Università di Liegi².

La prego di accogliere, con anticipati ringraziamenti, l'espressione dei migliori sentimenti del Suo dev.^{mo}

E. Cesàro

¹ Su carta intestata: "Regia Università di Napoli"

² Cesàro spinto dalle necessità economiche legate alla sua numerosa famiglia (aveva otto figli) pensava in quegli anni di trasferirsi presso qualche università straniera. A questo fine prese anche lezioni di inglese e sondò ambienti americani. Naturalmente Liegi gli apparve come una ottima soluzione. All'École des Mines di Liegi aveva studiato nella sua giovinezza e con vari matematici belgi aveva conservato intensi rapporti di collaborazione scientifica. A Liegi risiedeva anche suo fratello Giuseppe (1849-1939), professore universitario di mineralogia e futuro istitutore del principe ereditario.

CT19

Napoli¹, 1 Febb., 02Ch.^{mo} Sig. Professore,

Rientrando a casa trovo il certificato², e mi affretto ad inviarle vivissimi ringraziamenti per la sollecitudine con cui Ella ha voluto esaudire la mia preghiera. La prego inoltre di voler trasmettere anche agli altri Colleghi l'espressione della mia riconoscenza per la forma in cui è stato redatto il certificato, forma che supera di tanto i miei meriti e le mie speranze.

Gradisca, ch.^{mo} Sig. Professore, i più distinti saluti del Suo dev.^{mo} ed obbli^{mo}

E. Cesàro

¹ Cartolina postale.

² Confronta lettera precedente.

CT20

Napoli¹, 26 Maggio, 02

Ch.^{mo} Sig. Professore,

Sarò lieto di leggere e di comunicare all'Accademia ^(*) il lavoro del C.[ipolla], proponendo che Ella, come il più competente in tal genere di studii, faccia parte della commissione². La prego perciò di volermi mandare anche la relazione, che leggerò in Suo nome nella seduta successiva a quella della presentazione; e così il lavoro potrà essere sollecitamente ^(**) pubblicato. Colgo l'occasione per esprimerle i miei migliori sentimenti, e riconfermarmi Suo dev.^{mo}

^(*) che si riunirà, in Giugno, il 7 ed il 14.

^(**) più sollecitamente ancora se l'Autore vorrà lasciare a me la cura di correggere le bozze

E. Cesàro

¹ Cartolina Postale.

² Questa lettera è di risposta a quella di Torelli a Cesàro datata 23 maggio 1902, lettera A₁₉. Torelli chiede a Cesàro di presentare all'Accademia delle Scienze di Napoli, per la pubblicazioni sui *Rendiconti*, un estratto della tesi di laurea del suo allievo Michele Cipolla. Il lavoro in questione è [Cipolla 1902].

CT21

Napoli¹, 14 Giugno, 02

Ch.^{mo} Sig. Professore,

Oggi l'Accademia² si riunisce per l'ultima volta, in questo mese. Temendo che non le sia pervenuta la mia precedente cartolina, torno a scriverle per rinnovarle La preghiera di volermi mandare il lavoro del

C.[ipolla]³ accompagnato da una sua relazione, che io potrei leggere in Suo nome all'Accademia nella prima seduta di Luglio.

È ben naturale che Ella sia chiamato a far parte della Commissione, sia per la sua qualità di Corrispondente, sia per la Sua speciale competenza, ufficialmente riconosciuta dall'Accademia col premio conferitole⁴.

Gradisca l'espressione dei migliori sentimenti del Suo dev.^{mo}

E. Cesàro

¹ Cartolina postale.

² Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli.

³ Confronta lettera precedente.

⁴ Si veda lettera CT17 nota 1.

CT22

Napoli, 6 Gennaio, 1903

Chiarissimo Signor Professore¹,

Le trasmetto, qui accluse, due lettere² del sig.^{re} E. Landau, di Berlino, nelle quali si accenna a risultati non rigorosamente dimostrati nella monografia sui numeri primi³, da Lei presentata all'accademia di Napoli, e nella mia nota "sulla distribuzione dei numeri primi".⁴

Per quanto riguarda il mio lavoro ho cercato invano di ricordarmi in qual modo io sia stato condotto a scrivere, nella seconda pagina, le parole: "d'onde subito risulta che la serie ν è convergente per $x > \frac{1}{2}$." Temo che il qualsiasi ragionamento sommario, balenato alla mia mente nel fare tale affermazione, non sia rigoroso, né possa rendersi tale. Si tratterebbe però d'un errore latente, e non d'una dimostrazione esplicitamente erronea, come sembra credere il D^r. Landau nella prima lettera.

Infatti io mi servo dell'identità citata dal Landau soltanto dopo aver stabilito, o creduto di stabilire, la convergenza della serie ν . Ad ogni modo io mi son troppo allontanato (forse per sempre) da questo genere di studi, e non mi sento in grado di rimettermi ad esaminare, sia pure superficialmente, questioni che in altri tempi mi attraevano tanto! Sono invece convinto che Ella troverà argomento di nuovi interessanti nelle lettere del D^r. Landau; ed è per questo che ho domandato ed ottenuto il permesso di comunicargliele. Gradisca, ch.^{mo} Sig.^r Professore, l'espressione dei più distinti sentimenti del Suo dev.^{mo}

E. Cesàro⁵

¹ Una minuta di questa lettera è C₂.

² Le lettere alle quali si fa cenno sono quelle qui riportate con le sigle LC1, LC2. In D₃ Cesàro risponderà alla lettera di Landau LC1 e chiederà di poter trasmettere a Torelli tale lettera; Landau acconsentirà in LC2.

³ Si parla del lavoro [Torelli 1902], estratto dalla memoria premiata dall'Accademia di Napoli. Si veda lettera CT17 nota 1.

⁴ Si tratta del [Cesàro 1896].

⁵ Torelli risponderà a questa lettera con una cartolina postale il 9 gennaio 1903, lettera A₂₀, in cui scrive, dopo "un esame rapido" delle lettere, di poter porre rimedio alle osservazioni di Landau.

CT23

Napoli, 17 Marzo, 03

Chiarissimo Sig.^r Professore¹,

Mi scusi tanto se le condizioni di salute mi hanno finora impedito di rispondere alla Sua gradita del dì 8 Marzo. L'influenza mi ha lasciato così stordito, che sabato scorso dimenticai di portare con me la lettera del prof. Mittag-Leffler (che le accludo); e fu per un mero caso che, in fin di seduta, mi ricordai della sua lettera, e cercai di riparare alla meglio. Non occorre dirle che l'Accademia acconsentì immediatamente alla Sua richiesta, rallegrandosi del giusto successo ottenuto dalla Sua monografia; ed è in questi sensi che il segretario le scriverà. Permetta anche a me di congratularmi, e di augurarle che Ella riesca a vincere le difficoltà segnalate dal Dr. Landau². Ad ogni modo il porle in evidenza nella nuova edizione, sarà sempre un nuovo merito del lavoro. Colgo l'occasione per dirle che l'enunciato del mio teorema fondamentale presenta una lacuna, da me colmata non ricordo bene se nello stesso volume degli "Atti" o nel volume seguente³. Quanto alla lettera del D.^r Landau⁴, la prego di tenersela quanto vuole, giacché a me non serve. Gradisca intanto l'espressione dei più distinti sentimenti del Suo dev.^{mo}

E. Cesàro

¹ Questa lettera è di risposta a quella di Torelli a Cesàro datata 8 marzo 1903, lettera A₂₁. Torelli chiede a Cesàro che venga pubblicata sui Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Napoli la lettera di Mittag-Leffler a lui indirizzata. In tale lettera (qui riportata con la sigla MLT) Mittag Leffler proponeva una traduzione tedesca della memoria di Torelli sui numeri primi. Tale traduzione in realtà non venne mai effettuata. Torelli appare invece ancora fiducioso nel poter completare le lacune

presenti nel lavoro e nel pubblicarne una nuova versione. Minuta di questa lettera è la C₃.

² Si veda lettera precedente.

³ Si tratta di [Cesàro 1894 d].

⁴ Si tratta in realtà di due lettere, quelle qui riportate con le sigle LC1, LC2.

CT24

Napoli¹, 22 Giugno, 03

Chiarissimo Signor Professore,

Non risposi subito alla Sua lettera perché mi proponevo di parlare prima ai Colleghi. Oggi mi limito a scriverle soltanto per dirle che, quando la questione verrà sul tappeto, farò io la proposta nel senso da Lei indicato, e che a me sembra giustissimo²; e posso aggiungere che la mia proposta sarà vivamente appoggiata da Pinto^(*), e forse da Del Pezzo.

Le scriverò più a lungo quando avrò trovato il modo di scandagliar meglio l'animo del Capelli.

Al solo S.³ non parlerò. Gradisca intanto, ch.^{mo} Sig. Professore, l'espressione dei più distinti sentimenti del Suo dev.^{mo}

E. Cesàro

(*) il quale mi autorizza a farle conoscere queste sue intenzioni.

¹ Cartolina postale.

² Lettera di risposta a quella di Torelli a Cesàro datata 14 giugno 1903, lettera A₂₃. Torelli avanza la sua candidatura a socio ordinario dell'Accademia delle Scienze di Napoli, posto rimasto vuoto con la morte di Cremona. Torelli era socio corrispondente dal 14/12/1889, fu nominato socio ordinario non residente il 12/12/1903.

³ Potrebbe trattarsi di Francesco Siacchi.

CT25

Napoli¹, 10 Nov., 03

Ch.^{mo} Sig.^r Professore,

Avrei dovuto scriverle da un pezzo intorno a varie piccole cose, che sarei stato ben lieto di poterle dire a viva voce in occasione dell'ultimo suo passaggio per Napoli. Ma gli esami e gravi fastidi domestici mi obbligano a limitarmi, per oggi, a dirle che, malgrado tutte le mie premure, i De

Rubertis non sono ancora in grado di consegnarmi neppure la prima parte del Corso². Restano però ancora varie copie dell'antica edizione, che potrebbero forse riuscire preferibili per gli studenti in ragione del minor prezzo (12,50 invece di 15). Ad ogni modo io non tarderò a spedirle i fogli già pubblicati, affinché Ella possa prenderne quei miglioramenti che più le sembreranno accettabili.

Gradisca, ch.^{mo} Sig.^r Professore, l'espressione dei più distinti sentimenti del Suo dev.^{mo}

E.Cesaro³

¹ Cartolina postale.

² Si parla della seconda edizione, notevolmente ampliata del testo [Cesàro 1897 a] apparsa nel 1905.

³ Torelli risponde con una cartolina postale il 15 novembre 1903, lettera A₂₅.

CT26

Napoli¹, 19 Nov., 03

Ch.^{mo} Sig.^r Professore,

Insieme a questa cartolina ho finalmente il piacere di spedirle il primo fascicolo del mio Corso².

Le spedisco inoltre un breve lavoro del D.^r Lombardi (assistente del Dino)³, con la preghiera di volere, dopo esame, procurarne l'inserzione (il più presto che si potrà) nei "Rendiconti" del Circolo Matematico. Tale preghiera io le rivolgo anche in nome del prof. Dino. I miei fastidii, ben lungi dal cessare, vanno aumentando. All'Istituto tecnico è stato barbaramente e ingiustamente respinto^(*) un mio figliolo (di oltre 15 anni!) nell'ultima prova (italiano orale) da un certo B., il quale notoriamente prepara per l'ammissione! Se Ella potesse indicarmi qualche via sicura per agire presso la nuova Eccellenza⁴, affinché venga esteso il beneficio della sessione straordinaria anche a mio figlio (approvato l'anno scorso in italiano dal prof. Mariani, ma respinto per il francese), gliene sarei oltremodo grato⁵. Ho scritto a Paternò, ma non mi ha risposto ancora. Questa faccenda mi tiene in uno stato d'animo così penoso, che non so più rimettermi a studiare. Gradisca, ch.^{mo} Professore, l'espressione dei più distinti sentimenti del Suo dev.^{mo}

(*) negli esami di ammissione.

E. Cesàro⁶

¹ Cartolina postale.

² Cesàro risponde alla lettera di Torelli, datata 15 novembre 1903, lettera A₂₅. Si veda anche la lettera precedente.

³ Sembra che Lombardi fosse assistente presso la Facoltà di Matematica dell'Università di Napoli. L'articolo in questione, probabilmente proprio a causa delle osservazioni di Torelli, non fu pubblicato sui Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

⁴ Si tratta di Vittorio Emanuele Orlando che fu Ministro della Pubblica Istruzione dal 4/11/1903 al 27/03/1905.

⁵ La lettera di Torelli a un destinatario non identificato, pag.212 in [Carbone *et al.* 1996], mostra che ci fu un intervento in tal senso. Dalla lettera di Torelli a Cesàro, datata 28 luglio 1904, lettera A₂₉, sembra che l'intervento fosse andato a buon fine.

⁶ Torelli risponde con una lettera datata 13 dicembre 1903, lettera A₂₆. Ringrazia Cesàro per la nomina a socio ordinario dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli ed esprime le sue perplessità sul lavoro di Lombardi.

CT27

Napoli¹, 11 Marzo, 04Ch.^{mo} Signor Professore,

Sarò ben lieto di prendere parte ai lavori del C.[ircolo], appena questo avrà avuto la fortuna di sbarazzarsi dell'opprimente G.[uccia]².

Domani presenterò il lavoro^(*) del Cipolla³, ed il sabato successivo, 19, la relazione. Per le tristissime condizioni economiche dei De Rubertis, il "Calcolo"⁴ procede assai lentamente. Siamo appena giunti a pag. 248, sicché occorrono ancora una sessantine di pagine per completare il secondo fascicolo. Peccato che io non possa seguire i suoi studi sui numeri algebrici! Le preoccupazioni per l'avvenire della mia famiglia mi paralizzano.

Gradisca, ch.^{mo} Sig. Professore, l'espressione dei migliori sentimenti del Suo dev.^{mo}

E. Cesàro

(*) Ho letto più volte la parola "cyclothomique". Stando all'etimologia mi pare che si dovrebbe scrivere cyclotomique.

¹ Cartolina postale.

² Questa lettera è di risposta a quella di Torelli a Cesàro datata 9 marzo 1904, lettera A₂₇. Torelli racconta della seduta del Circolo Matematico di Palermo in cui Guccia fu sfiduciato: motivo di scontro fu la biblioteca del Circolo che Guccia voleva al servizio

dei Rendiconti, ma che molti soci residenti vedevano bene come biblioteca universitaria.

³ Il lavoro è [Cipolla 1904].

⁴ Confronta lettera CT25.

CT28

Napoli¹, 2 Dic., 04

Ch.^{mo} Sig.^r Professore,

Le ho spedito, questa mane, la copertina del “Calcolo”². Quanto al manoscritto del Sannia, mi son permesso di mandarglielo per l’inserzione nei “Rendiconti” del Circolo³ perché l’Autore mi ha detto che, appena avrà fatto ritorno a Torino, domanderà a Lei ed allo zio (prof. D’Ovidio)⁴ di volerlo presentare come Socio del Circolo.

Gradisca, ch.^{mo} Sig. Professore, l’espressione dei più distinti sentimenti del Suo dev.^{mo}

E. Cesàro

¹ Cartolina postale.

² Confronta lettera CT25.

³ Il lavoro pubblicato è [Sannia 1905].

⁴ Achille Sannia, padre del Gustavo, a cui si fa riferimento, aveva sposato la sorella di D’Ovidio.

CT29

Napoli¹, 2 Febr., 05

Ch.^{mo} Sig.^r Professore,

Varii anni fa il N.[obile] mi comunicò il suo lavoro, che io gli restituii con osservazioni, suggerimenti e consigli. Ora egli si è deciso a pubblicarlo senza dirmi nulla, lasciando nel titolo (contro uno dei miei consigli la parola caccia)².

Gradisca, ch.^{mo} Sig.^r Professore, l’espressione dei più distinti sentimenti del Suo dev.^{mo}

E. Cesàro

¹ Cartolina postale.

² Si tratta di Vittorio Nobile e il lavoro è [Nobile 1905].

CT30

Napoli¹ 15 Febbr., 05

Ch.^{mo} Sig.^r Professore,

Son sempre a sua disposizione, e sempre lieto di renderle servizio; ma non le nascondo che vorrei non rivedere il lavoro del N.[obile]². Questi subendo l'influenza dell'essere saturo di veleno, cui fa da assistente all'Università³, sembra aver cambiato contegno verso di me. D'altronde, dopo tanti anni, mi riuscirebbe assai difficile riconoscere se egli ha fatto, o pur no, tesoro delle annotazioni, scritte di mio pugno sul primo manoscritto, e dei suggerimenti datigli, a voce, più volte. È ben probabile che se ne sia servito, quantunque abbia lasciato caccia invece d'inseguimento. Son poi troppo lontano da questo genere di studii per dare un giudizio sull'originalità dei risultati ottenuti.

Dovrei ricorrere al libro del Loria⁴; e ciò Ella ha senza dubbio già fatto. Ad ogni modo le ripeto che mi metto a Sua disposizione, e colgo l'occasione per dirmi di Lei dev.^{mo}

E. Cesàro

¹ Cartolina postale.

² Questa lettera è di risposta a quella inviata da Torelli il 13 febbraio 1905, lettera A₃₀, in cui propone di inviargli il lavoro di Nobile. Si veda la lettera precedente.

³ Vittorio Nobile era assistente di Alfonso Del Re (1859-1921) alla cattedra di Geometria descrittiva con disegno.

⁴ Il libro è [Loria 1902].

CT31

Napoli, 20 lugl. 05

Chiarissimo Sig.^r Professore¹,

Come mai ha Ella potuto dubitare dei miei sentimenti verso di Lei, che mi ha sempre onorato di tanta benevolenza? E come potrebbe mai il D.^r Cipolla entrare per qualche cosa nell'incidente cui Ella accenna? Mi

astenni dal votare solo per protestare contro la nomina dei commissarii, fatta dal Presidente con maligna intenzione.

Non credo di dover fare aggiungere altro nel verbale per render note le ragioni della mia astensione. Questa, infatti non si potrà interpretare come contraria al Cipolla, perché io mi astenni anche dalla votazione successiva, riguardante il Gallucci², e non dalle altre. D'altra parte i verbali delle adunanze precedenti mostrano che io faceva parte delle Commissioni chiamate a giudicare i due precedenti lavori (su argomenti analoghi) del Cipolla e del Gallucci

A render poi manifesta la mia stima per il Cipolla vi sarebbe un mezzo assai semplice, se a Lei piacesse di mandarmi qualche altro suo lavoro, che non sia continuazione di quelli già pubblicati dalla nostra Accademia. Io mi farei un dovere di presentarlo ai Lincei³, dileguando così ogni dubbio circa le ragioni della mia astensione.

Gradisca, ch.^{mo} Sig. Professore, l'espressione dei più distinti sentimenti del

Sempre Suo dev.^{mo} aff.^{mo}

E. Cesàro

¹Questa lettera è di risposta a quella di Torelli datata 18 luglio 1905, lettera A₃₁. Torelli chiede chiarimenti sull'astensione di Cesàro, nell'adunanza dell'Accademia di Napoli dell'8 luglio, dalla votazione sulla nota di Cipolla, [Cipolla 1905]. Dai verbali dell'adunanza Cesàro non compare fra i presentatori, contrariamente ai casi precedenti. Il presidente per l'anno 1905 era Luigi Pinto

²La nota è [Gallucci 1905].

³Si tratta ovviamente della (allora) Reale Accademia dei Lincei.

MLT

Professor Mittag Leffler
Djursholm-Stockholm

21/2 1903

Cher collègue,

Je vous remercie cordialement du tirage à part de votre mémoire que je viens de recevoir.

J'ai parlé avec M.M. Mayer et Müller à Berlin, les éditeurs des Acta, d'éditer une traduction allemande de votre mémoire¹. Ils le veulent bien s'ils obtiennent votre permission. Je trouve qu'il serait dans l'intérêt de la

science qu'une telle traduction soit faite et je serais donc enchanté si vous voulez bien vous entendre directement avec M.M. Mayer et Müller. Leur adresse est Prinz Louis Ferdinandstrasse 2, Berlin.

Au point de vue économique il ne faut pas y compter de faire une grande affaire. Des telles livres ne payent guère plus que les frais de publication. Mais vous verrez vous même à quel entendement vous pouvez venir.

M.M. Mayer et Müller sont des gens fort honorables qui font souvent des grandes sacrifices dans l'intérêt de la science seule.

Quand vous voyez M. Guccia saluez-lui cordialement de ma part.

Veuillez agréer, je vous en prie, l'expression de la haute considération avec laquelle je suis

vosre collègue dévoué
Mittag-Leffler

¹ Della memoria [Torelli 1901] non fu mai effettuata una traduzione.

MMT

Berlin 21 Mars 1903

M. le Professeur Gabriel Torelli, Palermo¹

Monsieur

Nous avons reçu votre lettre de 8 qui nous donne l'autorisation de faire traduire votre mémoire, Sulla totalita dei numeri primi.

Nous nous bornons aujourd'hui de [sic] vous remercier bien de votre bonne volonté et en profiterons avec plaisir pour la nouvelle édition, que vous préparez.

Agrécz, Monsicur, l'assurance de notre parfaite estime et nos salutations sincères

Mayer Müller

¹ La lettera è scritta su carta intestata Mayer & Müller Verlag-Sortiment-Antiquariat Hoflieferanten Sr. Majestät des Königs von Schweden und Nordwegen Fernsprech-Amt I, 821: Berlin N-W Prinz Louis Ferdinandstrasse, 2 (Ecke Georgenstrasse).

LC1

Berlin N.W., Sommerstrasse 2
27 décembre 1902

Monsieur,

Étant occupé à rédiger un mémoire sur la distribution des nombres premiers d'une progression arithmétique quelconque, je viens de relire quelques mémoires qui se rapportent à des problèmes pareils, et je trouve une objection à faire au raisonnement de la page 298 de votre travail "sulla distribuzione dei numeri primi" (Rendiconto dell'Accademia, Napoli, Ser. 3^a, vol. 2, anno 35, 1896)¹; je me permets de vous la présenter en vous priant de ne pas être fâché, si un des nombreuses résultats dont vous avez enrichi les mathématiques, n'a pas été déduit rigoureusement. Il n'est, pour des raisons indirectes, que je ne manquerai pas de développer plus bas, peu probable que je me trompe; en tout cas, l'objection ne vous a pas encore été faite jusqu'en 1900, puisque, sur la page 387 du 7^e volume de l'Intermédiaire², vous citez votre travail comme contenant une démonstration élémentaire d'un théorème énoncé sans démonstration par Tchébychew³ et démontré pour la première fois, par des moyens fort compliqués, par M. Phragmén⁴.

Pour y arriver, vous énoncez d'abord le lemme, qui vous paraît facile à démontrer, que la série

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{3^x} - \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} - \frac{1}{11^x} + \frac{1}{13^x} - \frac{1}{17^x} + \dots \mp \frac{1}{p^x} \\ &= - \sum (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{p^x} \end{aligned}$$

est convergente pour $x > \frac{1}{2}$, et, si je vous comprends bien, vous arrivez à ce résultat par le raisonnement suivant, qui, tant que je le mets en guillemets, me paraît parfaitement rigoureux⁺

«Le produit

$$\prod_{p>2} \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{p}}\right) e^{\pm \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{2p}}$$

converge évidemment (en effet $\log \Pi = \sum (\log(1 \mp \frac{1}{\sqrt{p}}) \pm \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{2p}) = \sum (\mp \frac{1}{3p^{3/2}} - \frac{1}{4p^2} \mp \dots)$ somme convergente); soit e^{-a} le valeur de produit, (a étant la constante réelle $-\sum (\mp \frac{1}{3p^{3/2}} - \frac{1}{4p^2} \dots)$)).

Pareillement, le produit

$$\prod (1 \mp \frac{1}{p^x}) e^{\pm \frac{1}{p^x} + \frac{1}{2p^{2x}}}$$

est convergent pour $x > \frac{1}{2}$ (en effet, $\log \Pi = \sum (\mp \frac{1}{3p^{3x}} - \frac{1}{4p^{4x}} \mp \dots)$ le produit converge donc pour $x > \frac{1}{3}$, a plus forte raison donc pour $x > \frac{1}{2}$) et l'on a, x parcourant des valeurs positives décroissantes jusqu'à $\frac{1}{2}$,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \prod (1 \mp \frac{1}{p^x}) e^{\pm \frac{1}{p^x} + \frac{1}{2p^{2x}}} = e^{-a}$$

(En effet, l'on sait qu'une série de Dirichlet est une fonction continue dans son domaine de convergence).

Or, pour $x > 1$,

$$\begin{aligned} \prod \left(1 \mp \frac{1}{p^x}\right) &= \frac{1}{\prod (1 \pm \frac{1}{p^x} + \frac{1}{p^{2x}} \pm \dots)} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{9^x} \dots\right) \left(1 + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{25^x} + \dots\right)} = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{7^x} + \dots} \end{aligned}$$

(La série au dénominateur converge pour $x > 0$ (donc aussi pour $x > \frac{1}{2}$, a fortiori), le termes étant de signes alternants et décroissant en valeur absolue). Donc, pour $x > 1$,

$$(1) \quad \prod (1 \mp \frac{1}{p^x}) e^{\pm \frac{1}{p^x} + \frac{1}{2p^{2x}}} = \frac{\prod e^{\pm \frac{1}{p^x} + \frac{1}{2p^{2x}}}}{1 - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{7^x} + \dots} \gg$$

Mais c'est ici que mon accord s'arrête. Le fait que le produit

$$\prod e^{\pm \frac{1}{p^x} + \frac{1}{2p^{2x}}},$$

(convergent évidemment pour $x > 1$), peut être représenté, pour $x > 1$ par le produit des deux facteurs (1^{er} membre de (1) · dénominateur de 2^d membre de (1))

$$\left(\prod \left(1 \mp \frac{1}{p^x} \right) e^{\pm \frac{1}{p^x} + \frac{1}{2p^{2x}}} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{7^x} + \dots \right)$$

joint au fait que le produit et la série formant le 1^{er} et le deuxième facteur convergent pour $x > \frac{1}{3}$, ne prouve pas que le produit $\prod e^{\pm \frac{1}{p^x} + \frac{1}{2p^{2x}}}$ (et, par conséquent, la série $-\sum \pm \frac{1}{p^x} = v(x)$) converge pour des $x < 1$, p. ex. $x = \frac{9}{10}$

La seule conclusion à tirer des raisonnements précédents (auxquels on joint quelques compléments, pour les valeurs complexes de x dont la partie réelle surpasse $\frac{1}{3}$), c'est que la fonction analytique, représentée pour $R(x) > 1$ par le produit $\prod e^{\pm \frac{1}{p^x} + \frac{1}{2p^{2x}}}$, peut être prolongée dans le demi-plan à gauche au moins jusqu'à $R(x) = \frac{1}{3}$ et que la fonction prolongée n'a pas de singularités pour $R(x) > \frac{1}{3}$; mais je ne vois pas moyen de conclure que le produit, qui représente la fonction pour $R(x) > 1$, converge pour des x inférieurs à 1, p. ex. pour $x = \frac{9}{10}$.

Pareillement, le raisonnement en haut de la page 361 ne me convainc pas.

Si la série (évidemment dépourvue de zéro réels entre 0 et 1)

$$1 - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{7^x} + \frac{1}{9^x} - \dots$$

possède, par hasard, un zéro complexe ξ à partie réelle comprise entre $\frac{1}{2}$ (exclusivement) et 1, ce seul fait prouverait que le lemme est faux; en effet, si le lemme est juste, $v(x)$ convergerait non seulement pour tous les x réels et supérieurs à $\frac{1}{2}$, mais même pour tous les x complexes dont la partie

réelle surpasse $\frac{1}{2}$. (En effet, une série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$, convergente pour $x=x_0$, converge pour tous les x dont la partie réelle surpasse celle de x_0 ; voir p. ex. Cahen, thèse, Annales de l'école normale⁵, Paris, sér. 3, t. 11 (1894)); donc

$$\sum \left(\mp \frac{1}{p^x} - \frac{1}{2p^{2x}} \mp \frac{1}{3p^{3x}} - \frac{1}{4p^{4x}} \mp \dots \right)$$

convergerait pour $R(x) > \frac{1}{2}$ et représenterait donc, dans le demi-plan $R(x) > \frac{1}{2}$, une fonction analytique dépourvue de singularités. Donc

$$e^{\sum \left(\mp \frac{1}{p^x} - \frac{1}{2p^{2x}} \mp \dots \right)} = e^{\sum \log \left(1 \mp \frac{1}{p^x} \right)} = \prod \left(1 \mp \frac{1}{p^x} \right)$$

convergerait pour $R(x) > \frac{1}{2}$ et représenterait le prolongement analytique de la fonction définie pour $R(x) > 1$ par

$$(2) \quad \prod \left(1 \mp \frac{1}{p^x} \right) e^{\pm \frac{1}{p^x} + \frac{1}{2p^{2x}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{7^x} + \frac{1}{9^x} - \dots};$$

$1 - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{7^x} + \dots$ ne pourrait donc pas avoir de racines ξ dont la partie réelle surpasse $\frac{1}{2}$; car autrement la fonction représentée, pour $R(x) > 1$, par le 1^{er} ou le 2^d membre de (2) aurait un pôle pour $x=\xi$, et $\prod (1 \mp \frac{1}{p^\xi})$ ne pourrait pas converger.

Cependant on ne connaît pas de zéro à partie réelle $> \frac{1}{2}$ de la série $1 - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{7^x} + \dots$ et je ne dis donc pas que le lemme est faux; mais je crois que sa démonstration (s'il est juste) doit se fonder sur des moyens analytiques compliqués et est peut-être tout aussi difficile que la démonstration du fait (s'il y a là un fait) présenté par Riemann que la fonction $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ n'a pas de racines dont la partie réelle surpasse $\frac{1}{2}$.

Tout de même, il y a une chose que j'admets sans aucune nouvelle explication de votre part, c'est que la série

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = -\sum \pm \frac{1}{\sqrt{p}}$$

diverge; en effet, si $v\left(\frac{1}{2}\right)$ convergerait, $v(x)$ convergerait pour $x > \frac{1}{2}$; le lemme serait juste, et l'on aurait, comme à la page précédente, pour $R(x) > \frac{1}{2}$, donc pour $x > \frac{1}{2}$

$$\prod \left(1 \mp \frac{1}{p^x}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{7^x} + \dots};$$

comme $\frac{1}{2}$ n'est pas racine du dénominateur, $\lim_{x=\frac{1}{2}+0} \prod \left(1 \mp \frac{1}{p^x}\right)$ existerait et serait >0 ; donc

$$\lim_{x=\frac{1}{2}} \log \prod \left(1 \mp \frac{1}{p^x}\right) = \lim_{x=\frac{1}{2}} \sum \left(\mp \frac{1}{p^x} - \frac{1}{2p^{2x}} \mp \frac{1}{3p^{3x}} - \dots\right)$$

existerait; donc, $\sum \left(\mp \frac{1}{3p^{3/2}} - \frac{1}{4p^2} \mp \dots\right)$ étant convergente, et $\sum \mp \frac{1}{\sqrt{p}}$ étant supposée convergente, $\sum \frac{1}{p}$ serait convergente, ce qui n'est pas vrai. Donc $v\left(\frac{1}{2}\right)$ diverge nécessairement.

Si ce seul fait, sans la connaissance de la convergence de $v(x)$ pour $\frac{1}{2} < x < 1$, vous suffit maintenant pour démontrer soit le théorème de Tchébychew^{†)}: "Étant donnés un nombre δ et un nombre ξ , l'on peut trouver un $n > \xi$ tel que, $\vartheta_3(n)$ et $\vartheta_1(n)$ ayant la signification de votre mémoire⁶

$$\left| \frac{\vartheta_3(n) - \vartheta_1(n)}{\frac{\sqrt{n}}{\log n}} - 1 \right| < \delta "$$

soit le théorème plus spécial: " $\frac{\vartheta_3(n) - \vartheta_1(n)}{\frac{\sqrt{n}}{\log n}}$ ne saurait tendre vers une limite différente de 1", soit le théorème de votre mémoire, également plus spécial que celui énoncé par T.[chebychef] " $\frac{\vartheta_3(n) - \vartheta_1(n)}{\vartheta(\sqrt{n})}$ ne saurait tendre

vers une limite différente de $\frac{1}{2}$ ”, je serais très heureux d’avoir contribué par cette lettre à ce que vous aurez, le premier, donné des démonstrations élémentaires de l’un ou de l’autre des théorèmes. Quant à moi, je n’ai pas l’intention de m’occuper prochainement de ces recherches; c’est plutôt la simplification et l’extension des démonstrations d’existence de certaines limites qui m’occupe; je ne traite que les nombres premiers d’une seule progression arithmétique.

Permettez-moi de ne pas encore terminer cette lettre, déjà devenue assez longue, et d’ajouter encore quelques mots.

D’abord, je vous fais remarquer que Tchébychew a énoncé (en 1859, dans le journal de Liouville, 1^e série, t. 16)⁷ sans démonstration suffisiente que la série

$$\sum \mp \frac{1}{p} = v(1)$$

converge; probablement il en a eu une démonstration fondée sur les mêmes principes que ceux auxquels il fait allusion dans sa lettre à Fuss; peut être il n’en a pas eu. Quant au théorème lui-même, il est juste; car il a été démontré, sans trop de difficultés, par M. Mertens, dans son brillant mémoire⁸: “Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie”, Journal de Crelle, t. 78.

Donc, l’état actuel de mes connaissances est, pour x réel: $v(x)$ converge pour $x > 1$ $x=1$. Je pourrai déduire peut-être de mes nouvelles recherches sur la progression arithmétique que pour tout $m > 0$,

$$\sum \mp \frac{\log^m p}{p}$$

converge. Cette dernière circonstance a déjà été établie, pour $m=1$, par M. de la Vallée-Poussin⁹; car celui-ci a démontré⁽⁺⁾ que

$$\lim_{n=\infty} \left(\sum_{\substack{p \leq n \\ p \equiv 1 \pmod{4}}} \frac{\log p}{p} - \frac{\log n}{2} \right)$$

de même que

$$\lim_{n=\infty} \left(\sum_{\substack{p \leq n \\ p \equiv 3 \pmod{4}}} \frac{\log p}{p} - \frac{\log n}{2} \right)$$

existe; M. Mertens, évitant la théorie des variables complexes, était arrivé seulement jusqu'à la démonstration du fait que, pour $n = \infty$, le deux parenthèses restent finies.

Si une démonstration directe et élémentaire de la convergence de $v(x)$ pour $x > \frac{1}{2}$ ou même pour un intervalle plus petit inférieur à 1 (p. ex. 0,9...1) était possible, ces 2 théorèmes de M. de la Vallée-Poussin, seraient des conséquences directes de son théorème antérieur que, pour la somme étendue à tous les nombres premiers

$$\lim_{n=\infty} \left(\sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} - \log n \right)$$

existe; car $\sum \mp \frac{\log p}{p}$ convergerait (si pour un $x < 1$ $\sum \mp \frac{1}{p^x}$ converge), donc

$$\lim_{n=\infty} \left(\sum_{\substack{p \leq n \\ p \equiv 1}} \frac{\log p}{p} - \sum_{\substack{p \leq n \\ p \equiv 3}} \frac{\log p}{p} \right)$$

existerait¹⁰ etc., et M. de la V.[allée]-P.[oussin] n'aurait pas eu besoin de remonter aux sources transcendantes pour obtenir les théorèmes cités sur les progressions $4n+1$ et $4n+3$. Il en est de même du cas $m > 0$ ($m \neq 1$).

Voilà pourquoi je regarde la démonstration de la convergence de $v(x)$ pour un $x < 1$ (si ce fait est vrai) comme bien difficile; c'est une des raisons indirectes auxquelles j'ai fait allusion dans l'introduction de ce lettre.

Si la démonstration de M. Torelli pour la convergence de¹¹

$$\prod_p' \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^x} \right) \quad (x > 0)$$

(voir p. 155 de sa monographie) est juste, cela prouverait (pas d'une manière élémentaire, mais peu importe) pour le module 4, que votre produit

$$\prod \left(1 \mp \frac{1}{p^x} \right)$$

convergerait pour $x > 0$ et que votre série

$$v(x) = \sum \mp \frac{1}{p^x} = \log \prod \left(1 \mp \frac{1}{p^x}\right) + \left(\frac{1}{2p^{2x}} \pm \dots\right)$$

convergerait pour $x > \frac{1}{2}$; cela prouverait encore que la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^x}$ n'a pas de racines réelles entre 0 et 1 que cette série n'a pas de racines complexes dont la partie réelle ^{+)''} surpasse $\frac{1}{2}$.

Je serais très heureux de savoir votre avis sur le travail de M. Torelli; je voudrai bien savoir si vous avez confiance dans ses démonstrations.

Dans sa monographie, il n'en donne qu'un résumé et ne développe pas toutes ses considérations; il est difficile de formuler des objections contre un travail qui ne donne pas tous les détails des démonstrations. On risque alors d'attribuer à l'auteur des arguments qu'il n'a pas du tout voulu employer. Cependant, lu littéralement, déjà le passage de la première moitié de la page 157 ligne 8-10 fait craindre que M. Torelli n'ait employé la conclusion évidemment fausse: "Si, pour tout m fixé,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+m) - f(x)) \text{ existe et égale } 0$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

existe". Quand je croirai être sûr qu'il y a des lacunes, je ne manquerai de m'adresser directement à M. Torelli.

En outre:

- 1) M. Torelli dit, à la page 139, qu'il a employé la méthode de votre mémoire, qui ne me paraît pas rigoureuse.
- 2) On n'est pas même en état de démontrer directement que $\sum' \frac{\chi(n)}{n^s}$ n'a pas de racines réelles entre $\frac{1}{2}$ et 1. Si la démonstration de M. Torelli est juste, cela résulterait naturellement, à la fin, de ses recherches; mais avant d'arriver au bout, dans son équation (126) un c_j pourrait, comme M. T.[orelli] observe lui-même, être réel et >0 . Du rest, pour

$$1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \dots$$

il n'y a, à cela, pas de difficulté

- 2) M. Torelli n'observe pas que, de son théorème sur la convergence de $\prod' \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^x}\right)$ pour $x > 0$, il résulte que $\sum' \frac{\chi(n)}{n^x}$ n'a pas de racines complexes dont la partie réelle surpasse $\frac{1}{2}$.

Il lui paraît échapper, p. ex. qu'il aurait démontré que les fameuses series employées par Dirichlet dans la théorie des formes quadratiques¹²

$$\sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$$

n'auraient pas de zéro complexe dont la partie réelle est plus grande que $\frac{1}{2}$; en vertu de la relation fonctionnelle bien connue de M. Hurwitz (contenue dans son travail du t. 27 de la Zeitschrift für Mathematik de Schlömilch¹³, mémoire cité aussi par M. Torelli à une autre occasion) elles ne disparaîtraient non plus pour $0 < R(s) < \frac{1}{2}$. La découverte de M. Torelli serait donc beaucoup plus importante encore qu'il ne paraît le soupçonner; d'autant plus petite est la probabilité que sa démonstration de la convergence de

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} L(n) \frac{\chi(n)}{n^s} \quad (0 < s < 1)$$

à laquelle tout revient, soit rigoureuse¹⁴.

Par toutes ces remarques, je ne veux pas diminuer le mérite de M. Torelli d'avoir écrite la plus complète monographie historique sur la distribution des nombres premiers qui existe; il n'y a guère de mémoire important qui lui ait échappé, et je suis sûr que ce livre, opérée la correction d'un certain nombre d'erreurs, sera très utile à ses lecteurs même si les nouveaux résultats de M. Torelli ne sont obtenus que d'une façon heuristique. À plusieurs endroits, il dit lui-même qu'il admet p. ex. l'existence de quelques limites; mais quant à la convergence de la série (3), il pense l'avoir démontrée rigoureusement. Si sa démonstration est déjà rigoureuse, tant mieux.

Je m'arrête enfin; mais j'ai cru que je prendrais moins de votre temps précieux en m'étant expliqué d'une façon aussi détaillée. Je vous adresse, d'avance, mes plus vifs remerciements¹⁵ pour la peine que je

vous prie de prendre à me dire votre avis sur plusieurs points de cette lettre.

Je voudrais surtout être sûr si mon objection contre votre démonstration est fondée, et je serais très heureux d'avoir votre avis compétent sur le travail de M. Torelli, travail que vous connaissez sans doute mieux que moi, pour lequel l'italien est une langue étrangère et moins familière que le français.

Veuillez agréer, monsieur, l'expression de mes sentiments distingués et de ma plus haute considération

E. Landau

^{+) La convergence de $\nu(1)$ peut être regardée comme connue.}

^{+) Je change le mots, pas le sens du théorème de Tchébychev.}

^{+) Voir aussi l'avant-dernière page de la seconde partie des de ses recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers.}

^{+) M. Torelli tire par cette dernière conséquence.}

¹ Si parla di [Cesàro 1896].

² Il lavoro è [Cesàro 1900].

³ Tchébychef in una lettera a Fuss, [Tchébychef 1853], scriveva: «Si de la totalité des nombres premiers de la forme $4n+3$, on retranche celle des nombres premiers de la forme $4n+1$ et que l'on divise ensuite cette différence par la quantité $\sqrt{x}/\log x$, on trouvera plusieurs valeurs de x telles, que ce quotient s'approchera de l'unité aussi près qu'on le voudra.». Vale la pena di osservare che Landau nello scrivere il nome del matematico russo oscilla tra la traslitterazione tedesca e quella francese corrente ai suoi tempi. Nel completare, tra parentesi quadre, la citazione del nome accennata da Landau con l'iniziale si è utilizzata la traslitterazione francese odierna

⁴ Phragmén, usando la teoria di variabile complessa, in [Phragmén 1891] dimostra il teorema enunciato da Tchébychef nella seguente forma: «Dati due numeri positivi δ e x_0 esiste un $x=x(\delta, x_0)$ maggiore di x_0 tale da soddisfare la disuguaglianza $\left| \frac{\pi(x,4,3)-\pi(x,4,1)}{\sqrt{x}/\log x} - 1 \right| < \delta$ » ($\pi(x, M, N)$ indica il numero dei primi inferiori a x contenuti nella progressione aritmetica $M \nu + N$).

⁵ Il lavoro è [Cahen 1894].

⁶ Questa notazione si trova anche nei lavori di Torelli: $\vartheta_3(n)$ e $\vartheta_1(n)$ vengono usati per $\pi(n, 4, 3)$ e $\pi(n, 4, 1)$; cfr. nota 4.

⁷ Il lavoro è [Tchébychef 1851].

⁸ La memoria è [Mertens 1874 b].

⁹ Si veda [La Vallée-Poussin 1896].

¹⁰ Nelle somme la congruenza è modulo 4.

¹¹ Il simbolo $\chi(n)$ indica un carattere di un numero secondo un modulo assegnato primo con esso o carattere di Dirichlet. Torelli discute tali caratteri ampiamente in [Torelli 1902 a] a partire da pagina 75 e afferma che la teoria dei caratteri “*si trova delineata nelle Lezioni di teoria dei numeri di Lejeune Dirichlet.*” Anche Landau tratta la teoria dei caratteri nel V capitolo del primo volume del suo [Landau 1909]; l'intero capitolo è dedicato alle serie di Dirichlet: *Anwendung der Dirichletschen Reihen mit reellen Veränderlichen*. Oggi i caratteri modulo m vengono definiti attraverso i caratteri dei gruppi abeliani finiti. Fissato, poi, un carattere χ modulo m , secondo quanto Torelli chiarisce in [Torelli 1902] pagina 141, la giustapposizione di un apice al simbolo di sommatoria indica “*una somma estesa a tutti i numeri interi, che siano primi relativi ad m* ”; la giustapposizione di un apice vicino al simbolo di prodotto indica invece “*un prodotto esteso a tutti i numeri primi assoluti che non dividano m .*”

¹² Il simbolo $\left(\frac{D}{n}\right)$ è detto simbolo generalizzato di Legendre o simbolo di Jacobi. Esso vale +1 o -1 a seconda che l'equazione $x^2 \equiv D \pmod{n}$ abbia o meno soluzioni. Il simbolo D indica il discriminante di una forma quadratica $ax^2 + bxy + cy^2$ cioè la quantità $b^2 - 4ac$.

¹³ La memoria è [Hurwitz, 1882].

¹⁴ Torelli in [Torelli 1902], pagina 116 dà la seguente definizione della funzione $L(n)$: “*Sia n un numero intero che può prendere tutti i valori positivi; il simbolo $L(n)$ indicherà una funzione di n definita dalle tre seguenti equazioni*

$$L(1)=0; \quad L(n)=0$$

se n ammette almeno due fattori primi differenti

$$L(n)=\log p \quad \text{se } n=p^a$$

p indicando, come al solito, un numero primo”.

¹⁵ Forma ora desueta ma ancora in uso quando fu scritta la lettera. La forma attualmente in uso è *remerciements*.

LC2

E L

2.Sommestrasse

Berlin, N.W.

3. 1. 1903

Monsieur¹,

Je vous remercie beaucoup de votre lettre qui m'a intéressé beaucoup, et, quant à votre mémoire, nous sommes parfaitement d'accord en constatant une lacune que nous ne sommes pas à même de combler par des raisonnements soit élémentaires soit transcendants.

Quant au mémoire de M. Torelli, dont je reconnais bien les hauts mérites, le raisonnement de la première moitié de la p. 157 paraît être la source de l'erreur que je crains y voir. Mais M. Torelli ne donne pas assez de détails pour pouvoir porter un jugement sur sa démonstration, et j'avais déjà eu l'intention de m'adresser directement à lui. Comme vous me demandez si je voudrais lui transmettre mes doutes par votre entremise⁺, je me sers avec plaisir de ce moyen commode et je vous prie de vouloir bien lui demander s'il croit son raisonnement rigoureux. En cas d'affirmative, je serais très heureux de le connaître, et je prierais M. Torelli, pour bien mettre en relief les résultats nouveaux, de l'exposer p. ex. pour la série $1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \dots$, dont il aurait démontré, si sa démonstration de la convergence de $\prod_p (1 - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s})$ pour $s > 0$ est juste, qu'elle n'a pas de racines complexes dont la partie réelle surpasse $\frac{1}{2}$.

En vous souhaitant, de ma part, le nouvel an bon et heureux, je vous prie, Monsieur, d'agréer l'expression de mon profond respect et de mes sentiments les plus distingués.

E.
Landau

⁺Questa lettera è di risposta a quella di Cesàro a Landau, lettera D₃. Cesàro ha ricevuto le obiezioni di Landau alla sua Nota (cfr. lettera precedente), ma preso ormai dai suoi interessi per la Fisica Matematica, decide di trasmettere a Torelli la lettera.

LT1

Berlin N.W. Sommestrasse 2
7 février 1903

Monsieur,

J'accuse réception de votre lettre et je vous souhaite beaucoup de succès dans les recherches qui nous intéressent. Permettez moi d'émettre un vœu au sujet de l'énoncé des théorèmes auxquels vous parviendrez ; c'est de donner une définition bien précise du mot asymptotique, si vous vous en servez. Evidemment, vous pouvez vous passer d'explications si vous l'employez dans le sens ordinaire. Les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$

sont asymptotiquement égales, si 1) leur quotient tend, pour $x=\infty$ vers une limite finie et que 2) cette limite égale 1.

Mais vous vous en servez aussi dans d'autres acceptions sans bien les définir. Je ne saurais p. ex. admettre qu'on dise : $f(x)$ est asymptotique à $g(x)^{+1}$ si l'on a démontré que $\frac{f(x)}{g(x)}$ ne saurait tendre vers une limite différente de 1. Imaginons en effet, que, objectivement, le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$, ne tend vers aucune limite ; alors on peut fabriquer des démonstrations qui prouvent que si $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers une limite, cette limite =1 et on peut en faire qui prouvent que si $\frac{f(x)}{2g(x)}$ tend vers une limite, cette limite =2 etc.

Tout produit $lg(x)$ pourrait donc être appelé asymptotiquement égal à $f(x)$.

Je vois bien le « granum salis » contenu tout de même dans un énoncé tel que celui-ci : le nombre des nombres premiers $4h+1$ inférieurs à x est asymptotiquement égal à $\frac{1}{2} \frac{x}{\log x}$, déduit des recherches de M. Poincaré¹ [je me place, en ce moment, dans l'état de la science de l'année 1892 et suppose que l'existence de la limite (Hadamard²-de la Vallée-Poussin³) ne soit pas connue]. On veut dire par là : La limite inférieure du quotient est ≤ 1 et le limite supérieure ≥ 1 ; c'est ce qu'on peut rigoureusement déduire des théorèmes de M. Poincaré. Mais si objectivement, les limites inférieure et supérieure ne coïncidaient pas dans 1, mais étaient, p. ex. 0,4 et 1,8, l'on pourrait fabriquer des démonstrations que 1) $\liminf \leq 0,7$ et $\limsup \geq 0,7$. Le nombre 1 n'aurait donc pas de prépondérance devant les autres nombres entre 0,4 et 1,8.

Voilà pourquoi, au point de vue de 1892, après le travail de Poincaré, toute expression telle que : "le quotient est asymptotique à 1", est dépourvue de rigueur, quoi qu'on entende par "asymptotique". Que la prévision de M. Poincaré que la limite est 1, a été confirmée plus tard, prouve que la méthode heuristique était bonne ; mais il aurait pu en être autrement.

Ces remarques s'étendent évidemment aussi aux cas où l'on parle des termes de degré inférieurs.

Et comme bon exemple d'une expression claire, on peut citer textuellement les mots de Tschebyschef⁴, dans sa lettre à Fuss : « Si de la totalité des nombres premiers de la forme $4n+3$, on retranche celle de nombres premiers de la forme $4n+1$, et que l'on divisé ensuite cette

différence par la quantité $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$, on trouvera plusieurs valeurs de x telles, que le quotient s'approchera de l'unité aussi près qu'on le voudra»⁵.

Il en résulte, pour le quotient, $\liminf \leq 1$, $\limsup \geq 1$, Et de là, comme conséquence (plus spéciale que l'énoncé) : Si la limite existe, elle égale 1.

D'ailleurs, le théorème de T.[schebyschef], démontré par M. Phragmén⁶, n'est pas, comme vous paraissez le croire dans votre note du cercle de Palerme⁷ (1902, p. 100, si je ne trompe ; la note, que j'ai vue, il y a quelque temps, n'est pas dans mes mains) une conséquence des théorèmes de M. Poincaré. En désignant par $\pi_1(x)$ le nombre des nombres premiers inférieurs à x et $\equiv 1 \pmod{4}$

et " $\pi_3(x)$ " " " " " " "
 " " " " 3 " ,

M. Poincaré a démontré

$$\liminf \frac{\pi_1(x)}{\frac{x}{\log x}} \leq \frac{1}{2}, \quad \limsup \frac{\pi_3(x)}{\frac{x}{\log x}} \geq \frac{1}{2}$$

et l'on ne saurait, dans l'identité (dont le première et le second membre, divisés par $\frac{x}{\log x}$, oscillent entre $l \leq 1$ et $l' \geq 1$).

Nombre des premiers complexes (à norme $\leq x$) $= 2\pi_1(x) + \pi_3(\sqrt{x}) + 1$

tirer profit du fait que $\pi_3(\sqrt{x})$ a, à lui seul, l'ordre $\frac{\sqrt{x}}{x}$ (avec un quotient oscillant entre $l \leq 2$ et $L \geq 2$).

Et le théorème de Tschebyschef dit : «Étant donné δ , il existe un x tel que

$$1 - \delta < \frac{\pi_3(x) - \pi_1(x)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x}} < 1 + \delta \gg$$

Je ne vois pas moyen de démontrer cela au moyen des résultats de M. Poincaré joints aux théorèmes déjà antérieurement connus.

Quoique le fait soit déjà rigoureusement constaté par M. Phragmén, vous rendrez⁸ un service à la théorie en trouvant une démonstration élémentaire de ce théorème, qui ne paraît pas inaccessible.

Et je ne doute pas que T.[chebychef] a eu une démonstration élémentaire, au moyen de l'identité de Polignac généralisée, à la quelle il fait allusion dans sa lettre.

Vous me demandez quelques remarques sur des détails de votre livre ; je ne l'ai pas lu en entier; mais dans ce que j'ai lu, je me suis fait à la marge les notes suivantes, que je vous communique avec plaisir, les fautes d'impression et les objections substantielles pêle-mêle.

- 1) *P.* 9, *l.* 19, lire : gegebenener Grenzen ; *l.* 2 lire Hilfe.
- 2) *P.* 13, *l.* 21, lire : Grenzen et Mathematische.
- 3) *P.* 13, *l.* 24 lire : 1899
- 4) *P.* 15, *l.* 4, lire : Vega.
- 5) *P.* 16, *l.* 2 d'en bas et *p.* 17, *l.* 1, lire : Encke.
- 6) *P.* 19, *l.* 13, lire : Analytical.
- 7) *P.* 19'. Il faudrait mentionner que Hargreave⁹ dit lui-même que son raisonnement n'est pas rigoureux.
- 8) *P.* 19, *l.* 6 d'en bas, lire : $\int_{x'}^x$
- 9) *P.* 25, *l.* 10, lire undersögelser ; *p.* 124, *l.* 13, de même.
- 10) *P.* 26, *l.* 4, lire : Mémoire sur.
- 11) *P.* 27, *l.* 10 d'en bas. Le théorème tel que Tschebyschef et vous l'énoncez, est faux. Exemple : $F(x) = \frac{1}{2^x}$ pour les nombres premiers, $F(x)=1$ pour les nombres composés⁺⁾ . Il faut ajouter (ce que T.[chebychef] suppose aussi au courant de sa démonstration) que $\frac{F(x)}{\log x}$ décroît avec x croissant.
- 12) *P.* 28. Un mémoire important de Sylvester¹⁰ a échappé à presque tous les auteurs et aussi à vous (mais du reste, j'admire la richesse de vos citations; votre liste est presque complète): «On arithmetical series », Messenger of Mathematics, t. 21, 1891 ; *p.* 28, *l.* 2 d'en bas, lire oversight.
- 13) *P.* 29, *l.* 29. Vous transcrivez deux erreurs de calcul de Sylvester (que M. Sterneck¹¹, Bull. de l'Académie de Vienne, t. 109, 1157, a relevé). En réalité. $M_{\infty}=0,92261076$, $V_{\infty}=1,07657793$. D'ailleurs dans le mémoire cité dans la note 12), Sylvester a dépassé d'un peu ces limites.
- 14) *P.* 31. La thèse de Piltz¹² (1881 ; ne pas confondre avec la Habilitationsschrift¹³ de 1884) vous a échappé. Il y a trouvé les valeurs de C, C₁, etc. que vous avez dans votre question (19) tirées d'un mémoire de M. Cesaro¹⁴ et de M. Jensen¹⁵.
- 15) *P.* 52, milieu, deux fois. Lire Scherk.
- 16) *P.* 56, *l.* 16, à la fin, lire Mathematiker- et numéro.

17) *P.* 86. Le mémoire de Kinkelin¹⁶ (Bâle 1862) cité souvent dans mon grand travail du journal de Crelle¹⁷, vous a échappé. *P.* 92, note, de même.

18) *P.* 89, *l.* 2 d'en bas, lire arithmétiques.

19) *P.* 92, *l.* 9 d'en bas, lire binärer.

20) *P.* 96, *l.* 1 lire Öfversigt

21) *P.* 96, *l.* 1, lire Formandlingar.

22) *P.* 97, *l.* 11, lire : analytische.

23) *P.* 98, *l.* 12, lire : Königsberger.

24) *P.* 102, *l.* 3 d'en bas, lire : analysin.

25) *P.* 105, *l.* 7 d'en bas, lire Phragmén.

26) *P.* 106, *l.* 1 d'en bas, lire : der Zahlentheoretischen.

27) *P.* 109, *l.* 9, lire : Doctorwürde.

28) *P.* 110 Que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ converge uniformément pour $R(s) > \varepsilon$,

ε , n'est pas exact ou du moins pas démontré (Je sais bien que vous ne faites que transcrire une erreur de M. v. Schaper¹⁸, peu importante, du reste). On peut démontrer seulement qu'elle converge uniformément pour $R(s) > \varepsilon$, $-T < I(s) < T$, T étant un nombre positif quelconque.

Quant à la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, il serait vrai qu'elle converge uniformément dans le domaine illimité $R(s) > 1 + \varepsilon$.

29) La démonstration de M. v. Schaper que vous transcrivez et développez aux p. 110-112, est fausse. En effet, la fonction $2^{s-1} - 1$ a des racines dans le demi-plan $R(s) \geq \frac{1}{2}$, savoir une infinité sur la droite

$R(s)=1$:

$$s = 1 + \frac{2\lambda\pi i}{\log 2} \quad \lambda \text{ entier}$$

cela fait crouler toute la démonstration ; la dernière ligne de p. 111 est juste ; seulement pour $s = 1 + \frac{2\lambda\pi i}{\log 2}$, $r \sin \varphi = -\frac{1}{2}$, $r \cos \varphi = \frac{2\lambda\pi}{\log 2}$, le dénominateur s'évanouit ; votre inégalité (101) (p. 112, *l.* 2, où, du reste, 2, au second membre, est à corriger en r) est donc fausse ; car pour le s cités (ou pour des s voisins de $1 + \frac{2\lambda\pi i}{\log 2}$), le premier membre

est supérieur à $e^{r \log r}$, ce qui arrive donc pour des s aussi éloignés de l'origine que l'on veut et qui sont convenablement choisis.

30) *P.* 113, *l.* 14 d'en bas, lire die.

31) *P.* 122, *l.* 10 d'en bas, lire Erlangung.

32) *P.* 126, *l.* 7-8. Que la limite¹⁹ $\lim \frac{\lambda(x)}{x}$, si elle existe, égale 1, est fort facile à démontrer et implicitement démontré dans maintes recherches (Mertens²⁰ etc.) Il n'y a donc pas lieu de citer, à cet endroit, M. Cesaro²¹ seulement.

33) *P.* 133. M. von Mangoldt²² dit, à la fin de son travail dont vous parlez, non qu'il peut démontrer par sa méthode, la relation connue de Mertens²³

$$\lim \left(\sum_p \frac{1}{p} - \log \log x \right) = C - A$$

et la forme plus complète de Mertens :

$$\log x \left(\sum_p \frac{1}{p} - \log \log x - C + A \right)$$

reste fini, mais qu'il peut y ajouter le nouveau résultat

$$\lim \left(\log x \left(\sum_p \frac{1}{p} - \log \log x - C + A \right) \right) = 0$$

34) A la *p.* 134, vous inscrivez un appendice: Limitation de l'orde des différences... d'après v. Koch²⁴ ; à la *p.* 135 vous parlez d'une démonstration incomplète de Franel²⁵ dans l'inscription du § 91. Or, à lire cela, on devrait croire que M. v. Koch a démontré quelque chose que M. Franel n'a pas pu démontrer. En réalité, ces deux géomètres ont fait absolument la même chose ; ils ont prouvé que, si la présomption de Riemann (que toutes les racines complexes de $\zeta(s)$ ont leur partie réelle égale à $\frac{1}{2}$) est juste, certaines inégalités asymptotiques en résulteraient,

que vous citez aussi à l'endroit cité.

35) *P.* 135, *l.* 7 d'en bas, lire : logarithme

36) *P.* 135, *l.* 6 d'en bas, lire : Öfversigt

37) *P.* 137, *l.* 4 d'en bas M. de la Vallée-Poussin²⁶ n'a pas démontré du tout que²⁷

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log x \sum_{k=1}^{[x]} \frac{\mu(k)}{k} \right) = 0$$

je suis le seul qui l'ait démontré, dans mon mémoire que vous citez²⁸. M. de la Vallée-Poussin a seulement démontré, ainsi que vous le dites bien dans le texte, que le produit

$$\log x \sum_{k=1}^{[x]} \frac{\mu(k)}{k}$$

reste fini pour $x \rightarrow \infty$, cela veut dire inférieur, en valeur absolue, pour tous les x , à une certaine constante h .

38) P. 138, l. 2, 1^{er} membre, lire $\log R$.

39) P. 138, l. 10 d'en bas, ajouter : si la limite existe

40) P. 139, milieu. La démonstration de M. Cesaro²⁹ est fausse (voir ma lettre qu'il a bien voulu vous transmettre).

41) P. 156 et suiv. Voir ma lettre à M. Cesaro.

42) P. 179, l. 9, lire Stanievitch ou Staniewitch ou Staniewicz.

43) P. 181, l. 2, lire Beiträge.

44) P. 187, l. 9 d'en bas, lire Weiestrass.

45) P. 187, l. 5 d'en bas, lire LIV, au lieu de IV.

46) Remarque, lire Jahresbericht ... Königliches. Le travail de M. Braun³⁰ n'a du reste guère de valeur.

47) P. 192, l. 8 d'en bas, lire böhmischen.

48) P. 200, l. 10 d'en bas, lire für Mathematik

49) P. 203, l. 14, lire Undersögelser ou Undersögelser.

50) P. 203, l. 22, lire Jahrbuch. P. 205, l. 11 d'en bas; de même.

51) P. 211₂, lire Encke, von Koch, Oppermann.

J'ai cru justement ne pas devoir omettre les erreurs dans les citations allemandes pour le cas que, dans de nouvelles publications, vous citez des Mémoires d'après votre livre, et je ne suis pas sûr si vous aurez l'occasion de consulter encore une fois tous les originaux.

Si je puis vous être utile par un renseignement quelconque je m'en ferais un grand plaisir.

Agréez, monsieur, l'expression de mes sentiments très distingués et de ma plus haute considération.

Edm. Landau

⁺⁾ asymptotiquement égal à x .

⁺⁾ $\sum_m \frac{F(m)}{\log m}$ diverge alors, tandis que $\sum_p F(p)$ converge

¹ Il lavoro è [Poincaré 1891].

² [Hadamard 1896].

³ Si tratta del già citato [Vallée-Poussin 1896]. Cfr. lettera LC1.

⁴ Si noti che qui la traslitterazione usata è di tipo francese.

⁵ Si veda lettera LC1 nota 1.

⁶ Si veda lettera LC1 nota 2.

⁷ La nota è [Torelli 1902 b].

⁸ La forma linguistica utilizzata *rendreèz* sembra essere poco commune se non scorretta. La forma corretta, all'epoca e anche oggi, è *rendrez*.

⁹ Si veda [Hargreave 1849] e [Hargreave 1854].

¹⁰ Come detto la memoria è [Sylvester 1891].

¹¹ Il lavoro è [Daublebsky 1900].

¹² La tesi di dottorato è [Piltz 1881].

¹³ L'abilitazione fu conseguita a Jena con il lavoro [Piltz 1884].

¹⁴ La memoria è [Cesaro 1893 b].

¹⁵ La memoria è [Jensen 1887].

¹⁶ La memoria è [Kinkelin 1862].

¹⁷ Il lavoro è [Landau 1902].

¹⁸ Qui e nell'osservazione 29) si fa riferimento alla memoria [Schaper 1898].

¹⁹ In ([Torelli 1902]) pagina 208 viene definita la funzione $\lambda(x) = \sum_1^{\theta(x)} \log p_n$, dove p_n è l'ennesimo numero primo e $\theta(x)$ è la totalità dei numeri primi inferiori a x . Il lavoro citato è [Cesàro 1897 b].

²⁰ La memoria è [Mertens 1874 b].

²¹ Il lavoro è [Cesàro 1897 b].

²² Il lavoro è [Mangoldt 1898].

²³ La relazione è contenuta in [Mertens 1897].

²⁴ Il lavoro è [Koch 1900].

²⁵ La dimostrazione è in [Fanel 1896].

²⁶ La memoria citata è [La Vallée-Poussin 1899].

²⁷ Torelli in [Torelli 1902] pagina 101 chiarisce la definizione della funzione di Möbius μ : "definiscasi la funzione $\mu(n)$ eguale a +1 allorché $n=1$ oppure n è un prodotto di un numero pari di fattori primi tutti differenti; sia invece $\mu(n)=-1$ allorché tale numero di fattori primi è impari; e infine sia $\mu(n)=0$ quando n è divisibile per qualche quadrato diverso da 1".

²⁸ La memoria è [Landau 1901].

²⁹ La dimostrazione è contenuta in [Cesàro 1896].

³⁰ Il lavoro citato è [Braun 1899].

LT2

2. Sommerstrasse Berlin, N.W.

Le 25 février 1904

Monsieur,

Je viens de m'apercevoir qu'une série de mémoires sur la théorie des nombres premiers (d'un même auteur) n'est pas mentionnée dans votre livre et paraît vous avoir échappé. Je m'empresse donc de vous les indiquer ce sont les travaux de M. de Polignac contenus dans les Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, dans le t. 49 (1859) principalement, mais aussi dans le t. précédents et suivants¹.

Le contenu n'est pas sans importance, les méthodes sont, en partie, rigoureuses.

Tout de même, on ne cite ces travaux presque jamais.

Veillez agréer, monsieur, l'expression de ma plus haute considération

E. Landau

¹ I lavori sono in [Polignac 1859].

LT3

Charlottenburg

Hardenbergstrasse 13

30 mai 1905

Monsieur,

Je suis au point de publier un nouveau mémoire¹ sur la distribution des nombres premiers $4n+1$ et $4n+3$. Il m'est indispensable, pour rendre complets les renseignements historiques de mon introduction, de relever les inexactitudes des vos recherches sur lesquelles nous sommes d'accord depuis longtemps.

Pour mener mes critiques à une fin amicale, je vous demande la permission d'y ajouter (en allemand) une phrase telle que celle ci: "Il m'est permis d'ajouter que, il y a quelque temps, j'ai fait part de mes objections à M. Torelli et qu'il les reconnaît comme fondées."

Je profite de cette occasion pour vous remercier de votre mémoire² que vous m'avez envoyé il y a quelques mois.

Je vous prie, monsieur, d'agréer l'expression de mes sentiments le plus distingués

Votre très dévoué

E. Landau

¹ La memoria pubblicata è [Landau 1906].

² La memoria è [Torelli 1904].

LT4

Charlottenburg
Hardenbergstrasse 13
31. 7. 05

Monsieur,

Je vous remercie de votre dernier envoi¹ et de votre lettre. Une mention de votre note additionnelle² à l'article de M. Vecchi³ sera faite dans un mémoire sur le théorème de Tchebyschef, qui paraîtra dans les Math. Ann⁴.

Je dirige votre attention - comme vous desirez avoir une liste aussi complète que possible de mémoires sur les nombres premiers - sur l'article⁵ de A. S. Bang, Om Primtal af bestemte Former dans Nytt Tidsskrift for matematik, partie B, 2^e année Copenhague, 1891 p. 73-82. L'article n'est pas sans intérêt.

Agréez, monsieur, l'expression de mes sentiments très distingués

E. Landau

¹ Si riferisce alla memoria [Torelli 1905].

² In una annotazione marginale a pag. 155 di una copia della sua memoria ([Torelli 1902]), Torelli scrive: «I procedimenti esposti nei § da 102 a 108 ed in 111 e 112 sono stati da me riconosciuti come inesatti. Vedi nota nell'articolo relativo al presente lavoro pubblicato nel Bollettino di Bibliografia e storia delle sc. mat., anno 1903, Saranno sostituiti da altri più appropriati nella 2^a edizione.»

³ L'articolo si trova in [Vecchi 1903].

⁴ La memoria è [Landau 1906].

⁵ L'articolo è [Bang 1891].

Indice dei nomi che compaiono nella corrispondenza con brevi cenni biografici

Albeggiani Michele (1852-1943). Ingegnere, professore nell'istituto tecnico di Palermo, libero docente e incaricato di Applicazioni della Geometria descrittiva alla Scuola d'Ingegneria (cfr. [Tricomi 1962]). Lett. A₁₃.

Amanzio Domenico (1854-1908). Fu professore al Collegio Militare e all'Istituto Tecnico di Napoli (cfr. [Tricomi 1962]). Lett. A₂₈; lett. A₂₉.

Amodeo Federico (1859-1946). Storico della matematica. Insegnò all'Istituto Tecnico "G.B. Della Porta" a Napoli e fu, per circa un quindicennio, coadiutore di Cesàro nell'insegnamento di Calcolo infinitesimale a Napoli (cfr. [Tricomi 1962]). Lett. A₅; lett. A₇.

Baccelli Guido (1830-1916). Laureato in Medicina e Chirurgia, fu professore, dal 1862, di Clinica medica all'Ospedale S. Spirito. Svolse una intensa attività politica e fu Ministro della Pubblica istruzione dal 5.12.1893 al 10.3.1896 (cfr. [DBI voce a cura di M. Crespi]). Lett. A₁₃.

Bachmann Paul G. (1837-1920). Dopo aver conseguito l'abilitazione a Breslau, con una tesi in teoria dei numeri, fu nominato, nel 1864, professore straordinario. Pochi anni dopo fu chiamato come ordinario a Münster (cfr. [DSB voce a cura di O. Ore]). Lett. A₁₂.

Bang A.S. Lett. LT4.

Battaglini Giuseppe (1826-1894). Si rifiutò di sottoscrivere una petizione al re Ferdinando II affinché sospendesse la costituzione e venne destituito dal suo ufficio presso l'osservatorio napoletano; fu nominato al momento dell'unificazione professore Geometria superiore dell'Università di Napoli; nel 1871 passò a Roma, dove ebbe Cesàro come allievo, e poi nuovamente a Napoli a partire dal 1885. Nel 1863 fondò il Giornale di Matematiche (cfr. [DSB voce a cura di N. Virgopia]). Lett. CT5; lett. CT8; lett. CT9.

Berger Alexander F. (1844-1901) (cfr. [Poggendorff]). Lett. A₁₂.

Betti Enrico (1823- 1892). Fece parte della legione universitaria toscana nel 1848 e prese parte agli scontri di Curtatone e Montanara. Nel 1857 fu nominato professore di Algebra superiore all'Università di Pisa, nel 1864 successe al suo maestro O.F. Mossotti sulla cattedra di Fisica matematica. Dal 1864 diresse la Scuola Normale Superiore di Pisa (cfr. [DBI voce a cura di N. Virgopia], [DSB voce a cura di E. Carruccio]). Lett. A₆.

Bocca. Editore. CT10; lett. A₆.

Bonnet Ossian P. (1819-1892). Nel 1844 accettò una posizione di tutore all'École Polytechnique a Parigi, nel 1868 divenne assistente di Chasles e tre anni più tardi ottenne una sua cattedra. Insegnò anche all'École Normale Supérieure e alla Sorbonne. (cfr. [DSB voce a cura di P.E. Pilet, D.J. Struik]). Lett. CT11.

Braun J. Lett. LT1.

Brocard Henri (1845-1922). Ufficiale delle forze armate si occupò di meteorologia e matematica, in particolare di geometria (cfr. [DSB voce a cura di L. Guggenbuhl]). Lett. CT11; lett. CT15; lett. A₁₁.

Brioschi Francesco (1824-1897). Partecipò alle cinque giornate di Milano nel 1848; fu professore di Meccanica razionale a Pavia; fondò nel 1863 il Politecnico di Milano di cui fu direttore e pressì il quale fu professore di Idraulica. Deputato e quindi senatore svolse un'intensa attività politica (cfr. [DBI

voce a cura di N. Raponi], [DSB voce a cura di J.B. Pogrebyssky]). Lett. CT6; lett. A₅.

Bucca Fortunato (1875-1899). Morto di malaria ancora giovanissimo (si era laureato nel 1896) e quando lasciava sperare una promettente produzione scientifica soprattutto in Algebra. Lett. A₁₀.

Burhenne Heinrich G. Lett. CT11.

Cahen E. Lett. CT11; lett. LC1

Caldarera Francesco (1825-1920). Fu professore di Meccanica razionale all'Università di Palermo (cfr. [Tricomi 1962]). Lett. CT6; lett. A₁₃.

Cantor Moritz B. (1829-1920). Primo professore di storia della matematica in Germania, svolse la sua attività di docente presso l'Università di Heidelberg (cfr. [DSB voce a cura di J.E. Hofmann]). Lett. CT11.

Capelli Alfredo (1855-1910). Fu professore di Analisi algebrica all'Università di Palermo e dal 1886 di Napoli (cfr. [DBI voce a cura di E. Togliatti]). Lett. CT6; lett. CT24; lett. A₅.

Catalan Eugène C. (1814-1894). Fu espulso per motivi politici dall'École Polytechnique. Insegnò al Collège de Chalons, al Collège de Charlemagne e nel Lycée Saint Louis. Nel 1865 ottenne una cattedra all'Università di Liège (cfr. [Jongmans1996]). Lett. CT11.

Certo Luigi, di Napoli, fu professore di Matematica al Liceo Umberto I e poi al Vittorio Emanuele II di Palermo. Lett. CT 9; lett. A₃; lett. A₄; lett. A₆.

Cervello Vincenzo (1854-1918). Divenne ordinario di Materia medica nel 1885 all'Università di Catania e nel 1887, come titolare dello stesso insegnamento, si trasferì a Palermo. Nel 1889 venne nominato primario dell'ospedale civico (cfr. [DBI]). Lett. CT5.

Chabert. Lett. CT11.

Cipolla Michele (1880-1947). Allievo di Torelli all'Università di Palermo, divenne nel 1911 professore di Analisi algebrica all'Università di Catania; nel 1923, passò a quella di Palermo (cfr. [DBI voce a cura di F.S. Rossi]). Lett. CT20; lett. CT21; lett. CT27; lett. CT31; lett. A₁₉; lett. A₂₀; lett. A₂₂; lett. A₂₇; lett. A₃₁.

Clausen Carlo. Libraio. Lett. A₆.

Clausen Thomas (1801-1885). Matematico e astronomo danese, dopo aver lavorato presso l'Optical Institut di Monaco e l'Osservatorio di Altona, fu assunto nel 1842 presso l'Osservatorio di Tartu di cui fu anche direttore dal 1866 al 1872 (cfr. [DSB voce a cura di K.R. Biermann]). Lett. CT11.

Corbino Orso M. (1876-1937). Fisico siciliano noto soprattutto per aver raccolto a Roma attorno al suo Istituto il gruppo Fermi (cfr. [DBI voce a cura di E. Amaldi]). Lett. A₁₀.

Cremona Luigi (1830-1903). Partecipò nel 1849 alla difesa di Venezia assediata dalle truppe austriache; nel 1860 fu chiamato all'Università di Bologna sulla prima cattedra di Geometria superiore in Italia; nel 1867 passò ad insegnare

Statica grafica al Politecnico di Milano. Nel 1873 fu chiamato a riordinare e dirigere la Scuola d'Ingegneria a Roma. Senatore del Regno dal 1897 fu vice presidente del Senato e Ministro della Pubblica Istruzione (cfr. [DSB voce a cura di S.L. Greitzer]). Lett. A₂₃.

Curtze Maximilien (1837-1903) Storico tedesco della matematica, fu professore all'Università di Thorn dal 1887 al 1894 (cfr. [EI]). Lett. CT11.

De Marco G. Lett. CT4

De Franchis Michele (1875-1946). Allievo di Gerbaldi a Palermo, el 1905 fu nominato professore di Algebra e Geometria all'Università di Cagliari. Nel 1906 passò all'Università di Parma e nel 1909 di Catania. Fu richiamato a Palermo nel 1914. Fu presidente del Circolo Matematico di Palermo (cfr. [DBI voce a cura di A. Brigaglia]). Lett. A₁₀.

Del Pezzo Pasquale (duca di Caianiello) (1859-1936). Fu professore straordinario e poi ordinario di Geometria superiore a Napoli. Fu anche sindaco di Napoli e senatore del Regno (cfr. [DBI voce a cura di E. Togliatti]). Lett. CT24; lett. A₂₁.

Del Re Alfonso (1859-1921). Fu professore nel 1892 di Geometria analitica e proiettiva all'Università di Modena (cfr. [Tricomi 1962]). Lett. A₅.

De Rubertis Eugenio. Direttore della tipografia dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli. Lett. CT25; lett. CT27; lett. A₁₅; lett. A₁₈.

Desboves Adolphe H. (1818-1888). Fu professore di Matematica presso il Lycée Condorcet a Parigi. Lett. CT11.

D'Escamard Vincenzo (1874-1941). Insegnante, si laureò con Cesàro e da lui fu avviato alla ricerca. Lett. A₂₈; lett. A₂₉.

Dirichlet Lejeune Peter Gustav (1805-1859). Conseguita l'abilitazione, con una tesi su una classe speciale di polinomi, fu nominato nel 1827 professore presso l'Università di Breslau. Dal 1828 al 1855 insegnò all'Università di Berlino da dove si spostò a Göttingen per occupare la cattedra che era stata di Gauss (cfr. [DSB voce a cura di O. Ore]). Lett. CT11; lett. LC1; lett. A₁₂.

Dormoy E. Lett. CT11.

D'Ovidio Enrico (1843-1933). Studiò a Napoli frequentando anche lo studio di Achille Sannia. Fu professore di Algebra e Geometria analitica all'Università di Torino (cfr. [DBI voce a cura di A. Bastai]). Lett. CT6; lett. CT28; lett. A₅.

Drach S. M. Lett. CT11.

Duhem Pierre (1861-1916). Dopo aver insegnato a Lille, fu nominato maître de conférence a Rennes nel 1893. Ottenne la cattedra di Fisica teorica all'Università di Bordeaux nel 1894 (cfr. [DSB voce a cura di D.G. Miller]). Lett. A₄; lett. A₆; lett. A₁₀.

Dupré Athanase L. (1808-1869). Fu professore presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Rennes. Viene ricordato per i suoi studi sopra la teoria meccanica del calore (cfr. [DSB voce a cura di R. Fox]). Lett. CT11.

Encke Johann F. (1791-1865). Matematico e astronomo, calcolò nel 1819 l'orbita della cometa che porta il suo nome. Nel 1822 divenne direttore dell'Osservatorio di Gotha e nel 1825 fu chiamato a Berlino per fondare un nuovo osservatorio, inaugurato nel 1835, di cui divenne direttore. Nel 1844 divenne professore di Astronomia a Berlino (cfr. [DSB voce a cura di H.C. Freiesleben]). Lett. LT1.

Euler Leonhard (1707-1783). Considerato il più importante e prolifico matematico dell'illuminismo, ha fornito contributi storicamente cruciali a varie aree della matematica. Nel 1727 ottenne la cattedra di Matematica a S. Pietroburgo, nel 1741 si spostò a Berlino. Tornò in Russia, su invito di Caterina la Grande nel 1766 (cfr. [DSB voce a cura di A.P. Youschkevitch]). Lett. CT11.

Fergola Emanuele (1830-1915). Fu docente presso la Facoltà di Scienze Matematiche di Napoli prima di Introduzione al calcolo, poi di Analisi superiore e infine di Astronomia. Nel 1889 divenne Direttore dell'Osservatorio di Capodimonte; Torelli era suo genero. (cfr. [Tricomi 1962] e [DBI voce a cura di G. Monaco]). Lett. CT8; lett. A₁₈.

Foussereau. Lett. A₁₅.

Franel J. (1859-1939). Lett. LT1

Fuortes Tarquinio (1848-1927). Lett. A₂₈.

Fuss. Lett. LT1; lett. D₂.

Gallucci Generoso (1874 -1942). Fu allievo di Pasquale Del Pezzo e di Domenico Montesano a Napoli. Insegnante liceale, conseguì nel 1907 la libera docenza in Geometria proiettiva (cfr. [DBI voce a cura di M. Menghini]). Lett. CT31.

Gauss Carl F. (1777-1855). Conseguito nel 1799 il dottorato, presso l'Università di Helmstedt con una tesi in cui è dimostrato in modo rigoroso il teorema Fondamentale dell'Algebra, nel 1807 fu nominato professore di Astronomia e direttore dell'Osservatorio astronomico di Göttingen . (cfr. [DSB voce a cura di K. O. May]). Lett. CT11.

Gebbia Michele (1854-1929). Fu professore di Statica grafica nella Scuola d'Ingegneria di Palermo e incaricato di Fisica matematica nella stessa Università (cfr. [DBI voce a cura di P. Nastasi]). Lett. CT13; lett. CT14; lett. A₁₃.

Gemmellaro Gaetano Giorgio (1832-1904). Fu professore di Geologia all'Università di Palermo di cui fu anche rettore nel 1874-76 e 1880-83 (cfr. [DBI voce a cura di P. Corsi]). Lett. CT5; lett. A₄.

Gerbaldi Francesco (1858-1934). Nel 1889 vinse la cattedra di Geometria analitica all'Università di Palermo. Si trasferì all'Università di Pavia nel 1908 (cfr. [DBI voce a cura di A. Brigaglia]). Lett. CT6; lett. A₄; lett. A₅; lett. A₆.

Giudice Francesco (1855-1936). Laureato in Ingegneria a Torino (1877) e in Matematica a Pavia (1881), fu libero docente di Algebra complementare presso l'Università di Palermo e professore incaricato di Matematiche complementari

all'Università di Pavia. Fu uno dei fondatori della *Mathesis* (cfr. [Tricomi 1962]). Lett. CT9.

Glaisher James W. (1848-1928). Nel 1867 vinse una borsa di studio per il Trinity College di Cambridge; nel 1871 divenne tutor e docente a Cambridge, dove poi insegnò per tutta la vita. Fu presidente dal 1884 al 1886 della London Mathematical Society (cfr. [DSB voce a cura di P.S. Jones]). Lett. CT11.

Gram Jorgen P. (1850-1916). Laureato in Matematica, fu assunto, nel 1875, presso la compagnia di assicurazioni Hafnia, dove lavorò a modelli matematici per la gestione di foreste ed a varie applicazioni della probabilità e del calcolo numerico. Lasciò molti contributi, come amatore, alla teoria dei numeri (cfr. [DBL voce a cura di Zeuthen,]). Lett. A₁₂.

Guccia Giovan Battista (1855-1914). Fu professore di Geometria superiore all'Università di Palermo e fondatore, nel 1884, del Circolo Matematico (cfr. [DBI voce a cura di A. Brigaglia]). Lett. CT27; lett. MLT; lett. A₂₇.

Guibert A. Lett. CT11.

Günther Adam W.S. (1848-1923). Conseguita l'abilitazione nel 1873 presso l'Università di Erlangen fu docente presso il Polytechnicum e, due anni dopo, professore di Fisica presso il Gymnasium di Ansbach. Nel 1886 diventò professore di Geografia presso la Technische Hochschule di Monaco (cfr. [DSB voce a cura J.E. Hofmann]). Lett. CT11.

Hadamard Jacques (1865-1963). Dopo aver insegnato matematica presso il Lycée Saint-Louis e il Lycée Buffon, fu nominato, nel 1896 professore di Astronomia e Meccanica razionale all'Università di Bordeaux. (cfr. [DSB voce a cura S. Mandelbrojt]). Lett. CT11; lett. LT1.

Hänkel Hermann (1839-1873). Nominato professore ordinario nel 1867 all'Università di Erlangen, si spostò a Tübingen nel 1869. Lavorò in teoria dei numeri complessi, teoria delle funzioni e storia della matematica (cfr. [DSB voce a cura di M.J. Crowe]). Lett. CT11.

Hargreave Charles J. Magistrato e dilettante in matematica. Dal 1848 membro della Royal Society (cfr. [DNB, voce a cura di G.C. Boase]). Lett. CT11; lett. LT1.

Hermann. Libraio ed editore di Parigi. Lett. A₁₁; lett. A₁₂.

Hermite Charles (1822-1901). Dopo aver insegnato all'École Polytechnique e al Collège de France, nel 1869 divenne professore all'École Normale di Parigi e nel 1870 professore di Algebra superiore alla Sorbona (cfr. [DSB voce a cura di H. Freudenthal]). Lett. CT1.

Hilbert David (1862-1943). Studiò all'Università di Königsberg. Qui fu nominato nel 1892 professore straordinario e nel 1893 professore ordinario. Nel 1895 fu chiamato all'Università di Göttingen (cfr. [DSB voce a cura di H. Freudenthal]). Lett. A₂₇.

Hospital Guillaume de (1661-1704). Di nobile famiglia, lasciò la carriera militare per dedicarsi allo studio della matematica. Frequentò il circolo di

Malebranche a Parigi. Il suo nome è legato, con quello di Johann Bernoulli e di Pierre Varignon, al calcolo infinitesimale (cfr. [DSB voce a cura di A. Robinson]. Lett. A₂₁).

Kinkelin Hermann (1832-1913). Insegnò alla Scuola Reale Superiore di Basilea e nel 1865 diventò professore di Matematica all'Università di Basilea. Eminente esperto di statistica, fondò la Società Svizzera di statistica, di cui fu presidente dal 1877 al 1886, e la Società di Statistica ed Economia Politica a Basilea. Lett. LT1.

Klügel Georg S. (1739-1812). Matematico e fisico tedesco viene ricordato per i suoi contributi alle geometrie non-euclidee. Nel 1766 fu nominato professore di Matematica presso l'Università di Helmstedt, per trasferirsi all'Università di Halle nel 1788 (cfr. [DSB voce a cura di J. Folta]). Lett. CT11.

Koch Niels F. von (1870-1924). Studente di Mittag-Leffler, fu nominato professore nel 1905 all'istituto reale di tecnologia a Stoccolma. Nel 1911 succedette a Mittag-Leffler sulla cattedra di Matematica all'Università di Stoccolma. (cfr. [DSB voce a cura di M. Bernkopf]). Lett. LT1.

Hurwitz Adolf (1859-1919). Nel 1884 divenne professore straordinario a Königsberg dove rimase per otto anni. Nel 1892 fu chiamato al Eidgenössische Polytechnikum Zürich sulla cattedra che era di Frobenius (cfr. [DSB voce a cura di H. Freudenthal]). Lett. LC1.

Jensen Johan L. (1859-1925). Studiò al collegio tecnologico di Copenhagen e qui lavorò per la compagnia telefonica di Copenhagen (cfr. [DSB voce a cura di B. Jessen]). Lett. CT1

Lamartine Alphonse (1790-1869). Poeta, scrittore, storico e politico francese (cfr. [EI]) Lett. CT4.

Lambert Johann H. (1728-1777). Matematico, fisico e filosofo tedesco contemporaneo di Eulero. Fu un pioniere nella geometria non euclidea. A lui è attribuita la prima dimostrazione dell'irrazionalità di π (cfr. [DSB voce a cura di C.J. Scriba]). Lett. CT11.

La Vallée Poussin Charles de (1866-1962). Fu professore di Matematica all'Università di Leuven in Belgio. Il suo nome è legato alla congettura di Gauss sulla distribuzione dei numeri primi (cfr. [DSB voce a cura di J. C. Burkill]. Lett. CT15; lett. LC1; lett. LT1; lett. A₁₂; lett. A₁₃).

Lebesgue Victor Amédée (1791-1875) Fu professore ordinario di Matematica all'Università di Bordeaux (cfr. [Poggendorff]). Lett. CT11.

Legendre Adrien-Marie (1752-1833). Dal 1775 al 1780 insegnò all'École Militaire. Nel 1793 divenne membro del Comitato Pesi e Misure dell'Académie des Sciences, che dopo la rivoluzione divenne Istituto Nazionale di Scienze ed Arte. Rifiutatosi nel 1824 di votare il candidato al governo dell'Istituto Nazionale, gli fu interrotta la pensione. Morì in povertà (cfr. [DSB voce a cura di J. Itard]). Lett. CT11; lett. A₂₀.

Lemoine Émile (1840-1912). Matematico francese noto per i suoi contributi alla geometria del triangolo (cfr. [DSB voce a cura di S. L. Greitzer]). Lett. CT15.

Lie Sophus (1842-1899). Matematico norvegese il cui nome è legato ai gruppi di trasformazione continui. Grazie ad una borsa di studio poté viaggiare e incontrare i principali matematici europei. Nel 1872 tornò alla sua Università di Christiania. Nel 1886 fu chiamato a Leipzig. Nel 1882 fondò gli *Acta Mathematica* (cfr. [DSB voce a cura di H. Freudenthal]). Lett. A₅; lett. A₁₇.

Lionnet Eugene F. (1805-1884). Fu professore di Matematica al Lycée Louis-le-Grand di Parigi. Fu anche esaminatore per l'ammissione all'École Navale. (cfr. [Poggendorff]). Lett. CT11.

Liouville Joseph (1809-1882) Nel 1833 fu nominato all'École Centrale des Arts et Manufactures; e nel 1838 iniziò ad insegnare Analisi e Meccanica all'École Polytechnique dove rimase fino al 1851 quando passò al Collège de France. Il suo nome è legato al *Journal de Mathématiques Pures e Appliquées* da lui fondato nel 1836. (cfr. [DSB voce a cura di R. Taton]). Lett. LC1.

Lombardi Antonio. Lett. CT26; lett. A₂₆.

Loria Gino (1862-1954). Dal 1886 professore di Algebra e Geometria analitica all'Università di Genova. Il suo nome è essenzialmente legato alla storia della matematica, campo in cui produsse numerose e importanti ricerche (cfr. [Tricomi 1962]). Lett. CT30.

Lugli Aurelio (1853-1896). Fu tra i fondatori della Mathesis. Lett. CT11.

Macaluso Damiano (1845-1932). Fu professore di Fisica sperimentale all'Università di Catania e poi, dal 1886, a quella di Palermo di cui fu anche rettore dal 1891 al 1893 (cfr. [E.I]). Lett. CT5; lett. CT6.

Maisano Giovanni (1851-1929). Fu professore di Algebra e Geometria analitica all'Università di Messina da dove, nel 1897, passò all'Università di Palermo (cfr. [Tricomi 1962]). Lett. CT5; lett. CT6; lett. CT7; lett. A₁₀; lett. A₁₃.

Maggi Gian Antonio (1856-1937). Fu professore straordinario di Analisi presso l'Università di Modena e ordinario presso quella di Messina. Nel 1895 fu chiamato a Pisa per la Meccanica Razionale e nel 1924 a Milano (cfr. [Tricomi 1962], [DBI]). Lett. CT6.

Mangoldt Hans (1854-1945). Allievo a Berlino di Weierstrass e Kummer, insegnò all'Università di Hannover e alla Scuola Tecnica Superiore di Aquisgrana; fu rettore di quella di Danzica. Lett. LT1

Mayer Adolph (1839-1908). Professore dell'Università di Leipzig. Editore degli *Acta Mathematica* (cfr. [DSB voce a cura di I. B. Cohen]). Lett. MLT.

Mariani. Lett. CT26.

Mathieu Émile L. (1835-1890) Fu nominato nel 1869 professore alla Facoltà di Scienze di Besançon, e dopo cinque anni si spostò su una cattedra a Nancy (cfr. [DSB voce a cura di I. Grattan -Guinness]). Lett. A₅; lett. A₆.

Meissel Ernest D. (1826-1895). Astronomo tedesco (cfr. [Peetre 1995]). Lett. CT11.

Mertens Franz (1840-1927). Studiò a Berlino dove frequentò i corsi di Weierstrass, Kronecker e Kummer. Fu nominato professore straordinario nel 1865, poi promosso ordinario nel 1870, all'Università Jagellonica a Cracovia. Fu chiamato al politecnico di Graz nel 1844, da dove si spostò a Vienna nel 1894 (cfr. [Dick 1981]). Lett. CT11; lett. LC1; lett. LT1.

Millosevich Elia (1848-1919). Astronomo, fu vicedirettore dell'Ufficio centrale di Meteorologia in Roma, ufficio allora annesso all'Osservatorio del Collegio Romano (cfr. [DBI voce a cura di G. Gullino]). Lett. A₁₀.

Mittag-Leffler Gösta (1846-1927). Professore dell'Università di Uppsala (1872), poi di Helsinki (1876) e quindi di Stoccolma (1881). Nel 1882 fondò la rivista *Acta Mathematica*. (cfr. [DSB voce a cura di A. Robinson]). Lett. CT23; lett. MTL; lett. A₂₁.

Mollo A. Professore all'Istituto Tecnico e Nautico "G.B. Della Porta" di Napoli. Lett. CT3.

Moreau G. Lett. CT11.

Müller. Editore degli *Acta Mathematica*. Lett. MLT.

Nesselmann Georg H. F. (1811-1881). Fu un orientalista tedesco, filologo con interessi nel linguaggio del Baltico e nella storia della matematica (cfr. [ADB, voce a cura di M. Cantor]). Lett. CT11.

Nobile Arminio (1838-1897). Astronomo dell'Osservatorio di Capodimonte, fu professore di Geodesia all'Università di Napoli (cfr. [Tricomi 1962], [Nobile 1974]). Lett. CT8.

Nobile Vittorio (1875-1966). Figlio di Arminio, studiò in un primo momento con Cesàro. Perfezionatosi ad Heidelberg in Astronomia, nel 1912 fu nominato astronomo aggiunto presso l'Osservatorio di Capodimonte. Nel 1935 ottenne per concorso la cattedra di Astronomia teoretica all'Università di Napoli (cfr. [Nobile 1974], [E.I]). Lett. CT29; lett. CT30.

Oppermann H. Lett. LT1.

Pagliani Luigi (1847-1932). Nel 1881 divenne titolare delle prima cattedra di Igiene in Italia. Coprì anche importanti incarichi ministeriali nel campo dell'igiene e della profilassi (cfr. [E.I]). Lett. CT6; lett. A₄.

Paternò Francesco P. (1850-1927). Fu professore di Geometria proiettiva all'Università di Palermo (cfr. [Tricomi 1962]). Lett. CT5; lett. CT6; lett. A₁₃.

Paternò Emanuele (1847-1935). Insegnò Chimica all'Università di Palermo e poi a quella di Roma.

Fu rettore dell'Università di Palermo dal 1886 al 1890, anno in cui fu nominato senatore del Regno [cfr. EI]. Lett. CT26.

Pellerano Benedetto. Editore del *Giornale di Matematiche* in Napoli. Lett. CT2; lett. CT4.

Peratoner Alberto (1862-1925). Direttore dell'Istituto di Chimica dell'Università di Palermo e dal 1909 docente di Chimica farmaceutica a Roma (cfr. [E.I]). Lett. A₁₀.

Pervouchine Joanni Mirevic (1827-1890) Trascorse la sua giovinezza in Kazan, dove studiò all'accademia teologica, per poi passare il resto della sua vita tra la città di Perm (fino al 1856) e nei villaggi non lontani da questa città (notizie fornite dalla professoressa Terzimanova Gulshat del dipartimento di Geometria dell'università pedagogica di Kazan). Nel fondo Cesàro si trova una foto rappresentante un suo ritratto con dedica a Cesàro; in essa si può leggere in russo: "Dono del prete Joanni Mirevic Pervouchine, del villaggio di Miesopekaio del distretto di Chadrinsk nel Govrno di Perna in Russia. Io sono nato il 9 novembre 1827. Ho vestito gli abiti di prete il 15 gennaio. Sono stato nominato curato di Miesopekaio il 18 ottobre 1891. Lett. A₁₅.

Phragmen Lars E. (1863-1937). Matematico svedese, ottenne una cattedra a Stoccolma nel 1892 come successore di Sofia Kovalevskaya. Fu editore degli *Acta Mathematica* dove aveva cominciato a lavorare giovanissimo sotto la guida di Mittag-Leffler (cfr. [Garding 1997]). Lett. LC1; lett. LT1.

Piarron de Mondesir Emile. Ingegnere "*des ponts et chassées*". Lett. CT11.

Piltz Adolf (1855-1940). Dopo aver conseguito l'abilitazione a Jena nel 1897, poiché versava in una difficile situazione economica, cominciò a lavorare come redattore in un giornale e contemporaneamente insegnava matematica al Thüringer Technikum in Ilmenau. Lett. LT1.

Pincherle Salvatore (1853-1936). Nel 1880 vinse la cattedra di Calcolo infinitesimale all'Università di Palermo e l'anno successivo fu chiamato a Bologna (cfr. [DSB voce a cura di F.G. Tricomi]). Lett. CT6.

Pinto Luigi (1846-1920). Dal 1880 fu professore di Fisica matematica all'Università di Napoli (cfr. [Tricomi 1962]). Lett. CT24; lett. CT31.

Poincaré Henri J. (1854-1912). Dopo aver conseguito nel 1879 il dottorato con Hermite a Parigi, fu nominato professore di Analisi all'Università di Caen. Nel 1881 passò alla Facoltà di Scienze di Parigi e nel 1886 fu nominato per le cattedre di Fisica matematica e Probabilità alla Sorbonne. (cfr. [DSB voce a cura di J. Dieudonné]). Lett. CT11; lett. LT1; lett. A₁₄; lett. A₁₆; lett. A₁₇.

Poincaré Raymond. Avvocato e finanziere, cugino di Henri Poincaré, fu presidente della repubblica francese (cfr. [EI]). Lett. A₁₇.

Polignac Camille A. de (1832-1913). Membro dell'alta aristocrazia francese, fu maggiore generale confederato e valoroso comandante di divisione nella guerra franco-prussiana del 1870. Morì mentre lavorava ad un problema di teoria dei numeri (cfr. [Poggendorff]). Lett. LT2. lett. A₂₁.

Rafanelli Bartolomeo G. Ingegnere di Pistoia, redasse numerosi progetti sulle reti ferroviarie italiane. Lett. CT1.

Riemann Georg F. (1826-1866). Studiò a Göttingen con Gauss e a Berlino con Jacobi e Dirichlet. Nel 1859 ottenne a Göttingen la cattedra che fu di Gauss. Morì a 40 anni di tubercolosi in Italia dove era andato per cure (cfr. [DSB voce a cura di H. Freudenthal]). Lett. CT11; lett. LC1; lett. LT1.

Salvatore-Dino Nicola (1843-1919). Dal 1862 fu professore di Geometria proiettiva e poi di Geometria analitica all'Università di Roma, e dal 1888 all'Università di Napoli (cfr. [Tricomi 1962]). Lett. CT26; lett. A₇.

Sandron Decio. Libraio ed editore in Palermo. Lett. A₁₃.

Sannia Gustavo (1875-1930). Figlio di Achille, professore all'Università di Napoli, e nipote di Enrico D'Ovidio, professore all'Università di Torino, tra il 1915 e il 1919 insegnò all'Università di Cagliari in qualità di incaricato. Nel 1922-23, per concorso, passò all'Università di Modena in qualità di straordinario di Geometria e nel 1924 fu poi chiamato a Napoli (cfr. [Tricomi 1962]). Lett. CT28.

Santamaria. Lett. A₂₈; lett. A₂₉.

Schaper H. Lett. LT1.

Scherk Heinrich F. (1798-1885). Professore di Matematica e Astronomia all'Università di Kiel dal 1833, viene ricordato per i suoi studi sulle superfici minime e la distribuzione dei primi. Lett. CT11; lett. LT1.

Serret Joseph A. (1819-1885) Fu nominato professore di Meccanica celeste nel 1861 al Collège de France, e due anni dopo occupò la cattedra di Calcolo integrale alla Sorbona (cfr. [DSB voce a cura di D.J. Struik]). Lett. CT11.

Smith Henry J. (1826-1883). Matematico irlandese. Fu nominato nel 1860 "Savillan Professor of Geometry" al Balliol College di Oxford, e nel 1873 fu chiamato al Corpus Christi College. Nel 1874 fu assunto come conservatore all'University Museum in Oxford (cfr. [DSB voce a cura di J.D. North]). Lett. A₁₅.

Stanievitch Victor. Professore all'istituto politecnico di Pietroburgo. Lett. LT1.

Stifel Michael (1487-1567). Monaco e matematico tedesco, fu professore presso l'Università di Jena (cfr. [DSB voce a cura di K. Vogel]). Lett. CT11.

Sterneck Daublevsky R. von (1839-1910). Geodeta austriaco. Ufficiale dell'esercito prestò servizio nell'Istituto geografico militare. Il suo nome rimane in particolar modo legato alla gravimetria, nella quale introdusse nuovi metodi e strumenti (cfr. [EI]). Lett. LT11.

Sylvester James J. (1814-1897). Nel 1838 fu nominato professore di "Natural Philosophy" al University College di Londra e nel 1841 professore di Matematica all'Università della Virginia negli Stati Uniti. Fu professore di Matematica dal 1855 al 1870 al Royal Military Academy di Woolwich e dal 1875 al 1883 all'Università John Hopkins di Baltimora. In seguito ebbe la cattedra di "Savillan Professor of Geometry" all'Università di Oxford (cfr. [DSB voce a cura di J.D. North]). Lett. LT1.

Tchebychef Pafnuty L. (1821-1894). Matematico russo, divenne professore straordinario nel 1850 e ordinario nel 1860 all'Università di S. Pietroburgo. Nel 1872 divenne professore emerito e nel 1882 lasciò l'università dedicando la sua

vita alla ricerca (cfr. [DSB voce a cura di A.P. Youschkevitch]). Lett. CT11; lett. LC1; lett. LT1; lett. LT4; lett. A₁₂; lett. A₂₁; lett. D₂.

Terquem Orly (1782-1862) Matematico francese noto come editore dei *Nouvelles Annales de Mathematiques* (cfr. [Poggendorff]). Lett. CT11.

Trudi Nicola (1811-1884). Professore al Collegio di Marina di Napoli e dal 1851 professore di Calcolo differenziale ed integrale all'Università di Napoli; fu autore di uno dei primi trattati sui determinanti. (cfr. [Tricomi 1962]). Lett. CT2.

Vecchi A. Lett. LT4.

Venturi Adolfo (1852-1914). Astronomo, fu nominato nel 1888 professore di Geodesia all'Università di Palermo (cfr. [Tricomi 1962]). Lett. CT6; lett. CT8; lett. A₁₃.

Vivanti Giulio (1859-1949). Conseguì la libera docenza nel 1892 e fu per tre anni professore interno alla Scuola Normale dell'Università di Pavia. Nel 1895 divenne professore di Calcolo infinitesimale all'Università di Messina. Passò a Pavia nel 1908 e a Milano nel 1924 (cfr. [Tricomi 1962]). Lett. CT3.

Weber Heinrich M. (1842-1913). Nel 1869 fu nominato professore straordinario all'Università di Heidelberg. Fu professore all'Eidgenössische Polytechnikum di Zurigo, all'Università di Königsberg e alla Technische Hochschule di Charlottenburg. La sua ultima cattedra fu a Strasbourg nel 1895 (cfr. [DSB voce a cura di B. Schöneberg]). Lett. A₂₇.

Weierstrass Karl Th. (1815-1897). Nel 1842 iniziò la sua carriera come insegnante di Matematica al Pro-Gymnasium a Krone in Prussia, nel 1848 si trasferì al Collegium Hoseanum a Braunsberg. Nel 1856 ebbe la cattedra all'Università di Berlino. (cfr. [DSB voce a cura di Kurt-R. Biermann]). Lett. LT1.

William D. Lett. CT11

Bibliografia

[ADB] *Allgemeine Deutsche Biographie*, Herausgegeben von der Historischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Duncker & Humboldt, Leipzig, 1852.

[Bachmann 1894] P. Bachmann, *Lehrbuch der analytischen Zahlentheorie*, Teubner, Leipzig, 1894.

[Bachmann 1900] P. Bachmann, *Analytische Zahlentheorie*, in Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Band 1, Heft 5, Teubner, Leipzig, 1900.

[Bagnulo et al.] S. Bagnulo, F. Palladino, *Sul recupero della corrispondenza del matematico Ernesto Cesàro (1859-1906)*, "Fridericiana" 1 (1991), 2, pp. 115-123.

[Bang 1891] A.S. Bang, *Om Primitval af bestemte Former*, "Nyt Tidsskrift for mathematic", IIB (1891), pp. 73-82.

[Battaglini 1889] G. Battaglini, *Elementi di calcolo infinitesimale*, Tip. dell'Accademia Reale delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, Napoli, 1889.

[Berger 1891] A.F. Berger, *Recherches sur les valeurs moyennes dans la théorie des nombres*, "Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis" 14 (1891), n. 2, S. 3.

[Betti 1879] E. Betti, *Teorica delle Forze newtoniane e sue applicazioni all'Elettrostatica e al Magnetismo*, Nistri, Pisa, 1879.

[Bonnet 1843] O. Bonnet, *Note sur la convergence et la divergence des séries*, "Journal de Mathématiques Pures et Appliquées", (1), 8 (1843), pp. 73-109.

[Braun 1899] J. Braun, *Das Fortschritzungsgesetz der Primzahlen durch eine transcendente Gleichung exakt dargestellt*, Wissenschaftliche Beilage zu dem Jahresbericht über das Schuljahr 1898-1899.

[Brigaglia et al. 1982] A. Brigaglia, G. Masotto, *Il Circolo matematico di Palermo*, Dedalo, Bari, 1982.

[Brocard 1880] H. Brocard, *Sur la fréquence et la totalité des nombres premiers*, "Nouvelle Correspondance de Mathématiques", 6 (1880), pp. 255-266, 481-488, 529-542.

[Burhenne 1852] G.H. Burhenne, *Über das Gesetz der Primzahlen*, "Archiv der Mathematik und Physik", (1), 19 (1852), pp. 442-449.

[Cahen 1894] E. Cahen, *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues*, "Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure", (3), 11 (1894) pp. 75-164.

[Cantor 1857] M. Cantor, *Petrus Ramus, Michael Stifel, Hieronymus Cardanus, drei mathematische Charakterbilder aus dem 16. Jahrhundert*, "Zeitschrift für Mathematik und Physik", 2 (1857), pp. 353-367.

[Capelli 1892] A. Capelli, *Sulla risoluzione generale delle equazioni ed in ispecie delle trinomie per mezzo di integrali definiti*, "Rendiconto della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli", n. 1 e n. 3, 1892.

[Carbone et al. 1996] L. Carbone, P. Nastasi, F. Palladino, *I carteggi Torelli-Cesàro, Landau-Cesàro, Cipolla-Cesàro e alcune questioni connesse*, "Nuncius", 11 (1996), pp. 151-225.

[Carbone et al. 1997 a] L. Carbone, G. Cardone, F. Palladino, *Il fondo Cesàro: costituzione, recupero, consistenza*, "Rendiconto dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli", (4), 64 (1997), pp. 217-278.

[Carbone et al. 1997 b] L. Carbone, G. Cardone, S. Mancuso, *Il fenomeno della variazione della latitudine a corto periodo: gli studi di Arminio Nobile e la controversia con Ernesto Cesàro*, "Memorie della Società Astronomica Italiana", 68 (1997), pp. 573-595.

[Carbone et al. 2002] L. Carbone, R. Gatto, F. Palladino, *Una comunità e un caso di frontiera. L'epistolario Cremona-Cesàro e i materiali correlati*,

“Memorie dell’Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli”, Liguori, Napoli, 2002.

[Catalan 1886] E. Catalan, *Mélanges mathématiques*, “Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège”, (2), 12 (1885) pp. 1-407; orig. publ. 1868.

[Certo 1891] L. Certo, *Teoria elementare dei numeri reali, lezioni svolte nel R. Liceo Umberto I dal prof. L. Certo, anno scolastico 1890-91, a cura di A. Andranico*, Palermo, 1891.

[Cesàro 1883] E. Cesàro, *Sur diverses questions d’arithmétique*, “Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège” (2), 10 (1883); in [Cesàro 1964], I, pp. 10-362.

[Cesàro 1884 a] E. Cesàro, *Remarques sur les fonctions holomorphes*, “Giornale di Matematiche”, 22 (1884), pp. 191-201; in [Cesàro 1964], II, pp. 383-394.

[Cesàro 1884 b] E. Cesàro, *Sur les fonctions holomorphes de genre quelconque*, “Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences de Paris”, 99 (1884), pp. 26-27; in [Cesàro 1964], II, pp. 381-382.

[Cesàro 1884 c] E. Cesàro, *Questions*, “Nouvelles Annales de Mathématiques”, (3), 3 (1884), pp. 159-160.

[Cesàro 1885 a] E. Cesàro, *Notes sur le calcul isobarique*, “Nouvelles Annales de Mathématiques”, (3), 4 (1885), pp. 59-78 ; in [Cesàro 1964], I, pp. 430-447.

[Cesàro 1885 b] E. Cesàro, *Questione*, “Giornale di Matematiche”, 23 (1885), p. 79.

[Cesàro 1885 c] E. Cesàro, *Excursions arithmétiques à l’infini*, Hermann, Parigi, 1885.

[Cesàro 1886 a] E. Cesàro, *Forme poliedriche regolari e semiregolari in tutti gli spazi*, “Memorias Accademia Real das Sciencias de Lisbonne”, 1886, poi anche Milano, Hoepli, 1886; in [Cesàro 1964], II, pp. 3-75.

[Cesàro 1886 b] E. Cesàro, *A proposito di un problema sulle eliche*, “Giornale di Matematiche”, 24 (1886), pp. 46-48.

[Cesàro 1886 c] E. Cesàro, *Alcune misure negli iperspazi*, “Giornale di Matematiche”, 24 (1886), pp. 49-55.

[Cesàro 1886 d] E. Cesàro, *La rottura del diamante*, “Giornale di Matematiche”, 24 (1886), pp. 124-127.

[Cesàro 1886 e] E. Cesàro, *Intorno ad una pretesa dimostrazione di termodinamica*, “Giornale di Matematiche”, 24 (1886), pp. 158-163.

[Cesàro 1892] E. Cesàro, *Introduzione al calcolo infinitesimale*, Alvano, Napoli, 1892.

[Cesàro 1893a] E. Cesàro, *Nuova contribuzione ai principii fondamentali dell’aritmetica assintotica*, “Rendiconto della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli” (2), 7 (1893), pp. 208-209.

[Cesàro 1893b] E. Cesàro, *Théorème d'Analyse*, "Bulletin des Sciences Mathématiques", (2), 17 (1893), pp. 321-324.

[Cesàro 1893c] E. Cesàro, *La serie di Lambert in aritmetica assintotica*, "Rendiconto della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli" (2), 7 (1893), pp. 197-204.

[Cesàro 1894 a] E. Cesàro, *Corso di analisi algebrica con introduzione al calcolo infinitesimale*, Bocca, Torino, 1894.

[Cesàro 1894 b] E. Cesàro, *Introduzione alla teoria matematica dell'elasticità*, Bocca, Torino, 1894.

[Cesàro 1894 c] E. Cesàro, *Sur une formule empirique de M. Pervouchine*, "Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris", 69 (1894), pp. 848-849; in [Cesàro 1964], I₂, pp. 417-418.

[Cesàro 1894 d] E. Cesàro, *Nuova contribuzione ai principii fondamentali dell'aritmetica assintotica*, "Atti della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli" (2) 6 (1894), n.17; in [Cesàro 1964], I₂, pp. 419-448.

[Cesàro 1894 e] E. Cesàro, *Sulla geometria intrinseca*, "Rendiconto della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli", (2), 8 (1894), pp. 141-148.

[Cesàro 1896] E. Cesàro, *Sulla distribuzione dei numeri primi*, "Rendiconto della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli", (3), 2 (1896), pp. 297-304, in [Cesàro 1964], I₂, pp. 449-458.

[Cesàro 1897 a] E. Cesàro, *Elementi di calcolo infinitesimale con numerose applicazioni geometriche*, Alvano, Napoli 1897. Seconda edizione notevolmente ampliata, Alvano, Napoli, 1905.

[Cesàro 1897 b] E. Cesàro, *Remarques utiles dans les calculs de limites*, Mathesis, (2), 7 (1897), pp.177-183; in [Cesàro 1964] I₂, pp. 459-466.

[Cesàro 1900 a] *Questions*, L'Intermédiaire des mathématiciens, 7 (1900), p. 378.

[Cesàro 1900 b] E. Cesàro, *Sur une classe de courbes planes remarquables*, "Nouvelles Annales de Mathématiques", (3), 19 (1900), pp. 489-495.

[Cesàro 1904 a] E. Cesàro, *Sui fondamenti della geometria intrinseca non-euclidea*, "Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei", (5), 13 (1904), pp. 438-445, in [Cesàro 1964], II, pp. 242-251.

[Cesàro 1904 b] E. Cesàro, *Geometria intrinseca negli spazi di curvatura costanti*, "Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei", (5), 13 (1904), pp. 658-667; in [Cesàro 1964], II, pp. 252-262.

[Cesàro 1904 c] E. Cesàro, *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Nach einem Manuskript des Verfassers deutsch herausgegeben von Gehrhardt Kowalewski*, Teubner, Leipzig, 1904.

[Cesàro 1964] E. Cesàro, *Opere scelte*, a cura dell'Unione Matematica Italiana, Cremonese, Roma, v. I, 1964; v. I₂ 1965; v. II, 1968.

[Chabert 1844] Chabert, *De quelques propositions sur les nombres*, “Nouvelles Annales de Mathématiques”, 3 (1844), pp. 251-253.

[Cipolla 1902] M. Cipolla, *La determinazione assintotica dell' n^{imo} numero primo*, “Rendiconto della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli”, (3), 8 (1902), pp. 132-166; in [Cipolla 1997], pp. 1-35.

[Cipolla 1903] M. Cipolla, *Un metodo per la risoluzione della congruenza di secondo grado*, “Rendiconto della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli”, (3), 5 (1903), pp. 154-163; in [Cipolla 1997], pp. 37-46.

[Cipolla 1904] M. Cipolla, *Applicazioni della teoria delle funzioni numeriche del second'ordine alla risoluzione della congruenza di secondo grado*, “Rendiconto della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli”, (3), 10 (1904), pp. 135-150; in [Cipolla 1997], pp. 69-84.

[Cipolla 1905] M. Cipolla, *Estensione di un metodo di Legendre alla risoluzione della congruenza $x^{2^m} \equiv a \pmod{2^k}$* , “Rendiconto della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli”, (3), 11 (1905), pp. 304-309.

[Cipolla 1906] M. Cipolla, *Sulla risoluzione apiaristica delle congruenze binomie secondo un modulo primo*, “Mathematische Annalen”, 63, pp. 54-61; in [Cipolla 1997], pp. 100-107.

[Cipolla 1909] M. Cipolla, *Specimen de calculo aritmetico-integrale*, “Rivista di Matematica”, 9 (1909), pp. 1-29.

[Cipolla 1915] M. Cipolla, *Sui principi del calcolo aritmetico-integrale*, “Atti de' Accademia Gioenia” (Catania), (5), 8 (1915) Mem. XI; in [Cipolla 1997], pp. 258-291.

[Cipolla 1932] M. Cipolla, *Gabriele Torelli. Necrologio*, “Giornale di Matematiche” (3), 23 (1932), pp. 62-78.

[Cipolla 1997] M. Cipolla, *Michele Cipolla, Opere*, a cura di G. Zappa e G. Zacher, “Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo”, (2), 47 (1997).

[Clausen 1828] Th. Clausen, *Beitrag zur Theorie der Reihen*, “Journal für die Reine und Angewandte Mathematik”, 3 (1828), pp. 92-95.

[Conte et al.1991] A. Conte, L. Giacardi (a cura di), *Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici*, Torino, Deputazione subalpina di Storia Patria, 1991.

[Curtze 1867] M. Curtze, *Notes diverses sur la série de Lambert et la loi de nombres premiers*, “Annali di Matematica Pura e Applicata”, (2), 1 (1867), pp. 285-295.

[Daublebsky 1900] R. Daublebsky von Sternebeck, *Zur Tschebyschef'schen Primzahlentheorie*, “Berichte an die Akademie der Wissenschaften in Wien”, 109 (1900), pp. 1137-1158.

[DBI] *Dizionario Biografico degli Italiani*, Istituto dell'Enciclopedia Italiana, Roma 1960-.

[DBL] *Dansk Biografisk Leksikon*, Copenhagen, 1936.

[Del Pezzo 1906] P. Del Pezzo, *Ernesto Cesàro*, "Rendiconto della Reale Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli", (2), 12 (1906), pp. 1-18.

[De Marco 1885] G. De Marco, *Soluzione delle Quistioni* 48 e 54, "Giornale di Matematiche", 23 (1885), pp. 377-378.

[Desboves 1855] Desboves, *Sur un théorème de Legendre et son application à la recherche de limites qui comprennent entre elles des nombres premiers*, "Nouvelles Annales de Mathématiques", 14 (1855), pp. 281-295.

[Dick 1981] A. Dick, *Franz Mertens, 1840-1927*, Forschungszentrum Graz, Mathematisch-Statistische Sektion, Graz, 1981.

[Dickson 1919] L.E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Carnegie Institution, Washington, 3 voll., 1919-1923.

[Dini 1878] U. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Nistri, Pisa 1878.

[Dirichlet 1838] L. Dirichlet, *Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres*, "Journal für die Reine und Angewandte Mathematik", 18 (1838), pp. 259-274.

[Dirichlet 1839] L. Dirichlet, *Démonstration de cette proposition: Toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont des entiers sans diviseur commun contient une infinité de nombres premiers*, "Journal de Mathématiques Pures et Appliquées", (1), 4 (1839), pp. 393-422.

[Dirichlet 1854] L. Dirichlet, *Über ein die Division betreffendes Problem*, "Journal für die Reine und Angewandte Mathematik", 47 (1854), pp. 151-154.

[DNB] Dictionary of National Biography, Smith, Elder & Co., London 1885-1900.

[Dormoy 1866] E. Dormoy, *Formule générale des nombres premiers*, "Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris", 63 (1866) pp. 178-181.

[D'Ovidio 1892] E. D'Ovidio, *Lezioni di Algebra Complementare del Prof. D'Ovidio raccolte da L.B. e B.C. a.a. 1892-93*, Bertero, Torino, 1892.

[Drach 1844] S.M. Drach, *On the Empirical Law in the Enumeration of Prime Numbers*, "London and Edinburgh Philosophical Magazine", 24 (1844), pp. 192-193.

[DSB] *Dictionary of Scientific Biography*, C. G. Gillespie (ed.), C. Scribner's Sons, New York, 1970-1976.

[Duhem 1866] P. Duhem, *Le Potentiel thermodynamique et ses applications à la Mécanique chimique et à l'étude des phénomènes électriques*, Hermann, Paris, 1886.

[Duhem 1891 a] P. Duhem, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, Cours professé en 1890-1891, Hermann, Paris, 1891.

[Duhem 1891 b] P. Duhem, *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme*, Gauthier-Villars, Paris 1891.

[Dupré 1859] A. Dupré, *Examen d'une proposition de Legendre relative à la Théorie des nombres, ouvrage placé en première ligne par l'Académie des sciences, dans le concours pour le grand prix de mathématiques de 1858, suivi d'un mémoire sur la résolution des équations numériques*, Mallet-Bachelier, Paris, 1859.

[EI] *Enciclopedia Italiana di Scienze, Lettere ed Arti, pubblicata sotto l'alto patronato di S.M. il Re d'Italia*, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma, 1929-.

[Euler 1738] Euler, *Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus*, "Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae", 6 (1738), pp. 103-107; *Opera Omnia*: (1), 2, pp. 1-5.

[Foussereau 1892] Foussereau, *Sur la fréquence des nombres premiers*, "Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure", (3), 9 (1892), p.31 e ss.

[Franel 1896] J. Franel, "Sur la fonction de Riemann $\zeta(t)$ et son application à l'arithmétique", "Festschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich-Vierteljahrsschrift", 41 (1896), zweiter theil, pp.7-19

[Gallucci 1905] G. Gallucci, *A proposito delle configurazioni iperarmoniche: un teorema sugli n-goni prospettivi*, "Rendiconto della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli", (3), 11 (1905), pp. 310-312.

[Garding 1997] L. Garding, *Mathematics and Mathematicians: Mathematics in Sweden before 1950*, American Mathematical Society, Providence, 1997.

[Gatto 2000] R. Gatto, *Storia di una "anomalia". Le Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli tra l'Unità d'Italia e la Riforma Gentile. 1860-1923*, Fridericiana Editrice Universitaria, Napoli, 2000.

[Gauss 1863] C.F. Gauss, *Werke Höhere Arithmetik*, herausgegeben von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Universität-Druckerei (Göttingen), 1863-1906.

[Gebbia 1902] M. Gebbia, *Le deformazioni tipiche dei corpi solidi elastici*, "Annali di Matematica Pura e Applicata", (3), 7 (1902), pp. 141-230.

[Glaisher 1878] J.W. Glaisher, *On Long Succession of Composite Numbers*, "The Messenger of Mathematics", 7 (1878) pp. 102-106, 171-176.

[Glaisher 1879 a] J.W. Glaisher, *Separate Enumerations of Primes of the Form $4n+1$ and of the Form $4n+3$* , "Proceedings of the Royal Society of London", 30 (1879), pp. 192-197.

[Glaisher 1879 b] J.W. Glaisher, *On the Value of the Constant in Legendre's Formula for the Number of Primes Inferior to a Given Number*, "Proceeding of the Cambridge Philosophical Society", 3 (1879), pp. 296-309.

[Gram 1884] J.P. Gram, *Undersagelser angaaende Maengden of Primtal under en given Graense*, "Vidensk. Selsk. Skr., 6te Rackke, naturvidenskabelig og mathematisk Afd", Bd. VI, Kjobenhavn, 1884.

[Guibert 1862] A. Guibert, *Propriétés relatives à des nombres premiers*, "Journal de Mathématiques Pures et Appliquées", (2), 7 (1862), pp. 414-416.

[Günther 1876] S. Günther, *Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung*, Besold, Erlangen, 1876.

[Hadamard 1893] J. Hadamard, *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, "Journal de Mathématiques Pures et Appliquées", (4), 9 (1893), pp. 171-216.

[Hadamard 1896] J. Hadamard, *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques*, "Bulletin de la Société mathématique de France", 24 (1896), pp. 199-220.

[Hadamard 1910] J. Hadamard, *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, t. 1, 3, n. 3, 1910, p. 28.

[Hankel 1869] H. Hankel, *Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten*. Akademische Antrittsrede, Fues, Tübingen, 1869.

[Hardy et al.] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *Contributions to the Theory of the Riemann Zeta-Function and the Theory of the Distribution of Primes*, "Acta Mathematica" 41 (1918), pp. 119-196; in [Hardy 1967], II, pp. 20-97.

[Hardy et al.] G. H. Hardy, H. A. Heilbronn, *Edmund Landau*, "Journal of the London Mathematical Society" 21 (1939), pp. 342-350.

[Hardy 1967] *Collected papers of G.H. Hardy. Including joint papers with J.E. Littlewood and others*, a cura di The London Mathematical Society, Clarendon Press, Oxford, 1967.

[Hargreave 1849] C.J. Hargreave, *Analytical Researches Concerning Numbers*, "London and Edinburgh Philosophical Magazine", 35 (1849), pp.36-53.

[Hargreave 1854] C.J. Hargreave, *On the Law of Prime Numbers*, "London and Edinburgh Philosophical Magazine", 8 (1854), pp.14-22.

[Hermite 1885] Ch. Hermite, *Sur les fonctions holomorphes*, "Journal de Mathématiques Pures et Appliquées" (4), 1 (1885), pp. 9-10.

[Hilbert 1897] D. Hilbert, *Die Theorie der algebraischen Zahlen-körper*, Bericht erstattet der Deutschen-Mathematiker Vereinigung, 4^{er} Band, 1897.

[Hurwitz 1882] A. Hurwitz, *Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Functionen $F(x) = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$ die bei der Bestimmung der Klassenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten*, "Zeitschrift für Mathematik und Physik", 27 (1882), pp. 86-102.

[Isenkrahe 1900] C. Isenkrahe, *Über eine Lösung der Aufgabe, jede Primzahl als Function der vorhergehende Primzahlen durch einen geschlossenen Ausdruck darzustellen*, "Mathematische Annalen", 53 (1900), pp.42-44.

[Jensen 1887] J.L.W. Jensen, *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, "Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris", 104 (1887), pp. 1156-1157.

[Jongmans 1996] F. Jongmans, *Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, Républicain sans république*, Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, Mons, 1996.

[Kennedy 1983] H.C. Kennedy, *Peano, Storia di un matematico*, Boringhieri, Torino, 1983.

[Kinkelin 1862] H. Kinkelin, *Allgemeine Theorie der harmonischen Reihen mit Anwendung auf die Zahlentheorie*, Programm der Gewerbeschule in Basel, 1862.

[Klügel 1808] G.S. Klügel, *Mathematisches Wörterbuch*, Schwickert, Leipzig, 3^{em}, 1808.

[Knopp 1951] K. Knopp, *Edmund Landau*, "Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung", 54 (1951), pp. 55-62.

[Koch 1900] N. Koch, *Sur la distribution des nombres premiers*, "Acta Mathematica" 24 (1900), pp. 159-182.

[Lambert 1771] J.H. Lambert, *Anlage zur Architektonik, oder Theorie des Einfachen und Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntnis*, 2, Riga 1771.

[Landau 1901] E. Landau, *Über die asymptotischen Werte einiger zahlentheoretischer Funktionen*, "Mathematische Annalen", 54 (1901), pp. 570-591.

[Landau 1902] E. Landau, *Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyscheff'schen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale*, "Journal für die Reine und Angewandte Mathematik", 125 (1902), pp. 64-188.

[Landau 1905] E. Landau, *Über einen Satz von Tschebyscheff*, "Mathematische Annalen", 61 (1905), pp. 527-550.

[Landau 1909] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, 2 voll., Teubner, Leipzig, 1909.

[Landau 1909] E. Landau, *Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie*, "Mathematische Zeitschrift", 1 (1918), pp. 1-24.

[Landau 1918] E. Landau, *Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie*, Zweite Abhandlung, "Mathematische Zeitschrift", 1 (1918), pp. 214-219.

[La Vallée-Poussin 1896] C. de La Vallée Poussin, *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*, "Annales de la Société Scientifique de Bruxelles", 20 (1896), pp. 281-326.

[La Vallée-Poussin 1899] C. de La Vallée-Poussin, *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*, "Mémoires couronnés et autres mémoires de l'Académie Royale des sciences, d.l. et d.b.a. de Belgique", 59 (1899-1900).

[Le Besgue 1846] V.A. Le Besgue, *Remarques diverses sur les nombres premiers*, "Nouvelles Annales de Mathématiques", 15 (1856), pp. 130-134.

[Le Besgue 1862] V.A. Le Besgue, *Arithmologie élémentaire-Application a l'algèbre*, "Nouvelles Annales de Mathématiques", (2), 1 (1862), pp. 219-227, 254-266, 405-413.

[Lebesgue 1864] V.A. Le Besgue, *Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premières*, Gauthier-Villars, Paris, 1864.

[Legendre 1830] A.M. Legendre, *Théorie des nombres*, Firmin-Didot, Paris, 1830

[Levi-Civita 1895] T. Levi-Civita, *Di una espressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi in un determinato intervallo*, "Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei" (5), 6 (1895), pp. 303-309.

[Lie 1891] S. Lie, *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Georg Scheffers*, Teubner, Leipzig, 1891.

[Lionnet 1879] Lionnet, *Note sur la question «Tout nombre pair est-il la somme de deux impairs premiers?»*, "Nouvelles Annales de Mathématiques" (2), 18 (1879), pp. 356-360.

[Littlewood 1914] J.E. Littlewood, *Sur la distribution des nombres premiers*, "Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris", 158 (1914), pp. 1869-1872; in [Littlewood 1982], pp. 829-832.

[Littlewood 1982] *Collected papers of J.E. Littlewood*, a cura di The London Mathematical Society, Clarendon Press Oxford 1982.

[Loria 1902] G. Loria, *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe, von Fritz Schütte*, Teubner, Leipzig, 1902.

[Lugli 1888] A. Lugli, *Sul numero dei numeri primi da 1 a n*, "Giornale di Matematiche", 26 (1888), pp. 86-95.

[Mangoldt 1898] H. Mangoldt, *Über eine Anwendung der Riemannschen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze*, "Journal für die reine und angewandte Mathematik", 119 (1898), pp. 65-71.

[Mayol 1900] E.A. Mayol, *Questions*, "L'Intermédiaire des Mathématiciens", 7 (1900), pp. 386-387.

[Marcolongo 1932] Gabriele Torelli, "Giornale di Matematiche", (3), 23 (1932), pp. 55-61.

[Mathieu 1873] É. Mathieu, *Cours de Physique Mathématique*, Gauthier-Villars, Paris, 1873 (1^o volume del *Traité de Physique Mathématique*, 1890).

[Meissel 1870] E. Meissel, *Über die Bestimmung der Primzahlmenge innerhalb gegebener Grenzen*, "Mathematische Annalen", 2 (1870), pp. 636-642.

[Meissel 1871] E. Meissel, *Berechnung der Menge von Primzahlen, welche innerhalb der ersten Hundert Millionen natürlicher Zahlen vorkommen*, "Mathematische Annalen", 3 (1871), pp. 523-525.

[Mertens 1873] F. Mertens, *Auszug aus einem Schreiben des Herrn Mertens in Krakau an den Herausgeber*, “Journal für die Reine und Angewandte Mathematik”, 75 (1873) p. 264.

[Mertens 1874 a] F. Mertens, *Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie*, “Journal für die Reine und Angewandte Mathematik”, 77 (1874), pp. 289-338.

[Mertens 1874 b] F. Mertens, *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie*, “Journal für die Reine und Angewandte Mathematik”, 78 (1874), pp. 46-62.

[Mertens 1897] F. Mertens, *Über eine zahlentheoretischen Function*, Sitzungsberichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematische-Natürliche Classe, 106 (1897), pp. 761-830

[Mollo 1885] A. Mollo, *Sopra una formola di termodinamica*, “Giornale di Matematiche”, 23 (1885), pp. 76-79.

[Moreau 1873a] G. Moreau, *Solution de la question 1055*, “Nouvelles Annales de Mathématiques” (2), 12 (1873) pp. 330-331.

[Moreau 1873b] G. Moreau, *Solution de la question 526*, “Nouvelles Annales de Mathématiques” (2), 12 (1873) pp. 437-439.

[Nastasi 1991] P. Nastasi (a cura di), *Lettere a Michele La Rosa (1903-1932)*, Seminari di Storia della Scienze – Quaderno 1 (1991), Facoltà di Scienze-Università di Palermo.

[Nesselmann, 1842] G.H.F. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, Reimer, Berlin, 1842.

[Nobile 1905] V. Nobile, *Sullo studio intrinseco delle curve di caccia*, “Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo”, (1), 20 (1905), pp. 73-82.

[Nobile 1974] C. Nobile Fiore, *Antonio, Arminio e Vittorio Nobile, Astronomi all'Osservatorio di Capodimonte*, Aurelia, Roma, 1974.

[Palladino 1993] F. Palladino, *Le lettere di Giuseppe Peano nella corrispondenza di Ernesto Cesàro*, “Nuncius”, 7 (1993), pp. 249-285.

[Palladino et al. 2012] N. Palladino, A.M. Mercurio, *La corrispondenza di Giuseppe Battaglini a Luigi Cremona*, , “Rendiconto dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli”, in questo stesso volume.

[Peetre 1995] J. Peetre, *Outline of a Scientific Biography of Ernest Meissel (1826-1895)*, “Historia Mathematica”, 22 (1995), pp.154-178.

[Perna 1907] A. Perna, *Ernesto Cesàro*, “Giornale di Matematiche”, 45 (1907), pp.299-332, ora anche in [Cesàro 1964] I₁, pp. VI-XXXVIII, con qualche modifica.

[Pervouchine 1892] M. Pervouchine, *Formules pour la détermination approximative des nombres premiers, de leur somme, et de leur différence d'après le numero de ces nombres*, “Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kasan”, (2) 1 à 4 (1892-94).

[Piarron de Mondesir 1877] E. S. Piarron de Mondesir, *Sur les nombres premiers. Formules pour le calcul exact de la totalité des nombres premiers*

compris entre 0 et un nombre pair quelconque $2n$, “Association française pour l’avancement des sciences, Comptes-rendus” 6 (1878), pp. 79-92.

[Phragmén 1891] L.E. Phragmén, *Sur le logarithme intégral et la fonction $\zeta(x)$ de Riemann*, “Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademies Föreläsningar”, 48 (1891), pp. 599-616.

[Piltz 1881] A. Piltz, *Über das Gesetz, nach welchem die mittlere Darstellbarkeit der natürlichen Zahlen als Produkte einer gegebenen Anzahl Faktoren mit der Grösse der Zahlen wächst*, Berlin, 1881 (Doktorarbeit).

[Piltz 1884] A. Piltz, *Über die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und über verwandte Gesetze*, Neuenhahn, Jena, 1884 (Habilitationsschrift).

[Poggendorff] J.C. Poggendorff, *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*, Barth, Leipzig, 1863 e successive edizioni.

[Poincaré 1891] J.H. Poincaré, *Sur la distribution des nombres premiers*, “Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences de Paris”, 113 (1891), p. 819.

[Poincaré 1892] J.H. Poincaré, *Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tchebychef*, “Journal de Mathématiques Pures et Appliquées”, (4), 8 (1892), pp. 26-68.

[Poincaré 1901] J.H. Poincaré, *Quelques remarques sur les groupes continus*, “Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo”, (1), 15 (1901), pp. 321-368.

[Polignac 1859] C. Polignac de, *Recherches nouvelles sur les nombres premiers*, “Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences de Paris”, 49 (1849), pp. 350; 386; 624; 724.

[Rafanelli 1884] G.B. Rafanelli, *Sopra tre teoremi del Cesàro*, *Giornale della Società di Letture e Conversazioni scientifiche di Genova*, 5-6-7 (1884), pp. 350-362.

[Riemann, 1859] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, “Monatsberichte der Berliner Akademie” 1859, pp. 671-680. *Gesammelte mathematische Werke*, Teubner, 1876, pp. 136-144.

[Sannia 1905] G. Sannia, *Trasformazione di Combescure ed altre analoghe per le curve storte*, “Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo”, (1), 20 (1905), pp. 83-92.

[Sansone 1956] G. Sansone, *Commemorazione del corrispondente Michele Cipolla* “Rendiconti dell’Accademia Nazionale dei Lincei, classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali”, (8), 21 (1956), pp. 507-523.

[Schaper 1898] H. Schaper, *Über die Theorie der Hadamard’schen Funktionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen*, Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der Universität zu Göttingen, 1898.

[Scherk 1832] H.F. Scherk, *Bemerkungen über die Lambertsche Reihe*, “Journal für die Reine und Angewandte Mathematik”, 9 (1832), pp. 162-168.

[Scimone 1988] A. Scimone, *Un genio in provincia. La presenza di Michele Cipolla a Corleone negli anni 1904-1911*, "Kronos", Annali del Liceo Scientifico "Don Giovanni Colletto", 1988, pp. 53-60.

[Serre 1852] J.A. Serre, *Note sur un théorème de la théorie des nombres*, "Journal de Mathématiques Pures et Appliquées", (1), 17 (1852), pp. 186-189.

[Sylvester 1891] J. Sylvester, *On Arithmetical Series*, "Messenger of Mathematics", (2), 21 (1891), pp. 1-19, 87-120.

[Smith 1857] H.J.S. Smith, *On the History of the Research of Mathematicians on the Subject of the Series of Prime Numbers*, "Proceedings of the Ashmolean Society", 3 (1857), p. 128-131; in [Smith 1894], I, pp. 35-38.

[Smith 1894] *The collected mathematical papers of Henry John Stephen Smith*, v. I-II, J.W. Glaisher, The Clarendon press, Oxford, 1894.

[Stifel 1544] M. Stifel, *Arithmetica integra*, Petreium, Norimbergae 1544.

[Tannery 1886] J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Hermann, Paris, 1886.

[Tchébychef 1851] P.L. Tchébychef, *Note sur différentes séries*, "Journal de Mathématiques Pures et Appliquées" (1), 16 (1851) pp. 337-346; in [Tchébychef 1907], I, pp. 99-108.

[Tchébychef 1852] P.L. Tchébychef, *Mémoire sur les nombres premiers*, "Journal de Mathématiques Pures et Appliquées", (1), 17 (1852), pp. 266-390; in [Tchébychef 1907], I, pp. 51-70.

[Tchébychef 1853] P.L. Tchébychef, *Lettre de M. le professeur Tchébychef a M. Fuss sur un nouveau théorème relatif aux nombres premiers contenus dans les formes $4n+1$ et $4n+3$* , "Bulletin de la Classe Physico-Mathématique de l'Académie Impériale des Sciences de St. Petersburg", 11 (1853), p. 208; in [Tchébychef 1907], I, pp. 697-698.

[Tchébychef 1878] P.L. Tchébychef, *Sur une transformation de séries numériques*, "Nouvelle Correspondance Mathématique", 4 (1878), pp. 305-308; in [Tchébychef 1907], II, pp. 705-707.

[Tchébychef 1907] P.L. Tchébychef, *Oeuvres (1821-1894)*, a cura di MM. A. Markof et N. Soin, v.I-II, 1899-1907.

[Terquem 1846] O. Terquem, *Considérations élémentaires sur les nombres; suite naturelle des nombres impairs; crible pour les nombres premiers; table relative au nombre des nombres premiers*, "Nouvelles Annales de Mathématiques", 5 (1846), pp. 607-611.

[Torelli 1896] G. Torelli, *Lezioni di Algebra complementare date nella R. Università di Palermo, l'anno scolastico 1894-95*, litografia Longo 1896.

[Torelli 1902 a] G. Torelli, *Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato*, "Atti della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli", (2), 11 (1902), pp. 1-222.

[Torelli 1902 b] G. Torelli, *Sur quelques théorèmes de M. Poincaré sur le idéaux premiers*, "Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo", 16 (1902), pp. 100-103.

[Torelli 1904] G. Torelli, *Nuove formule per calcolare la totalità dei numeri primi non superiori ad un limite assegnato contenuti nella serie naturale , o in una progressione aritmetica*, Nota I, "Rendiconto della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli", (3), 10 (1904), pp. 350-362.

[Torelli 1905] G. Torelli, *Nuove formule per calcolare la totalità dei numeri primi non superiori ad un limite assegnato contenuti nella serie naturale , o in una progressione aritmetica*, Nota II, "Rendiconto della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli", (3), 11 (1905), pp. 101-109.

[Toti 1994] L. Toti Rigatelli, *La teoria di Galois classica in Italia nella prima metà del XX secolo*, "Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo", (2), 36 (1994).

[Tricomi 1962] F. Tricomi, *Matematici italiani del primo secolo dello Stato unitario*, "Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali" (4), 1 (1966), pp. 1-120.

[Trudi 1874] N. Trudi, *Teoria delle funzioni isobariche*, "Giornale di Matematiche", 12 (1874), pp. 110-128.

[Vecchi 1903] M. Vecchi, *Recensione*, "Bollettino di Bibliografia e storia delle scienze Matematiche", 1903, pp. 42-48.

[Viola 1991] C. Viola, *Alcuni aspetti dell'opera di Angelo Genocchi riguardanti la teoria dei numeri*, in [Conte et al.], pp. 11-29.

[Vivanti 1885] G. Vivanti, *Sulle funzioni intere trascendenti*, "Giornale di Matematiche", 23 (1885), pp. 96-122.

[Weber 1896] H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Vieweg, Braunschweig, 1896.

[William 1866] D. William, *Le nombres premiers de 100000001 à 100001699 (Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville)*, "Journal de Mathématiques Pures et Appliquées", (2), 11 (1866), pp. 188-190.

La corrispondenza Giovanni Novi - Enrico Betti

Nota di Nicla Palladino* e Anna Maria Mercurio**

Presentata dal socio Luciano Carbone
(Adunanza del 4 Novembre 2011)

Key words: Giovanni Novi, Enrico Betti, trattati di Matematica.

Abstract – In this paper, we studied the 48 letters that the Neapolitan mathematician Giovanni Novi wrote to Enrico Betti between 1850 and 1864. The correspondence is now stored at the *Archivio Betti*, Biblioteca of the Scuola Normale Superiore, in Pisa. It is an essential document that allows us to reconstruct Novi's scientific activity and the close friendship between Novi, Betti and Placido Tardy.

Riassunto – Presso l'*Archivio Betti* alla Biblioteca della Scuola Normale Superiore di Pisa sono conservate 48 lettere del matematico napoletano Giovanni Novi ad Enrico Betti, inviate tra il 1850 ed il 1864. Esse costituiscono un documento essenziale per ricostruire l'attività scientifica di Novi a cui finora è stata rivolta un'attenzione modesta. Inoltre, tramite le lettere qui pubblicate si possono ripercorrere le tappe dell'amicizia stretta e delle collaborazioni tra Novi, Betti e Placido Tardy.

1 – PRESENTAZIONE

Presso l'*Archivio Betti*, custodito alla Biblioteca della *Scuola Normale Superiore* di Pisa, sono state rinvenute 48 lettere che il matematico napoletano Giovanni Novi inviò ad Enrico Betti tra il dicembre del 1850 e l'ottobre del 1864.

A Giovanni Novi, nato nel 1826 e morto nel '66, è stata rivolta, nel panorama delle ricerche condotte fino ad oggi riguardanti i matematici attivi durante il periodo dell'unificazione italiana, un'attenzione modesta. In effetti, le sue condizioni di salute, critiche già a partire dagli inizi degli anni Sessanta, seguite da una prematura morte, limitarono molto la sua attività scientifica e la

* Professore a contratto presso l'Università degli Studi della Basilicata.

** Docente di Matematica per gli Istituti Superiori.

possibilità per lui di costituire una scuola; non ebbe così dei veri continuatori che ne potessero celebrare la memoria.

Tuttavia, i vari carteggi che si vanno pubblicando permettono ormai di affermare che egli ebbe un ruolo importante nella vita matematica italiana di metà Ottocento.

Dalla corrispondenza con Betti, viene rivelata la loro stretta amicizia; ma anche l'amicizia con Placido Tardy sembrerebbe altrettanto stretta, come si evince dal cospicuo carteggio tra Tardy e Betti recentemente pubblicato.¹ Emergono, ancora, legami più o meno intensi del matematico napoletano, ad esempio, con Giuseppe Battaglini, Barnaba Tortolini, Angelo Genocchi, Ottaviano Fabrizio Mossotti, Eugenio Beltrami, Luigi Cremona.² A fronte di tale intensità di relazioni, bisogna notare le difficoltà che incorrono nel reperire le corrispondenze che Novi tenne con i personaggi menzionati; corrispondenze di cui si ha testimonianza certa sia nelle lettere che qui si pubblicano, sia nelle lettere scambiate tra Tardy e Betti:³ l'unico ritrovamento, per ora, è quello di una lettera che Novi spedisce a Genocchi nel dicembre del 1863,⁴ dalla quale si apprende anche di contatti che aveva stabilito con Riemann⁵ durante il soggiorno pisano di quest'ultimo.⁶

La figura di Giovanni Novi si delinea soprattutto nell'opera sia di traduzione sia di composizione di importanti trattati rivolti all'insegnamento della matematica;⁷ tale iniziativa si può inquadrare tra le imprese di rilievo a cui parteciparono gli studiosi italiani nel periodo dell'unificazione del paese, tassello importante nella costruzione di un sistema educativo pubblico. Di contro, la sua produzione scientifica originale resta piuttosto limitata, circoscrivibile a qualche memoria pubblicata agli inizi degli anni '50 per gli

¹ Il carteggio è [CERRONI *et al.* 2010].

² Luigi Cremona (1830-1903) fu professore nel ginnasio di Cremona e poi, dal 1859, nel liceo "Beccaria" di Milano. Nel '60 gli fu affidata la cattedra di Geometria superiore presso l'Università di Bologna. Nel 1867 fu nominato professore di Geometria superiore e Statica grafica nell'Istituto tecnico superiore di Milano; nel 1873 fu chiamato a Roma dal ministro della Pubblica Istruzione a sovrintendere la Scuola d'applicazione per gli ingegneri, dove teneva anche l'insegnamento di Statica grafica e di Geometria superiore. Fu anche ministro della Pubblica Istruzione e senatore; (voce biografica curata da U. BOTTAZZINI e L. ROSSI per il [DBI]).

³ Nel "Fondo Tardy" attualmente noto, custodito presso la biblioteca universitaria di Genova, non si sono conservate lettere di Novi, alle quali pure si fa riferimento nel presente carteggio.

⁴ La lettera è conservata nel Fondo Genocchi presso la Biblioteca Passerini Landi di Piacenza.

⁵ Bernhard Riemann (1826-1866) studiò a Göttingen con Gauss e poi a Berlino. Discusse la sua tesi di dottorato sui principi di una teoria generale delle funzioni di una variabile complessa nel 1851, apportando notevoli contributi alle teorie matematiche; nel 1859 ottenne la cattedra che era stata di Gauss; ([EB]).

⁶ Dall'ottobre del 1863 Riemann, per motivi di salute, iniziava il suo soggiorno a Pisa, durato fino al luglio del 1863.

⁷ I lavori in questione sono: [NOVI 1857], [NOVI 1858], [NOVI 1862] e [NOVI 1863].

*Annali di Scienze matematiche e fisiche*⁸ e a qualche altra del '64 inserita nel *Giornale di Battaglini*.⁹

Novi apporta un notevole contributo sicuramente anche ad una delle opere da lui tradotte; si tratta delle *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire* del 1850, che nel 1858 veniva per la prima volta pubblicato in lingua italiana con il titolo *Trattato di Geometria elementare di A. Amiot, prima traduzione italiana con note ed aggiunte di Giovanni Novi*. Ad esse Cremona dedica un'ampia recensione su *Il Politecnico*,¹⁰ molto elogiativa, in cui segnala esplicitamente le dieci note da Novi aggiunte al trattato originale "*destinate quasi esclusivamente allo sviluppo delle teorie recenti soltanto abbozzate nel testo*" e le "*brevi note, poste dal traduttore, allo scopo di indicare nuove conseguenze de' teoremi esposti dall'autore, o più semplici dimostrazioni, o maniere più generali di considerare certi argomenti*".¹¹ Si compone così, secondo il recensore, un passo significativo nell'adeguare i libri elementari di matematica ai progressi della scienza.

Nella corrispondenza qui edita, tuttavia, pochissimi sono i cenni che Novi fa al suo *Trattato di Geometria*; se ne trovano, ad esempio, nella lettera del 21 aprile del 1858 in cui scrive di un *curioso fatterello* riguardante l'adozione del testo nel Liceo di Firenze. Ovunque, le lettere hanno comunque solo scarni riferimenti a discussioni matematiche.

L'epistolario qui presentato e i cospicui riferimenti individuabili nelle lettere tra Betti e Tardy consentono di ricostruire le intense relazioni sia tra Novi e Betti che tra Novi e Tardy. Dalla lettera del 18 novembre 1850 di Betti a Palcido Tardy,¹² si legge del primo incontro, appena avvenuto, tra Novi e Betti:

Io non ho il bene di conoscer Lei personalmente; ma ho potuto apprezzare il suo molto valore nella Scienza che io studio con grande amore, per alcune

⁸ Gli *Annali*, compilati a cura di Tortolini ed editi a Roma dal 1850 al 1865, erano chiamati comunemente *Annali di Tortolini*, ma la loro denominazione completa era *Annali di Scienze matematiche e fisiche*. Dal 1858, accanto al Tortolini, furono associati alla redazione, che restò in Roma, anche Enrico Betti, Francesco Brioschi ed Angelo Genocchi e la rivista assunse allora il nome di *Annali di matematica pura ed applicata*. Nel 1865 le pubblicazioni furono fatte cessare ma ripresero poi a Milano, a partire dal luglio 1867, ancora col nome di *Annali di matematica pura ed applicata*, sotto la direzione di Francesco Brioschi e (di fatto) di Luigi Cremona.

⁹ Nel 1863, Giuseppe Battaglini fonda, assieme a Vincenzo Janni (1819-1891) e Nicola Trudi (1811-1884), il *Giornale di matematica ad uso degli studenti delle Università italiane*. Dal '66 al '93, con l'eccezione degli anni 1872-73, Battaglini ne fu il solo direttore e per tale motivo la rivista veniva usualmente chiamata anche *Giornale di Battaglini*.

¹⁰ Rivista mensile fondata a Milano nel 1839 da Carlo Cattaneo (1801-1869), che la diresse e la redasse quasi da solo fino al 1844.

¹¹ [CREMONA 1860].

¹² In [CERRONI *et al.* 2010].

sue Memorie che ho avuto occasione di leggere, e per avere inteso parlar di Lei con tanta lode dal mio ottimo Maestro e amico il Prof. Mossotti, e dal Sig. Prof. Novi, col quale ho potuto far conoscenza pochi giorni sono.

Tardy, nella sua risposta, già definisce Novi un caro amico e scrive:

Il mio caro amico Novi mi avea scritto di aver fatto la sua conoscenza poco dopo la mia partenza da Firenze.

Con tutta probabilità l'amicizia tra Novi e Tardy risale agli anni in cui quest'ultimo risiedette a Firenze, dopo che, nel 1848, si era allontanato da Messina, sua città natale, alla cui università dal 1841 era professore di "Matematiche Sublimi". Anche Novi in effetti aveva lasciato Napoli, dove lavorava presso la sezione geodetica dell'Ufficio Topografico, a seguito dei moti rivoluzionari del 1848.¹³ A Firenze, Novi insegna Meccanica e Artiglieria¹⁴ e poi Analisi e Meccanica¹⁵ al Liceo Militare "Arciduca Ferdinando". La sua posizione gli permette allora di incoraggiare Betti a concorrere al posto di professore al Liceo Civile di Firenze, auspicando un avvicinamento del suo amico da Pistoia, e di muovere vari passi per rendere concreto questo progetto; a tale riguardo, interessanti sono le lettere qui pubblicate ai n° 22, 23, 24. Scorrendo la corrispondenza, si scorge costante una viva ed operosa sollecitudine di Novi nei confronti di Betti: lo incita a perseverare nei complessi studi degli anni '51-'52 sulla risolubilità delle equazioni algebriche; partecipa ai suoi progressi almeno fornendo all'amico volumi e memorie che possano essergli d'aiuto; nell'autunno del '52 lo invita più volte anche a partecipare ad un concorso che gli avrebbe permesso di trascorrere uno o più anni a Parigi con una borsa di perfezionamento.

Una più concreta collaborazione tra i due si ha nella compilazione del *Trattato di algebra superiore*. Nel 1854 Betti assume l'insegnamento di Algebra superiore al Liceo di Firenze e contestualmente inizia la traduzione dell'*Algebra* di Bertrand (pubblicata nel 1856, con aggiunte e note). Nell'Avvertimento del traduttore, Betti preannuncia la volontà di pubblicare un *Corso di Algebra*, scopo che rimane al livello di raccolta di materiali delle lezioni del biennio trascorso al Liceo di Firenze e delle lezioni all'Università di Pisa dal 1857 in poi, anno in cui ottiene la Cattedra di Algebra.

¹³ Novi ebbe stretti rapporti con molti di quanti esularono dal Regno delle due Sicilie dopo i fatti del '48; tra loro vanno ricordati almeno Francesco de Sanctis (1817-1883) e Pasquale Villari; (cfr. le lettere contenute in [DE SANCTIS 1938] e in [DE SANCTIS 1955] e una lettera di Cesira Pozzolini, cognata di Novi, a Pasquale Villari in [POZZOLINI 1904]).

¹⁴ Come si legge dal frontespizio della memoria [NOVI 1850].

¹⁵ La specificazione è contenuta in [BOLLATI 1866], pag. 1077.

La promessa di Betti viene mantenuta da Novi, che gli succede nel 1859 sulla cattedra di Algebra e che nel 1863 pubblica il *Trattato di algebra superiore – Parte Prima, Analisi Algebrica*; nella prefazione ringrazia l'amico Betti, esplicita le intenzioni e gli scopi che intendevano raggiungere con la compilazione del Trattato ed osserva:

Un'opera di tal fatta era stata promessa dal professor Betti, corrono già varii anni [...]. Ma nel 1859 il professor Betti fu chiamato a dettar lezioni di analisi superiore, ed il nuovo ufficio obbligandolo ad altri studi, lo distolse di mandare ad effetto il suo primo pensiero [...].

Succeduti noi al professor Betti nella cattedra di algebra superiore dell'Università di Pisa, fummo dallo stesso esortati ad effettuare la promessa che le nuove circostanze impedivano a lui di adempire. Per agevolarci questo compito, ingombro di non lievi difficoltà, egli pose gentilmente a nostra disposizione i manoscritti delle lezioni fatte negli anni 1858 e 59, e ci offrì i suoi consigli e i suoi aiuti con quella schietta benevolenza che rende sì preziosa la sua amicizia a noi ed a quanti lo conoscono.

Aggiunge anche:

Tutte le volte che abbiamo inserito nel nostro trattato nuove dimostrazioni di speciali teoremi appartenenti al Prof. Betti, lo abbiamo notato espressamente.

Del trattato, Novi aveva discusso anche con Angelo Genocchi, come si legge nell'unica lettera ritrovata, inviata al matematico piacentino da Pisa il 28 dicembre del 1863; in essa vi è anche un cenno all'interesse che Betti poneva nel trattato che Novi andava compilando:

Così Betti mi parlò di qualche errore che Ella aveva trovato nel Complemento di Rubini; ma non rammentava bene in che consistessero; abbia la gentilezza di dirmelo, affinché io verifichi la cosa e stia in guardia. Parimente se Ella avesse qualche comunicazione a farmi sopra i soggetti che debbo esporre nella 2^a parte, io mi reputerò fortunatissimo di poterla inserire (sotto il suo nome) nel mio Trattato. Indotto a fare questa opera per ragioni di utilità e non per ambizione, sono lieto quando mi è dato attingere a fonti italiane a preferenza delle straniere.

In forte evidenza nell'epistolario appaiono i legami di Novi con l'ambiente accademico italiano dell'epoca. Una importante iniziativa immediatamente precedente al conseguimento dell'unità nazionale riguardò la creazione di un

vero giornale matematico italiano, capace di confrontarsi con le migliori riviste europee fondate nel corso della prima metà del secolo, come il *Journal di Crelle*¹⁶ o gli *Annales de Mathématiques*.¹⁷ Brioschi, nel 1857, con Cremona, Betti e Genocchi, decide di portare avanti il “progetto intorno ad un giornale di matematica Italiano da surrogarsi agli Annali del Tortolini, quando non potesse essere una continuazione di questi”, come scrive in una lettera a Genocchi nel maggio del 1857.¹⁸ Lo stesso Novi fu invitato a casa di Tardy nella Pasqua del 1858, per l’importante incontro¹⁹ che vide Brioschi, Tardy, Betti e Genocchi riuniti sia per discutere sugli *Annali di Matematica pura ed applicata* che per progettare il celebre viaggio d’istruzione fatto da Brioschi in compagnia di Betti e Felice Casorati²⁰ attraverso gli stati e le città della Germania e in Francia.²¹ Scriveva Betti a Tardy da Pisa il 26 febbraio del 1858:

*Abbiamo quasi fissato con Brioschi di trovarsi a Genova nelle vacanze di Pasqua, dove forse verrà anche Genocchi. Vogliamo parlare un poco anche insieme con Te del nostro Giornale; e stabilire bene tutto ciò che è necessario per il migliore andamento dello stesso. Io ho accettato l’invito di Brioschi tanto più volentieri, perché mi darà occasione di stare un poco con Te. Nelle vacanze di Carnevale fui a Firenze, e mi provai a persuadere il Novi a venire anche Lui; ma per ora non sono riuscito”.*²²

Nella lettera di Novi a Betti del 23 marzo 1858, si legge

Ma Tardy mi scrive che sei sano e che certamente avrà il piacere di abbracciarti a Genova; lo che mi piace moltissimo. Io, come ben puoi immaginare, appena pronunzio Genova mi attiro una tempesta dalla mia dolcissima Gegia; quindi per ora non bisogna pensarci. Ti rivedrò prima della tua gita? Lo spero, e intanto desidero più dirette notizie di te e della tua casa.

¹⁶ Il *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, dell’editore Walter de Gruyter, fondato a Berlino nel 1826 da August Leopold Crelle (1780-1855) che lo diresse fino alla sua morte, era conosciuto come *Giornale di Crelle*. Analogamente, dal 1856 al 1880, la direzione fu affidata a Carl Wilhelm Borchardt (1817-1880) e il giornale venne chiamato *Giornale di Borchardt*.

¹⁷ *Nouvelles annales de mathématique* fondati in Francia nel 1842 da Olry Terquem (1782-1862) e Camille Gerono (1799-1892).

¹⁸ La lettera è contenuta in [CARBONE et al. 2006], pp. 273-274.

¹⁹ Un resoconto di tale incontro è nel necrologio di Betti scritto da Brioschi e riportato in [CERRONI et al. 2010].

²⁰ Felice Casorati (1835-1890) si laureò ingegnere a Pavia nel 1856; nel 1859 fu nominato professore di Algebra e Geometria analitica nell’Università pavese, ove in seguito assunse l’insegnamento di Analisi infinitesimale e poi anche Analisi superiore; (cfr. [DBI], voce a cura di E. TOGLIATTI).

²¹ Cfr. [BOTTAZZINI 1994], [CARBONE et al. 2006].

²² [CERRONI et al. 2010].

Tra gli altri argomenti affrontati nelle epistole, vi è il noto “affare” riguardante Guglielmo Libri, al quale Novi dedica l'intera sentita lettera del 16 maggio 1852; l'occasione gli è data dalla lettura della difesa espressa da Prosper Mérimée nei confronti dell'amico Libri che per la prima volta già nel 1827 era stato accusato di aver sottratto dei volumi durante il suo incarico da direttore della biblioteca dell'Accademia dei Georgofili a Firenze; le accuse si ripeterono qualche anno dopo a Parigi, quando era segretario di una speciale commissione con il compito di stendere un catalogo dei fondi manoscritti delle biblioteche e degli archivi francesi.

I procedimenti legali contro Libri furono istituiti ufficialmente nel marzo '48 e si conclusero con una condanna avvenuta tra molte polemiche. Le sue responsabilità furono provate in modo inoppugnabile solo dopo la morte (avvenuta nel 1869) quando gli eredi di Lord Ashburnham misero in vendita la preziosa collezione paterna, ricca di numerosi manoscritti acquistati proprio dal Libri. L'amministratore generale della *Bibliothèque nationale*, riuscì allora a ricostruire i furti, avvenuti in Francia, e le falsificazioni e a riacquisire, nel 1888, i manoscritti rubati, negoziandone l'acquisto. Per le stesse ragioni parte della collezione posseduta dagli Ashburnham fu acquistata nel 1884 dallo Stato italiano e depositata a Firenze nella Biblioteca Medicea Laurenziana.²³ Novi esprime chiaramente il suo desiderio a che “*per onore dell'Italia*” l'amico venga riconosciuto innocente, ma confessa di non esser “*sicuro della sua moralità*”.

Nonostante l'epistolario qui presentato si svolga durante il periodo di unificazione dell'Italia, in esso non si possono scorgere significativi riferimenti a fatti politici. Ve ne è forse un cenno quando ricorda, in una lettera dell'aprile del '51, i legami con il suo vecchio insegnante alla Nunziatella, Fedele Amante, esonerato dall'insegnamento dopo i fatti del '48:

Vi sono da lungo tempo debitore di una lettera, ma dovete scusarmi perché ho avute molte preoccupazioni che mi hanno impedito di scrivervi, fra le quali la morte di un dotto professore di astronomia napoletano, il più caro amico che io mai avessi.

Un altro cenno è poi al brigantaggio, in una lettera del 17 luglio 1861, in cui scrive:

²³ Cfr. [DBI], voce a cura di L. GIACARDI.

I mali da cui è afflitto questo paese sono vari e di disforme natura. [...] è fuor di dubbio che il male peggiore, più insoffribile e che più irrita la fibra napoletana è il brigantaggio.

Un gruppo di lettere assai significativo è invece dedicato alla riorganizzazione degli studi superiori di Matematica, anche in connessione con il percorso che avrebbe dovuto affrontare chi aspirava al titolo di ingegnere.²⁴

L'argomento viene esaminato nel dettaglio nelle lettere del 20 febbraio, del 22 febbraio e del 4 marzo del 1861 e la questione sorge in occasione delle intenzioni del ministro Mamiani, agli inizi del 1861, di dare nuove regolamentazioni agli studi universitari, nell'ambito delle varie iniziative prese per adattare la Legge Casati alla rinnovata situazione politica.²⁵ In particolare, le proposte discusse in queste missive non divennero legge, come è confermato da passi contenuti nelle lettere stesse. Nel 1861 anche Betti fece parte (insieme pure a Tardy) di una commissione ministeriale per la riforma, come scrive in una lettera:

*Ricevetti il giorno avanti che arrivasse la tua una lettera del Mamiani colla quale m'invitava a far parte della Commissione per la legge sull'istruzione pubblica. Io ho accettato. Non ti nascondo però che trovo questo incarico assai grave per le difficoltà che ci saranno a potere far bene.*²⁶

Che le discussioni fossero intense un po' dappertutto è confermato ad esempio anche da una lettera di Tardy a Cremona, datata 11 giugno 1861,²⁷ in cui, peraltro, verrà notato come non si fosse arrivati sulla questione specifica a nessun risultato concreto:

I giovani vengono alle università unicamente perché la laurea è necessaria per esercitare una professione. Per gl'ingegneri poi si vorrebbe che fossero assai limitati gli studi matematici, e si vorrebbero anzi fare due classi d'ingegneri, una delle quali non uscisse nemmeno dalle università, e però vedete quanti pochi accorrerebbero alla nostra scuola. Ma tutti questi discorsi sono rimasti senza risultato.

²⁴ Per la questione sulla formazione degli ingegneri in Toscana, si vedano [SOLDANI 2010] e la bibliografia correlata.

²⁵ Al riguardo si può consultare [POLENGHI 1993], capitolo II, *L'istruzione superiore e l'unificazione nazionale*, pp. 91-112.

²⁶ Lettera del gennaio 1861 di Betti a Tardy in [CERRONI et al. 2010].

²⁷ In [CERRONI et al. 2007].

Tuttavia, è interessante seguire, tramite la lettura della corrispondenza qui presentata, le posizioni assunte dai personaggi coinvolti nelle vicende, secondo anche il punto di vista dello scrivente, tenuto a manifestare una sua opinione quale professore presso l'Università di Pisa.

L'intenso rapporto di amicizia che si era instaurato tra Betti, Tardy e Novi, e che qui abbiamo cercato di delineare, sarà infranto solo dalla morte di quest'ultimo, avvenuta del dicembre del 1866. Quando ciò accade, Betti esprime il suo dispiacere scrivendo:

*Abbiamo perduto un amico, ed io ho perduto il solo collega con cui potessi vivere un po' di vita scientifica.*²⁸

A queste parole Tardy risponde due giorni dopo:

*Quanto dolorosamente ne sia stato colpito non posso dirti a parole. E' stato un giorno funesto per me, e l'animo mio è tuttora pieno di tristezza, né sa consolarsi di quella perdita. Tu sai che da quasi 17 anni io era legato a lui con fraterna amicizia.*²⁹

Sia Betti che Tardy saranno ancora chiamati a dare assistenza alla vedova dell'amico perduto, con cui anche la moglie di Tardy aveva stretto amicizia, provvedendo a mettere in vendita i libri della biblioteca di Novi; scrive infatti Betti, riferendosi a Teresa Pozzolini:

*Non rimane bene neppure dal lato economico. Si venderanno i libri, dai quali procureremo di ricavare più che sia possibile. Rimarrà qui in Pisa, e sarebbe anche per Lei una gran soddisfazione se venisse ad abitare in Pisa la tua Signora.*³⁰

CRITERI DI EDIZIONE

Le 48 lettere di Novi a Betti ritrovate sono in buono stato e la grafia di Novi risulta molto chiara. Qualche raro errore è stato notato apponendo il termine *sic* tra parentesi quadre. Le sigle *s.l.* e *s.d.* stanno, rispettivamente, per “senza luogo” e “senza data”. La ricostruzione dell'esatto luogo e dell'esatta data, laddove omissi, è stata frutto di osservazioni tratte da riferimenti interni

²⁸ Lettera del 18 dicembre 1866, di Betti a Tardy; (in [CERRONI *et al.* 2010]).

²⁹ Lettera del 20 dicembre 1866, di Tardy a Betti; (in [CERRONI *et al.* 2010]).

³⁰ Lettera del 22 dicembre 1866, in [CERRONI *et al.* 2010].

alle lettere, di confronti tra le lettere stesse o, ancora, di confronti con lettere ad altri corrispondenti. In ogni caso, le deduzioni sono state inserite in parentesi quadre.

GIOVANNI NOVI

Nacque a Napoli il 31 dicembre 1826. Compiuti, con merito, gli studi presso l'Accademia Militare della Nunziatella, venne impiegato presso la sezione geodetica dell'Ufficio Topografico. Nel 1848, a seguito dei moti napoletani, si dimette trasferendosi a Firenze ad insegnare Meccanica e Artiglieria al Liceo Militare, che lascia nel 1859, alla caduta dei Lorena, per la cattedra di Algebra superiore all'Università di Pisa. In Toscana, Novi sposa Teresa Pozzolini, da cui ha due figli. La madre di Teresa, Gesualda, sorella di Vincenzo Malenchini, esponente politico e uomo d'azione del Risorgimento,³¹ aveva in Firenze uno dei salotti più noti della metà dell'Ottocento a tendenze patriottiche. Giovanni muore a Pisa il 10 dicembre 1866, dopo una malattia durata circa sei anni.³²

ENRICO BETTI

Nacque a Pistoia il 21 ottobre 1823; compiuti qui gli studi classici, si laureò in matematica nel 1846 presso l'università di Pisa, dove ebbe come maestro O.F. Mossotti. Nominato assistente in quella università, nel 1848 prese parte col battaglione universitario toscano alla battaglia di Curtatone. Nel 1849 insegnò al Liceo Forteguerri di Pistoia, nel 1854 passò al Liceo civile di Firenze; nel 1857 fu nominato professore di Algebra superiore nell'Università di Pisa; nel 1859 passò all'insegnamento di Analisi e Geometria superiore e dal 1864 successe al Mossotti sulla cattedra di Fisica matematica. Dal 1864 diresse la Scuola normale superiore di Pisa, sino alla morte avvenuta a Soiana (Pisa) l'11 agosto 1892.

Betti fu membro delle maggiori accademie italiane e straniere, eletto più volte deputato al Parlamento dal collegio di Pistoia, fu segretario generale del ministero della Pubblica istruzione dal 1874 al 1876 e senatore del Regno dal 1884.³³

³¹ Per un profilo di V. Malenchini si può consultare la voce biografica redatta da F. CONTI per il [DBI].

³² Una breve biografia di G. Novi è in [VALERIO 1993].

³³ Per una biografia più estesa di E. Betti si può consultare la voce biografica di N. VIRGOPIA pubblicata per il [DBI]. Per le sue ricerche e gli studi nel periodo coperto dalle lettere qui pubblicate, si vedano anche [MERCURIO *et al.* 2007], [PALLADINO *et al.* 2009], [BOTTAZZINI 1994].

2 – LE LETTERE

1

Firenze, 9 dicembre 1850

Egregio Sig. Betti¹

Tardy da Genova mi invia una lettera per voi, e io mi affretto a trasmettervela. Fin da due o tre giorni dopo il vostro passaggio per Firenze io voleva scrivervi per darvi una novella per avventura non priva di opportunità; ma parecchie circostanze me lo hanno impedito. In questo ho ricevuto notizia dal buono e dotto amico Tortolini di una nota sulle equazioni algebriche² che voi gli avete inviata; talché ciò che ho a dirvi giungerà forse tardi ma non mai inutilmente. Gauss nell'ultimo volume (ch'è il 4°) delle Memorie dell'Accademia di Gottinga ha pubblicata una lunga Memoria sulle eq.ni algebriche, che io non ho potuto ancora vedere perché non è arrivata a nessuna delle nostre Biblioteche. Essa è stata tirata pure a parte e si vende [a] mezzo tallero;³ il suo titolo in tedesco è "Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen".⁴

È inutile dirvi che ho letto negli Annali⁵ con gran piacere l'interessante vostro lavoro;⁶ il mio cuore ha sinceramente gioito nel vedere sorgere un nuovo e distinto ingegno che onorerà questa infelice e travagliata nostra Italia. Continuate, continuate caro Sig. Betti; il cielo secondi i vostri sforzi, e credete alle leali assicurazioni di affetto e di stima del

Vostro Amico aff.^{mo}
Giovanni Novi

¹ Si ricorda che, a questa data, Betti e Novi si sono conosciuti da appena qualche giorno.

² Probabilmente si tratta del lavoro [BETTI 1851-a].

³ Il *tallero* ("thaler" e poi, con la riforma dell'ortografia della lingua tedesca, "taler") era un'importante moneta di riferimento europeo usata in molti stati germanici e nell'Impero austro-ungarico.

⁴ [GAUSS 1850].

⁵ Gli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*.

⁶ Si tratta probabilmente di [BETTI 1850].

2

Firenze, 8 febbraio 1851

Carissimo Sig. Betti

Le feste natalizie sono scorse senza che io abbia avuto il piacere di conversare con voi, come me ne avevate dato dolce speranza. Mi auguro che un'altra volta sarò più fortunato, e potrò avere il piacere di trattenermi con voi su quei soggetti pei quali dimostrate tanta attitudine, che io coltivo un poco nei

rari momenti che mi lasciano gli studii militari.¹ La quistione che vi siete proposta è vasta e degna, ne ho fede, di tentare un nobile ingegno quale è il vostro; le spine e gli ostacoli da cui è circondata aguzzano la mente e servono d'incitamento agli animosi. Io non posso che augurarvi un felice successo, ed aspettare il frutto delle vostre indagini. Se per avventura mi accadrà di trovare qualche cosa che possa interessare i vostri studii, ve ne renderò avvertito.² Intanto per ora ho bisogno di domandarvi se conoscete qualcuno che in Toscana posseda gli *Annali di Gergonne*.³ Ho grande necessità di leggere una Memoria di Ampère inserita in quel giornale, e non so dove ritrovarla.⁴ Si trovasse per avventura alla Biblioteca dell'Università di Pisa? Vi prego di raggiuagliarmene.

Tortolini e Tardy mi incaricano di salutarvi.

Avete veduto negli *Annali*⁵ quel mio Estratto?⁶ Interessante soggetto, e, a quanto mi pare, maestrevolmente e felicemente trattato dal dotto tedesco.⁷ A proposito di ciò debbo avvertirvi che il titolo di *Memoria*, che è piaciuto a Tortolini di dargli, è assolutamente ridicolo ed erroneo; giacché di mio non v'è che una brevissima introduzione e la traduzione.

Datemi vostre novelle, mio caro Sig. Betti, e dei vostri studii, che mi saranno sempre piacevoli; servitevi di me in ciò che mi credete capace, e credete alle sincere assicurazioni di stima e di amicizia

Del Vostro Amico
G. Novi

¹ Probabilmente Novi si stava già dedicando agli studi che lo condussero alla compilazione del lavoro [NOVI 1854].

² In questo periodo, Betti si sta occupando della risoluzione delle equazioni algebriche; (cfr. [MERCURIO et al, 2007]).

³ Si tratta della rivista mensile *Annales de mathématiques pures et appliquées*, comunemente nota come *Annales de Gergonne* o *Annali di Gergonne*, pubblicata dal 1810 al 1832, a Nîmes e poi a Montpellier e diretta da Joseph-Diez Gergonne.

⁴ André-Marie Ampère scrisse vari articoli sugli *Annales de Gergonne*; essi, in ordine di tempo, sono: [AMPÈRE 1824], [AMPÈRE 1825], [AMPÈRE], [AMPÈRE 1826], [AMPÈRE 1829], [AMPÈRE 1830].

⁵ Si tratta degli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*.

⁶ Si tratta di [NOVI 1850].

⁷ Il lavoro originale di Oscar (Oskar) Xavier Schlömilch, a cui Novi si sta qui riferendo con l'appellativo di "dotto tedesco", è [SCHLÖMILCH 1849-a].

Carissimo Sig. Betti

Il Tortolini mi scrisse in data del 1° marzo che voi pel 5 vi sareste trovato in Firenze; però sembra che qualche causa vi abbia pur questa volta ritenuto.

Lo stesso Tortolini soggiunge “ditegli (a voi) che io spedii in Pisa il 1° fascicolo dei miei *Annali*² al Sig. *Felici*,³ e dippiù che oggi sono otto giorni [che] gli scrissi una lettera indirizzandogli le prove di stampa della sua Memoria;⁴ ed in questa mattina al più lungo attendeva il ritorno delle stampe, ma nulla è giunto, il che mi ritarda la pubblicazione del fascicolo [di] febb.[raio]. Dite dippiù al Sig. Prof. Betti se dell’inviatomi *Teorema*,⁵ ne vuole 100 esemplari a parte come per lo passato”. Non essendo voi venuto, vi trasmetto queste domande, acciò abbiate la gentilezza di rispondervi.

Il Tortolini mi dice pure che gli avete inviata una nuova *Nota*,⁶ suppongo che sia sul soggetto, di cui mi avete parlato nell’ultima vostra. Ben dite che la teoria delle sostituzioni è assai imperfetta ed ardua; e però un mio amico, felice cultore delle nostre scienze, mi ha mosso taluni dubbi sul vostro ultimo lavoro.⁷ Io gli ho data una rapida lettura, ma distratto momentaneamente da talune Memorie del Cauchy che studio con calore, non ho potuto fermarmi sopra. Forse in ventura vi trascriverò questi dubbii; ora vado frettolosamente, perché ho un appuntamento che mi costringe a terminare.

Avrete saputa la perdita irreparabile del sommo Jacobi, morto il 19 febb. in Berlino. Il 51 si annunzia male.

Continuate, carissimo Betti, le vostre dotte ricerche; scrivetemi e credete alle assicurazioni di amicizia e di stima

Del Vostro aff.mo
Giovanni Novi

¹ L’anno si deduce dalla lettura della stessa lettera.

² *Annali di Scienze matematiche e fisiche*.

³ Forse Riccardo Felici.

⁴ Si tratta probabilmente della memoria [BETTI 1851-a].

⁵ Quasi sicuramente è [BETTI 1851-b].

⁶ Probabilmente si tratta della prima parte, relativa alla *teoria delle sostituzioni*, del lavoro [BETTI 1852].

⁷ Si potrebbe congetturare che l’amico che esprime dubbi sul lavoro di Betti sia Guglielmo Libri; i due ebbero uno scambio epistolare riguardante i lavori di Betti nel dicembre del 1851; (cfr. [PROCISSI 1953]).

Firenze, 16 aprile 1851

Carissimo Sig. Betti

Vi sono da lungo tempo debitore di una lettera, ma dovete scusarmi perché ho avute molte preoccupazioni che mi hanno impedito di scrivervi, fra le quali la morte di un dotto professore di astronomia napoletano,¹ il più caro amico che io mi avessi.

Aspetto con piacere la pubblicazione della vostra nuova Nota,² per leggere il Teorema che avete dimostrato. Intanto vi avverto che Tardy, il quale vi saluta, ha inviata a Tortolini una Nota sulla risoluzione per radicali di talune equazioni.³ *È un'estensione*, son sue parole, *della teoria di Abel la quale conduce subito alla risoluzione delle equazioni per la divisione delle funzioni ellittiche*.

Non v'invio quelle osservazioni sul vostro ultimo lavoro,⁴ di cui vi ho tenuto parola, perché quel mio Amico non me lo ha permesso, dicendomi che avendole fatte dopo una rapida lettura e non essendoci più tornato sopra, non credeva che meritassero la pena di esservi comunicate. Del resto esse versano più sulla forma che sulla sostanza del vostro lavoro, e quindi, anche sotto questo aspetto, non è importante il parteciparvele.

Novità scientifiche di qualche importanza non ve [ne] sono: sembra che il tempo di transizione in cui viviamo e il fosco orizzonte che ci circonda distrae dalle gravi meditazioni gl'intelletti più distinti. E i vostri studi come vanno? Vi prego di tenermene sempre al corrente. Io mi occupo un poco di matematica, un poco di cose militari. Le quistioni balistiche m'interessano molto, ma sono estremamente complicate; sottoporre il moto dei nuovi proietti alle leggi della meccanica dev'essere un problema difficilissimo.⁵ Mi è arrivato un lavoro di Otto⁶ in tedesco sulla influenza della rotazione dei proietti sulla traiettoria che percorrono, di grande importanza: fa cenno di molti altri lavori tedeschi sullo stesso soggetto e sottopone ad una dotta analisi critica le idee di Poisson svolte nei fascicoli 26 e 27 del Giornale della Scuola Politecnica.⁷

Addio, mio carissimo Sig. Betti; state sano, scrivetemi e credete alle assicurazioni di amicizia sentita e di stima profonda

Del Vostro Amico
G. Novi

¹ Fedele Amante, scomparso il 17 marzo 1851.

² Si tratta di [BETTI 1852].

³ Il lavoro è [TARDY 1851]; fu stampato, ancora a Roma e nello stesso anno, in un opuscolo a parte per la Tipografia delle Belle Arti.

⁴ Probabilmente il riferimento è al lavoro [BETTI 1851-a].

⁵ Probabilmente sono questi gli studi che lo condurranno alla realizzazione del lavoro [NOVI 1854].

⁶ Dal lavoro [NOVI 1854], si deduce che il riferimento è a [OTTO 1844]; in una nota nel suo lavoro appena menzionato, Novi scrive: "Poisson non è stato il primo ad occuparsi di questo problema balistico, poiché molti lo avevano preceduto, ma fu il primo a guardarlo in tutta la sua generalità e a trattarlo analiticamente con quell'ampiezza di vedute che formavano uno dei principali distintivi del dotto geometra di Pithiviers. Molte notizie possono trovarsi sulla serie dei tentativi fatti sinoggi per risolvere questa quistione nel prezioso, comechè poco noto opuscolo *Ueber die Umdrehung des Artillerie-Geschosse von Otto*. Il capitano Otto oppugna le conclusioni teoriche della Memoria di Poisson".

⁷ Si tratta della rivista scientifica *Journal de l'École Polytechnique* di Parigi, fondata nel 1794. Il riferimento qui è ai lavori [POISSON 1838-a], [POISSON 1838-b], [POISSON 1839].

5

Firenze, 2 giugno [1851]¹

Carissimo Sig.^r Betti

Da parecchi giorni doveva rispondere alla vostra del 18 p. m., ma una strana fatalità me lo ha impedito. Voleva annunziarvi che mi è pervenuta la Memoria di Gauss sull'equazioni algebriche,² e che è a vostra disposizione. Io, distratto ora dagli studii di Meccanica nei quali sono immerso, non ho potuto darvi che una rapida scorsa; essa volge sopra due oggetti, 1° sul principio fondamentale della Teoria delle eq.ⁿⁱ algebriche, cioè sulla decomposizione in fattori, del quale egli dà una nuova dimostrazione; 2° sull'equazione a tre termini, della forma $x^{m+n} \pm ex^m \pm f = 0$, in cui m , n , e , f indicano quantità positive e date, e sopra vari metodi per determinare facilmente le radici reali ed immaginarie di simili eq.ⁿⁱ. Prima che questo lavoro del Nestore dei grandi matematici presenti mi arrivasse io pensava o di tradurlo ovvero di darne notizia negli Annali di Tortolini;³ ma a dir vero credeva che volgesse sopra soggetti per così dire più palpitanti; ora ho cangiato pensiero, tuttoché Tortolini mi abbia scritto incitandomi a questa traduzione.⁴ Io trovo utilissimi questi cenni e queste traduzioni perché in Italia pochissimi conoscono il tedesco, ma siccome ho in animo di restringere sempre più il campo dei miei studii riducendoli a preferenza alla Meccanica e sue applicazioni, così voglio evitare per quanto è possibile ogni divergenza.

Sono lieto di sapere che vi siete deciso a trattare il problema che vi occupa in tutta la sua generalità, e che vi trovate già molto innanzi nella sua soluzione.

Vi assicuro, mio carissimo Betti, che i vostri rapidi progressi mi cagionano un indicibile contento; per voi in prima, e poscia per questo nostro infelice paese, che povero presentemente di altre glorie, è a desiderare ardentemente che non le venga meno questa ultima [gloria] superstite di patria prediletta degli agili e vivaci intelletti. Le vostre osservazioni sulla teoria delle sostituzioni sono giudiziosissime, e vi si dovrà saper grado di averla semplificata: *semplificare*, è uno dei problemi più importanti per tutte le scienze in generale e particolarmente per la nostra. Ora vi sono molti matematici di grido che fanno paura come scrivono; Dio mio! scrivono per se stessi e per niun'altro. Oh! Eulero dove sei con la meravigliosa chiarezza della tua esposizione? e pure eri tanto grande!

Ho per voi una copia di quella Nota di Tardy⁵ di cui vi parlai, e che egli da Genova m'invia, pregandomi di accompagnarvela coi suoi più affettuosi saluti. Leggerò con molto piacere i lavori di Mossotti di cui mi date notizia. Sapete quando finirà di stampare la sua Meccanica?⁶ Mi pare proceda con molta lentezza. È un bellissimo lavoro. Io però sono scontento di non potere trovare un'opera che faccia perfettamente al mio caso. Io, per dirlo in una parola, avrei bisogno di Venturoli⁷ rinnovato alle fondamenta. Chi si occuperà di ciò?⁸

Amatemi mio caro amico, scrivetemi presto e lungamente, e credete all'affetto e alla stima del vostro Amico

G. Novi.

P. S. Fatemi sapere per quale mezzo debba inviarvi quella Nota di Tardy, e la Memoria di Gauss se la volete.

¹ Il confronto tra il contenuto della presente lettera con quello della successiva, considerati, in particolare, i riferimenti alla memoria di Gauss e alla nota di Tardy, permette di affermare che l'anno di compilazione sia proprio il 1851.

² La memoria è [GAUSS 1850].

³ *Annali di Scienze matematiche e fisiche*.

⁴ Dalla consultazione degli *Indici generali* degli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, non risulta pubblicata alcuna traduzione, da parte di Novi, del lavoro di Gauss a cui si fa riferimento.

⁵ La nota di Tardy è [TARDY 1851].

⁶ Dovrebbe essere il volume *Lezioni di Meccanica razionale* del 1851.

⁷ L'opera più celebre di Giuseppe Venturoli è il trattato [VENTUROLI 1806], di cui furono pubblicate poi varie edizioni.

⁸ Nel 1860 Novi scriverà l'articolo [NOVI 1860] introducendolo con le parole: "Gli Elementi di Meccanica del Venturoli, che per molto tempo sono stati adottati quasi esclusivamente nelle scuole italiane, per unanime consenso di tutti coloro che coltivano queste dottrine non potevano più utilmente essere adoperati nell'insegnamento. Quindi i nuovi trattati, che han dato occasione al presente articolo, saranno accolti con generale soddisfazione, come quelli che adempiendo a un desiderio di molti anni, meglio rispondono ai bisogni attuali della scolaresca e allo stato presente della scienza".

Carissimo Sig. Betti

Ieri vi ho inviato pel Procaccia Carmagnini la Memoria di Gauss¹ e la Nota di Tardy.²

Avete vedute nei Comptes rendus le importanti ricerche di Hermite intorno la solubilità delle equazioni fondate sopra i bellissimi lavori di Puiseux?³ Io vi ho appena gittato uno sguardo; esse entrano nel campo dei vostri studii presenti, e perciò debbono interessarvi estremamente. Vi prego di dirmene qualche cosa.

Il mezzo che io adopero per farmi venire i libri tedeschi è semplicissimo; perché me li fo venire o per Piatti o per Molini. Dal primo ho ricevuto due memorie di balistica; dal secondo la Memoria di Gauss, quella di Stern,⁴ Minding Tavole integrali,⁵ Schlömilch Teoria delle Diff. e Somme, e Nuovo metodo per sommare le serie.⁶

Mi rallegro che i vostri studii continuano bene; e vi prego di tenermene informato.

Scrivetemi e credetemi

Tutto Vostro

Giovanni Novi

P. S. È uscita una nuova opera “Compléments d’analyse et de mécanique”
par Vieille.⁷

¹ La memoria è [GAUSS 1850].

² La nota è [TARDY 1851].

³ Le ricerche di Hermite, fondate su lavori di Victor Alexandre Puiseux, sono inserite nell’articolo [HERMITE 1851].

⁴ Potrebbe trattarsi forse di [STERN 1841-a] o [STERN 1841-b].

⁵ Quasi sicuramente il lavoro di E.F.A. Minding qui menzionato è [MINDING 1849].

⁶ Si tratta dei lavori [SCHLÖMILCH 1848] e [SCHLÖMILCH 1849-b].

⁷ Il riferimento è all’opera [VIEILLE 1851].

7

Firenze, 11 novembre [18]51

Carissimo Betti

Vi scrivo rapidamente poche parole.

La Memoria di Hamilton¹ di cui avete veduto il titolo in quel Catalogo mio si trova nelle Memorie dell’Accademia di Dublino.² Tardy, che vi saluta affettuosamente ed attende con avidità il vostro lavoro, mi diceva che però la Memoria del Geometra Inglese³ è più una dilucidazione del lavoro di Abel⁴ che altro.

Mi auguro che voi godiate perfetta salute. Vi prego di darmi novelle dei vostri studii e credere all’affetto sincero

del Vostro Amicissimo

Giovanni Novi

[P. S.] Il Terquem ha pubblicato nei suoi Annali⁵ la risoluzione delle eq.^m trinomie di Gauss.⁶

È annunziato sous presse un Trattato di Aritmetica di Serret.⁷ Dovrà essere un buon lavoro. Avete veduta la sua trigonometria?⁸ È eccellente.

¹ Quasi certamente la memoria è [HAMILTON 1839].

² Si tratta della *Royal Irish Academy* di Dublino, fondata nel 1785.

³ Il riferimento è a Hamilton e alla sua memoria citata qui in nt. 1.

⁴ In base a quanto ipotizzato nella nt. 1, si tratterebbe del noto lavoro [ABEL 1824].

⁵ Si tratta della rivista *Nouvelles Annales de Mathématiques* fondata nel 1842 da Orly Terquem e Camille Christophe Gerono.

⁶ Il riferimento è al lavoro di Terquem [TERQUEM 1851], in cui egli presenta un metodo per la risoluzione delle equazioni trinomie di Gauss trattate nella memoria [GAUSS 1850].

⁷ Il lavoro qui menzionato è [SERRET 1852].

⁸ Il riferimento è a [SERRET 1851].

8

Firenze, 31 dicembre [18]51

Carissimo Betti

Ho tardato lungamente a scrivervi perché sperava di potere trovare qualche cosa che vi giovasse per la quistione di cui oggi vi occupate; ma ogni mia ricerca è tornata vana. Spero intanto che voi siate innanzi nei vostri studii e che ci vorrete presto regalare qualche bel lavoro. Libri ha scritto da Londra a Tardy che la vostra dimostrazione del teorema di Gallois [*sic*] non lo ha perfettamente persuaso; io intanto ve lo dico, perché vado certo che la vostra Memoria,¹ che sarà per uscire, toglierà ogni dubbio sul sospetto. Libri dice di essere giunto a trovare varii teoremi non privi di importanza sulle funzioni periodiche in generale. Nell'ultimo fascicolo di Crelle² vi è una breve notizia di Dirichlet sugli scritti rimasti da Jacobi; annunzia che al più presto saranno pubblicate le sue lezioni sulla Meccanica e sue varie altre parti di matematica, raccolte da vari suoi distinti allievi.³ Avete mai veduti i lavori dell'inglese Sylvester sull'eliminazione pubblicati in gran parte nel Phil.[osophical] Magazine?⁴ Credo che siano lavori molto interessanti e per chi si occupa di questi soggetti degni di essere studiati. Non vi par' egli che l'eliminazione sia una delle operazioni più laboriosa dell'Algebra? Mi dicevano che Mainardi si occupasse di questo soggetto, ma poi non ho saputo altro.⁵ Conoscete una Memoria premiata di Amici sulle *Volte*?⁶ Non mi vien fatto trovarla, ed occupandomi ora di questa materia, vorrei vedere che cosa dice il *pingue* professore sul difficile argomento.

Vi auguro il nuovo anno lietissimo, e pregandovi di ricordarvi di me e di scrivermi mi dico

Tutto Vostro
Giovanni Novi

¹ Si tratta di [BETTI 1852].

² Trattasi del *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.

³ La “breve notizia di Dirichlet sugli scritti rimasti da Jacobi” e “l’annuncio” qui menzionato si trovano in [DIRICHLET 1851].

⁴ Intorno all’argomento dell’eliminazione, sulla rivista *Philosophical Magazine* (fondata nel 1798 da Richard Taylor –1781-1858–) risultano pubblicati vari lavori di James Joseph Sylvester, tra cui [SYLVESTER 1842] e [SYLVESTER 1851].

⁵ Sull’argomento, vi è la memoria [MAINARDI 1850].

⁶ La memoria menzionata è [AMICI 1833].

9

[Firenze, aprile 1852]¹

Mio carissimo Betti

Da gran tempo io desiderava scrivervi per aver nuova dei vostri studii e per conversare un poco con un amico, di cui ho tanto in pregio l’animo gentile e il nobile ingegno. Ma *Mossotti* ha giurato di non darmi opere per quest’anno; la lentezza veramente straordinaria con cui procede la pubblicazione del suo *Corso di Meccanica*² e la maniera con cui ha condotte molte teoriche (maniera bella, considerata da un certo punto di vista, ma complicata e che non fa ai miei bisogni) mi hanno obbligato a scrivere tutto o pressoché tutto. Voi comprendete benissimo che specie di supplizio è questo di scrivere la sera per la mattina e senza respiro: aggiungete che per utilizzare l’ingegno e la volontà dei miei due allievi, ho voluto dar loro un sentore dei lavori importantissimi di Hamilton, di Jacobi, e ciò mi ha dato non lieve occupazione, avendo dovuta accompagnarla con quelle teoriche d’analisi che ad essi mancavano per l’intelligenza di quei lavori. Questo e la mia mal ferma salute non solo non mi hanno permesso di scrivervi ma mi tolgono pure il modo di leggere ora quella parte della vostra Memoria³ che è venuta fuori nel fascicolo di Febbrajo di *Tortolini*. È un grosso lavoro il vostro, mio caro Betti, e la difficoltà naturale all’argomento rende necessario di studiarlo attentamente. Di che vi occupate adesso? Continuate sempre nello stesso soggetto? Avete ricevuto nuova lettera da *Libri*? Io, come avete potuto inferire da ciò che ho detto di sopra sono tutto nelle cose di Meccanica. Ho commesso in Germania una memoria di Richelot sul moto di rotazione,⁴ uscito recentemente, credo debba essere molto interessante, perché dopo il lavoro di Poinso⁵, mirabile di eleganza e di chiarezza, bisogna fare qualche cosa di nuovo per scrivere su questo soggetto.

Tortolini va a passo di lumaca col suo Giornale;⁶ siamo alla metà di aprile e il fascicolo di marzo non è ancora venuto fuori! Perché ha tanto ritardato quello di Febbrajo, ove è il vostro lavoro?

Avete ricevuta l’opera di *Jacobi* (Werke, tm 1),⁷ che commettete a Piatti? Quali lavori dell’Illustre Alemanno contiene?

Come vi porta la solitudine di Pistoja? Quella intellettuale di Firenze è punto minore. È incredibile l’inerzia che opprime gl’ingegni in questa vaga

regione dell'Arno, ed è fatale la sua influenza. Io non sono di coloro che pongono l'*inerzia* fra le *forze*, ma quando veggo la beata indifferenza di tutti e la inespugnabile resistenza che oppongono a qualunque conato di progresso e di moto, sarei quasi tentato di mutare opinione. Senonché le due inerzie sono diversissime e mentre l'una esprime impotenza e però è negazione di forza, l'altra consistendo nel non *volere* agire, arguisce uno sforzo di volontà che può dirsi forza.

Quanto mi sarebbe utile la vostra vicinanza! Come ripopolerei questo vuoto fatale!

Tardy vi saluta affettuosamente.

Io con la speranza di ricevere presto vostre nuove, mi dico

Vostro Amico aff.mo

G. Novi

¹ Quasi sicuramente l'anno è il 1852 in quanto nella lettera si menziona un "grosso" lavoro di Betti, di cui una parte pubblicata nel "fascicolo di febbraio degli *Annali di Tortolini*". Si ricorda che proprio tra febbraio e marzo del 1852 vengono stampate le due parti che costituiscono l'importante memoria [BETTI 1852].

² Cfr. nt. 6, lett. 5.

³ Il riferimento è alla citata memoria [BETTI 1852].

⁴ La memoria potrebbe essere [RICHELOT 1852].

⁵ Probabilmente Novi si riferisce a [POINSOT 1834].

⁶ *Annali di Scienze matematiche e fisiche*.

⁷ Quasi sicuramente il riferimento è al primo tomo degli *Opuscula mathematica* (2 tomi, 1846-1857) di Jacobi.

10

Firenze, 16 maggio [18]52

Carissimo Betti

Rispondo alla vostra gentilissima del 5.

Io non ho *pronta* occasione per inviare le due copie della vostra Memoria¹ a Tardy, ma di tanto in tanto mi si presentano per la partenza di qualche amico per Genova; quindi se voi non avete premura, io m'incaricherò con piacere di quest'invio. Tardy attende da voi però un più grande favore; io vi trasmetto la sua preghiera e il suo desiderio e voi vedrete se le vostre occupazioni vi permettono di esaudirla.

Tardy ha un grande desiderio di conoscervi personalmente, come lo provano tutti coloro che alla cognizione dei vostri pregevoli lavori congiungono una qualche idea di tutto ciò che contiene il vostro animo di gentilezza e di modestia. Egli passa per Livorno nell'agosto e sul termine di ottobre; e vi si trattiene poche ore corrispondenti alla fermata del Vapore che lo conduce in Messina e lo riconduce a Genova; io vado immancabilmente a

vederlo ed abbracciarlo. *Potresti*, mi dice egli in una delle sue ultime, *indurre il Betti a venire teco al mio primo o al mio secondo passaggio per Livorno? tentalo*. Io unisco alla sua la mia preghiera, e mi auguro che potrò avere il piacere di godervi una intera giornata.²

Il volume di Jacobi³ vi venne dato in dono dal Principe Buoncompagni⁴ ovvero in Roma ve ne sono delle copie che si vendono?

Ho letto l'articolo di Merimée sopra il povero Libri; ma mi dispiace che in un'aggiunta, che si trova nel fascicolo seguente della Rivista francese, abbia dovuto ritirare talune asserzioni troppo precipitosamente avanzate.⁵ Dare un comeché piccolo appiglio agli oppositori è fallo grave. Del resto, caro Betti, vi confesso che l'affare di Libri è imbrogliatissimo; perché non solo i tribunali francesi lo accusano ma moltissimi e non francesi. Anche prima che il processo di Parigi facesse risuonare fragorosamente per tutta l'Europa la brutta accusa, essa era bassamente mormorata da molti. Ora io non so comprendere, a meno che egli non sia di quegli uomini che provano gusto e voluttà a crearsi dei nemici dappertutto [*sic*], non so comprendere, ripeto, come lui *interamente* innocente, abbia potuto esser fatto segno ad un'accusa sì terribilmente formulata in Italia e in Francia. Vi giuro che io, per onore dell'Italia, vorrei veder chiaro nell'innocenza del nostro illustre concittadino; ma vi confesso che sinora sono molto lontano dall'esser sicuro della sua moralità. Basta, speriamo che il tempo diraderà le nebbie e che egli possa trionfalmente purgarsi da ogni taccia.

Rivedendo o scrivendo al D.^r Felici vi prego di porgergli i miei complimenti.

Seguitate a darmi nuove dei vostri studij, ai quali io prendo sempre il più vivo interesse e credetemi

Vostro, per la vita
Giovanni Novi

¹ Si tratta della memoria [BETTI 1852].

² Scrive il 22 maggio 1852, Betti a Tardy: "Pochi giorni sono, fui a Firenze e vidi il comune amico Prof. Novi, il quale mi disse che Ella avrebbe desiderato che anch'io fossi venuto a trovarla in Livorno, in uno di quei giorni di agosto o di ottobre nei quali Ella passerà per quella città. Ho inteso con moltissimo piacere questa proposta, perché ho moltissimo desiderio di conoscerla personalmente, e però se mi sarà possibile verrò nell'agosto, ma non posso prometterlo perché potrei essere impedito dalle mie lezioni che durano fino a settembre; altrimenti verrò certamente nell'ottobre". Evidentemente il programma si realizza, Betti e Tardy si conoscono proprio ad ottobre; scrive Tardy a Betti il 4 novembre del 1852: "Io non so dirvi quanto piacere mi abbia recato fare la personale conoscenza di un giovane che io ammirava per le stupende doti dell'ingegno, e che ora amo ancora per le squisite e gentili maniere. Spero che la nostra amicizia non sarà di quelle effimere relazioni che si fanno fuggendo nella vita: io rammenterò sempre quelle ore passate con voi in Livorno e voi vogliatemi un po' del vostro bene ed accettate il mio affetto". (Cfr. [CERRONI *et al.* 2010]).

³ Il riferimento, qui, è al primo volume degli *Opuscula mathematica* di Jacobi, cit. in nt. 7, lett. 9.

⁴ Baldassarre Boncompagni.

⁵ Novi si sta riferendo alla difesa espressa da Prosper Mérimée nei confronti dell'amico Guglielmo Libri mediante alcuni articoli (lettere al direttore della *Revue des Deux Mondes*), a causa dei quali venne accusato di oltraggio verso funzionari dell'ordine giudiziario (*délit d'outrage public envers des fonctionnaires de l'ordre judiciaire à raison de leurs fonctions*) e condannato, nel 1852, a 15 giorni di reclusione e ad un'ammenda. Tutta la questione a cui accenna Novi si può dettagliatamente seguire scorrendo le *lettres* di Mérimée (e la *Réponse de la justice*) presenti sulla rivista *Revue des Deux Mondes*, t. 14 (1852), anch'essa condannata (nella figura del suo *gérant* V. de Mars) ad un'ammenda per aver pubblicato tali articoli. L'insieme degli scritti (con il titolo di *Le Procès de M. Libri*) è costituito da una lunga *Lettre de M. Prosper Mérimée à m. le Directeur de la Revue des Deux Mondes*, scritta in data 7 avril 1852 e pubblicata nel fascicolo della *Revue* del successivo 15 avril; da una *Réponse de la justice* (a firma Lud. Lalanne, H. Border, F. Bourquelot) del 25 avril 1852; da una seconda lettera di Mérimée (contenente *quelques rectifications* alla lettera precedente) diretta a V. de Mars, del 29 avril 1852; di un'altra lettera, dello stesso tono della precedente e con la stessa data, diretta ancora da Mérimée a Lalanne, Border e Bourquelot; dalla sentenza di condanna.

11

Firenze, 14 giugno [18]52

Carissimo Betti

Vi sono da lungo tempo debitore di una lettera, ed ora sono tutto vergognoso di dovervi dire che il mio ritardo (del resto non tutto volontario) mi ha posto nell'impossibilità di darvi le notizie che desideravate. Poiché mentre io posticipava di giorno in giorno la mia andata alla *Palatina*,¹ questa Biblioteca ha sentito il bisogno, dicono, di abbellirsi alcun poco, e per conseguenza ha chiuse le sue porte e mandati alla malora i suoi, a dir vero pochissimi, ma pur molesti frequentatori. Il fatto sta che la povera Biblioteca porta la pena di tutto, come suole sempre avvenire in questo brutto mondo; ma il vero è che l'egregio Direttore vuole fare un viaggetto in Napoli colla sua dolcissima *metà* per farle respirare le aure balsamiche e voluttuose della vaga Partenope, e però ha col suo sottile ingegno, trovato il ripiego di *fermare* la Biblioteca, quasi dicendo *non io, non altri*. Quindi, mio buon Betti, vedete bene che io, per le aure che deve respirare la Sig. Antonietta, non posso dirvi nulla di preciso di Sylvester; credo solamente che i suoi più importanti lavori si trovano negli ultimi Volumi del *Phi. Mag.*,² in guisa che il campo delle ricerche non è vasto né difficile a percorrere.

Avete mai veduto nulla dell'estensione che vari analisti inglesi e specialmente il *Boole* hanno dato al così detto *Calcolo delle Operazioni*?³ Vi è una gran quantità di lavori inglesi che non si possono leggere se non si ha piena contezza di questi metodi, i quali sono pure difficili e richiedono forte meditazione e molto esercizio.

Ho ricevuto da Tortolini i due volumi delle Opere di Jacobi e sono rimasto meravigliato che in esse non vi siano le sue *Memorie sui Determinanti*, che pur cita ad ogni passo: sapreste voi indovinarne la ragione?

Datemi nuove dei vostri studii, mio carissimo Betti, ed amate

Il Vostro Amico aff.^{mo}

G. Novi

P. S. Il *Peri* vi saluta e dice avere ricevuto il libro.

¹ Trattasi della *Biblioteca Palatina* di Firenze, fondata da Ferdinando III di Lorena (1769-1824), poi confluita nell'attuale *Biblioteca Nazionale Centrale* di Firenze.

² Si tratta della rivista *Philosophical Magazine*.

³ Quasi certamente, Novi intende riferirsi a quanto espresso nel lungo articolo di George Boole, apparso nella rivista *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* (vol. 134, 1844, pp. 225-282), dal titolo *On a General Method of Analysis*, dove, nella parte iniziale, si danno significative informazioni: "Much attention has of late been paid to a method in analysis known as the calculus of operations, or as the method of the separation of symbols. Mr. Gregory, in his Examples of the Differential and Integral Calculus, and in various papers published in the Cambridge Mathematical Journal, vols. i. and ii., has both clearly stated the principles on which the method is founded, and shown its utility by many ingenious and valuable applications. The names of M. Servois (*Annales des Mathématiques*, vol. V. p. 93), Mr. R. Murphy (*Philosophical Transactions* for 1837), Professor De Morgan, &c. should also be noticed in connection with the history of this branch of analysis. As I shall assume for granted the principles of the method, and shall have occasion to refer to various theorems established by their aid, it may be proper to make some general remarks on the subject by way of introduction.

Mr. Gregory lays down the fundamental principle of the method in these words: «There are a number of theorems in ordinary algebra, which, though apparently proved to be true only for symbols representing numbers, admit of a much more extended application. Such theorems depend only on the laws of combination to which the symbols are subject, and are therefore true for all symbols, whatever their nature may be, which are subject to the same laws of combination» [...]"

12

Firenze, 23 luglio [18]52

Carissimo Amico

Da lungo tempo non ricevo vostre lettere, e qualche notizia di voi mi è (cosa singolare!) venuta da Genova.

Da quinci ho saputo che presentemente vi occupate degl'*iperdeterminanti*, e suppongo che abbiate letti i lavori di Cayley¹ su questo soggetto. Il 30 di questo mese vado a Pisa ed il 31 passo a Livorno ove mi trattengo sino al 1° Agosto, nei quali due giorni Tardy sarà con me. Se voi potete venire, ditemi come volete fare: se ci vedremo a Pisa ovvero a Livorno.

La Biblioteca *Palatina* si è riaperta; quindi tutto l'*échafaudage* delle mie ipotesi cade da sé.

In Firenze ci distruggiamo lentamente; un calore soffocante ci opprime; comincio quasi a credere che siamo minacciati da qualche vulcano nascosto.

Se venite a Pisa faremo una visita al Dott. Felici, che mi mandò una sua Memoria di Fisica matematica;² comecché pel prof. Ferrucci³ io gli facessi pervenire i miei ringraziamenti, pure vorrei ripeterglieli a viva voce. Io non ho potuto mantenere la mia promessa di venire a Pistoja perché l'amico col quale dovevo fare questa gita, si ammalò gravemente, ed invece ho dovuto accompagnarlo a Pisa, dove sembra che vada gradualmente migliorando.

Spero che vorrete rompere il vostro silenzio e credere nella stima dell'affetto sincero

Del Vostro Amico

G. Novi

¹ Intorno a questo argomento, Arthur Cayley pubblicò il lavoro [CAYLEY 1846-b] che rappresenta, sostanzialmente, la traduzione di due sue memorie: [CAYLEY 1845] e [CAYLEY 1846-a]. Queste ultime sono inserite in *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley* (Cambridge, University Press, 14 voll., 1889-1897), vol. I, rispettivamente alle pp. 80-94 e 95-112. Ancora ad opera di Cayley, e sullo stesso soggetto, risultano pubblicate poi le note: [CAYLEY 1847] e [CAYLEY 1851]. Entrambi questi scritti sono contenuti in *The Collected Mathematical papers of Arthur Cayley*, vol. I, rispettivamente alle pp. 352-355 e 577-579.

² Si potrebbe trattare di una delle seguenti memorie di Riccardo Felici inserite nel tomo II (1851) degli *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche*: 1) *Saggio di una spiegazione dei fenomeni dell'induzione elettrodinamica* (p. 65 e segg.); 2) *Saggio teorico-sperimentale sulla legge secondo cui varia l'azione inducente di un circuito voltaico* (p. 361 e segg.); 3) *Nota sulla teorica dei fenomeni d'induzione elettro-dinamica* (p. 503 e segg.).

³ Forse Michele Ferrucci.

13

Firenze, 18 agosto [18]52

Carissimo Betti

Rispondo alquanto tardi alla vostra dell'11, poiché ho avuto varie occupazioni, fra le quali l'assistenza di un infermo mio amico. Però immediatamente v'inviò il 1° Volume del G.[iornale] di Thomson,¹ che spero riceveste esattamente col vostro Procaccia. Col vostro magnifico ingegno le più grandi difficoltà si spianano, quindi io non mi sorprendo che voi abbiate potuto intendere i lavori del Boole senza averne fatta precedere la lettura da quello dello stesso autore che si trova nelle *Tran.* di Londra.²

Questi lavori inglesi³ sono assai poco conosciuti ed è male. Perché voi che ora ve li siete resi familiari non ne date un succoso cenno nel G.[iornale] di Tortolini?⁴ Farestes opera utilissima e che ad uno come voi costerebbe lieve fatica: esaudirete voi questo umile desiderio del vostro Amico? Prevedevo già che avreste trovata miniera feconda negli scritti inglesi e tutto mi faceva presagire che la teoria delle equazioni algebriche riceverebbe nuova luce da

quelle dottrine. Ah se potessi passare un mese con voi! Con quella bontà che è compagna inseparabile dei forti ingegni voi mi porreste a giorno degli ardui vostri studij, e un mese con voi mi gioverebbe assai più che sei mesi della mia noiosa solitudine. Io, mio carissimo Betti, ho la grandissima sventura di essere circondato da una gente buonissima ma che al di là degli elementi ignora ogni cosa. Oltre Francoeur, Bourdon, Fourcy e Corridi costoro non sanno ove sia la scienza; anzi la deridono gridandola inutile; come ho dovuto sentirmi dire all'Esame dei miei Allievi.⁵ Poveretti! essi erano confusi perché il linguaggio di quei bravi e valorosi giovani era ebraico per essi e li pungeva vergogna!

Perdonate mio buono e nobile Amico l'amarezza del mio linguaggio; ma si ha dei momenti in cui tutto il mio sangue vesuviano mi si rimescola nelle vene al vedere la pingue contentezza e la presuntuosa ignoranza di taluni. Basta, parliamo d'altro. Desidererei che mi faceste conoscere con precisione dove io potrei trovare scritti concernenti le coordinate ellittiche. Ove sarebbe a trovare la soluzione della quistione "trovare i valori interi e positivi che soddisfano all'ineguaglianza $x + y + z + \dots > 0$?"⁶ La vostra presenza all'esame mi avrebbe fatto immenso piacere, voi essendo fra quei pochissimi che possono apprezzare le mie fatiche e compiacersi dei miei giovani.

Scrivetemi presto e lungam.[ente] e credetemi

G. Novi

¹ Si tratta della rivista *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, della quale fu direttore, dal 1846 al 1854, il fisico William Thomson.

² Novi rimanda al lavoro di Boole *On a General Method of Analysis*, cit. in nt. 3, lett. 11.

³ Probabilmente Novi si riferisce ai lavori prodotti dagli autori menzionati nel brano riportato in nt. 3, lett. 11.

⁴ Scorrendo l'*Indice Generale* del *Giornale di Tortolini*, non appare alcun articolo che lasci intendere che Betti abbia dato seguito all'esortazione di Novi.

⁵ Si ricorda che Novi era professore di Meccanica e Artiglieria presso il Liceo militare di Firenze.

⁶ Come dichiarerà egli stesso nella lettera successiva, Novi è incorso in una svista nell'esprimere l'enunciato della questione.

Carissimo Betti

Ieri sera distratto vi feci una domanda che non aveva senso comune; la quistione sulla quale vi interrogo è di trovare i valori positivi che verificano l'ineguaglianza $x + y + z + \dots < 1$.¹ Questa è una quistione che si presenta nella ricerca dei limiti di taluni integrali definiti. Il Bertrand nella sua *Algebra*² parla delle ineguaglianze del 1° grado ad una incognita e di quelle del 2° grado, ma non va più oltre.

Io desidererei sapere ove è a trovare la soluzione generale della quistione, qualunque sia il numero delle variabili.

Vi prego di scusare l'incomodo e la mia bestialità che n'è cagione

Tutto Vostro

G. Novi

¹ Oggi la questione posta da Novi sarebbe inquadrata nella geometria degli spazi n -dimensionali che di lì a poco Riemann avrebbe introdotto.

² Si tratta di [BERTRAND 1850]. Betti curò la traduzione di quest'opera che venne pubblicata come [BETTI 1856].

15

Firenze, 11 ottobre [18]52

Mio carissimo Betti

In una raccolta inglese di problemi, trovo il seguente: Vi è una borsa che contiene tre monete che possono essere o di 5 o di 10 o di 20 lire; se ne estrae una per tre volte dalla borsa e esce sempre una di cinque; si domanda la somma probabile del denaro contenuta nella borsa. La soluzione data dall'Autore inglese non mi persuade, ma non so vedere ove sia lo scoglio. Vorreste farmi il piacere di sospendere un istante i vostri studj e di risolvermi voi il problema? Ve ne sarei gratissimo.

Il Tortolini poi non è passato per Pistoja e credo che a quest'ora sia in Modena. Di Tardy non ricevo notizie da qualche tempo; aspetto che mi dica il giorno del suo passaggio per Livorno per tenervene avvisato.

In Firenze quelli che godono l'Ottobre, fra i quali io non sono, hanno ragione di rallegrarsi, perché, eccettuata qualche rara giornata, nel resto pare che siamo minacciati da un completo diluvio, malgrado che, a quanto dicono, Iddio promettesse che non userebbe più nell'avvenire questi mezzi estremi. E in Pistoja come ve la passate? Fate sempre le vostre piccole corse in campagna? I vostri studj a che stanno? Avete veduta la Memoria postuma d'Idraulica del povero Piola?¹ Si è riaperto il Concorso pel posto Albizzi,² credo pel 10 Novembre. Vi assicuro che se fossi nelle vostre condizioni non dubiterei pure un istante a concorrere. Tutto dovrebbe sospingervi a questo passo, e la ragione della vostra presente posizione non è, a dir vero, ragione ma una lieve obbiezione che sparisce a prima vista.

Voi, vedete, con l'ingegno che la Natura in larga copia vi ha dato, coi forti studj che già possedete, vi potreste non difficilmente ottenere una buona posizione in Parigi stesso. Non vi par egli cosa invidiabilissima? E quand'anche ciò non fosse per accadere, chi può togliervi una Cattedra a Pisa al vostro ritorno?³ Betti mio per amore della vostra gloria e del *vero* vostro avvenire vincete le piccole ripugnanze e le piccole obbiezioni che sogliono

inceptione i moti dei più felici ingegni; andate a Parigi... Oh come invidio la vostra posizione!!

Rispondetemi, caro Betti, il più presto che vi riesce possibile, con la soluzione di quel problemetto

Amatemi
Giovanni Novi

¹ Potrebbe trattarsi della memoria [PIOLA 1852].

² Si trattava di un concorso per un posto di perfezionamento all'estero della fondazione Albizzi che avrebbe potuto portare Betti a Parigi, come induce a pensare anche la lettera posta al n° 18.

³ Si ricorda che Enrico Betti fu inizialmente professore di Matematica presso il Liceo Forteguerri di Pistoia e poi, dal 1854, presso quello Civile di Firenze. Nel 1857 ottenne la cattedra di Algebra superiore all'Università di Pisa. Passò, nell'anno 1859, all'Analisi e Geometria superiore e, nel 1863, dopo la morte di Mossotti, alla cattedra di Fisica matematica, che tenne fino al termine della sua vita. Nel 1870 lasciò l'insegnamento dell'Analisi e Geometria superiore (che aveva conservato per incarico) per sostituirvi quello della Meccanica celeste, che assunse a seguito della morte del professore Giovanni Maria Lavagna.

16

Firenze, 20 ottobre [18]52

Carissimo Betti¹

Ti scrivo poche parole per avvertirti che il 26 prossimo Tardy passa per Livorno. Tu per andare a Pisa devi passare per Firenze; verrai da me; io ti darò dei libri e una lettera per un mio Amico di Pisa, il quale sa ove deve trovare Placido,² e però lo vedrete insieme. Del resto quando verrai a Firenze parleremo più distesamente. Se per avventura avessi mutato parere scrivimelo con la rapidità del fulmine, perché potessi avere tempo a cercare un'altra occasione per inviare i libri a Placido.

À tantôt³
Il tuo Novi

¹ Per la prima volta, in questa lettera Novi si rivolge a Betti con toni più confidenziali, passando dal pronome allocutivo "voi" al "tu".

² Placido Tardy.

³ Espressione francese che va intesa come "a presto", adoperata probabilmente da Novi di proposito per invogliare Betti a partecipare al concorso per ottenere il posto di perfezionamento a Parigi; (cfr. lettera precedente).

17

Firenze, 23 ottobre [18]52

Carissimo Betti

T'invio una lettera pel mio Amico di Pisa che è indispensabile tu conosca per vedere Tardy a Livorno. Vai a vederlo domani stesso a scanso d'equivoco. È giovane di squisita bontà e gentilezza d'animo, di molta cultura e di felice ingegno. Era troppo tardi per farti l'invio dei libri; ho scelta altra via.

Addio, al ritorno fa di passare per Firenze ed ama

Il tuo Novi

18

Firenze, 21 novembre [18]52

Carissimo Betti

Da lungo tempo ti sono debitore di risposta e non so come tu mi perdonerai il non breve silenzio. Il ricominciamento delle Lezioni mi ha distratto da altre occupazioni più gradite e prendo oggi la penna per riparare in qualche maniera presso vari amici l'apparente dimenticanza di molti giorni. Del resto la tua lettera avrebbe richiesta pronta risposta per una sola cosa, qualora fosse stato possibile esaudire i tuoi desideri. Ma la tua mi pervenne il 2 c. m., e il 31 Ottobre era chiuso il Concorso Albizzi. Se tu, quando io te ne mossi discorso, avessi posta al bando ogni indecisione e ti fossi deciso al partito che troppo tardi poscia abbracciasti, a quest'ora, senza fallo, saresti sulle mosse per recarti nella superba Parigi.

Né, a quanto mi assicurava Bonazzia [*sic*], sarebbe stato difficile conseguire quella modificazione che tu prediligevi (secondo me a torto), in guisa che, ove tu avessi voluto ascoltare la voce del tuo amico, tutto sarebbe andato a seconda dei tuoi desideri.

Avrai saputo che è riuscito un certo Tabani¹ di Pisa, probabilmente di tua conoscenza.

23- Riprendo oggi la penna.² Questa mane ho veduto Mossotti in sua casa; poscia ha avuto la bontà di venire al Liceo³ ove ha ascoltato uno dei miei allievi, che ha ripetuta la bella dimostrazione di Dirichlet sull'equilibrio stabile di un sistema qualunque e la sua applicazione alla stabilità dei corpi galleggianti.⁴ Mi pare che l'illustre professore sia rimasto contento; prezioso compenso per me fra la squisita ignoranza che mi circonda.

Tardy e Vercillo⁵ ti salutano. Ho comprato pel primo il D'Alembert, non ho trovato l'altro libro. Se mi invii Eulero, alla prima occasione invierò tutto a Placido,⁶ il quale, ne sono sicuro, ti sarà gratissimo del rilascio gentile.⁷ Siete animi fatti per comprendersi!

Tu dopo aver vagamente oscillato intorno a varii assi, ti sei finalmente fermato nella immobilità del tuo inevitabile centro di gravità. Le belle e rubiconde Pistojesi ti fanno dimenticare Firenze e gli amici che vi hai; quando

verrai a bearti tra le nebbie fiorentine? Su via muoviti e non farmi supporre che la cagione della tua ritrosia per andare a Parigi sia riposta in qualche secreta e pudibonda ragione.

A che stanno i tuoi studij? Ci farai presto leggere qualche cosa di tuo? Scrivimi presto e lungamente e credi all'affetto e alla stima

il tuo Amico di cuore

G. Novi

P. S. D'ora innanzi le lettere sempre affrancate. È più comodo.

P. P. S. Tardy mi scrisse oggi per l'appunto di pagarti l'Eulero, dimmene quindi il costo ed accennami il modo come farti pervenire il danaro.

¹ Potrebbe essere Enrico Tabani. Negli *Elenchi degli alunni, usciti dalla Scuola Normale Granducale in Pisa, dal 1847 al 1862*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, 1^{er} série, tome 4, 1884, tra gli alunni usciti nel 1851, si trova "Enrico Tabani. Morto a Parigi dove era a perfezionare i suoi studi".

² Novi riprende a scrivere questa lettera, che non aveva chiuso, alla data del 23 novembre.

³ Si tratta del Liceo militare di Firenze, presso il quale insegnava Giovanni Novi.

⁴ Pare evidente il richiamo di Novi al cosiddetto *Teorema di Dirichlet* secondo cui se consideriamo un sistema meccanico soggetto a un sistema di forze conservative e inizialmente prossimo alla configurazione di equilibrio stabile e con velocità sufficientemente piccole, allora il moto del sistema a partire da tale configurazione iniziale rimane prossimo indefinitamente alla configurazione di equilibrio stabile e con velocità che si mantengono piccole.

⁵ Forse Luigi Vercillo.

⁶ Placido Tardy.

⁷ In [CERRONI *et al.* 2010] si legge che Betti scrive a Tardy (lett. 6 del 6 novembre 1853): "Ho ricevuto la vostra gentilissima lettera, e l'opuscolo del Jerrard, e vi ringrazio. Quanto alla Idrodinamica di D. Bernoulli e al Trattato dei fluidi di D'Alembert, non essendo passato da Firenze nel ritornare a Pistoia, ho scritto a Novi che me li compri subito se ci sono sempre; ma non ho ancora avuto risposta. Se si potranno avere ve li spedirò alla prima occasione col Jerrard e colle Istituzioni di Calcolo Differenziale e Integrale di Eulero che mi offro di cedervele, per soddisfare il desiderio che mi mostraste di completar l'Opera del sommo Geometra". In entrambe le lettere, il riferimento è ai testi [D'ALEMBERT 1744] e [EULER 1755].

Carissimo Betti

Due parole. Eccoti i libri per Tardy; temo che giungeranno tardi: basta, tentiamo. Ho studiata la Memoria di Liouville che è facilissima, avrei bisogno del tomo seguente, nel quale vi è la continuazione della detta memoria.¹ Tu non l'hai, ma è bene che mi mandi l'altro volume di Liouville che contiene la Memoria più generale sull'eq.ⁿⁱ differenziali (Tomo XIV),² e dippiù [*sic*] le due Mem. di Meccanica di Bertrand:³ questi lavori è bene averli tutti ad una volta sott'occhio. Non ti rinvio il volume che ho perché estraggo qualche altra cosetta che mi è utile. Lo studio di questi lavori di Meccanica mi farà, forse,

indugiare qualche altra domenica per venire a studiare teco quella difficile teoria delle *sostituzioni*. Ad ogni modo te ne terrò avvisato e tu fammi sapere se vi è niuna difficoltà per la visita della villa Puccini.⁴

Amami come io ti stimo ed amo

Il tuo Novi

¹ Quasi certamente il riferimento è alle memorie [LIOUVILLE 1846] e [LIOUVILLE 1847].

² Quasi sicuramente si tratta di [LIOUVILLE 1849].

³ Le memorie cui si allude sono [BERTRAND 1849-a] e [BERTRAND 1849-b].

⁴ La "villa Puccini" di Pistoia fu fatta costruire da Tommaso Puccini (1749-1811), nella prima metà del secolo XVIII, con i guadagni ricavati dalla sua professione di medico.

20

Firenze, 25 luglio [18]53

Mio carissimo Betti

Perdona se non ho potuto scriverti prima d'oggi, poiché Venerdì non andai alla posta e Sabato vi andai troppo tardi perché poscia mi fosse possibile vedere Padre Antonelli. T'invio i due Tomi che sono alla Biblioteca degli Scolopi,¹ avvertendoti per altre volte che si ha due serie di Esercizii di Cauchy² l'antica e la nuova, e che però quando si chiede bisogna bene definire a quale serie appartenga. Tu hai un mirabile ingegno mio amatissimo Betti e, se la mia amicizia non mi fa velo al giudizio, non vi è materia che possa essere al disopra delle tue forze: tu sai che io non saprei, pur volendo, adulare, tanto la mia natura è avversa a questo brutto e vergognoso vizio, meno degli altri, poi, so adulare i miei amici, ai quali credo debito sacro il dire sempre il vero, anche quando potesse tornare spiacevole. Credo anch'io che al punto altissimo nel quale ti sei posto hai bisogno di maggiore *estensione* di cognizione, ma queste verranno con l'età e col tempo.

Non so se hai scelto bene l'ora scrivendo a Placido³ di scienze; ha preso moglie!!⁴ Come vuoi che nei primi giorni d'Imeneo⁵ si pensi agli integrali *ultraellittici*? Egli passa Domenica prossima per Livorno; io parto col treno speciale delle sei per andare a vederlo: se tu potessi lasciar tutto e venir meco sarebbe un affarone: ma ti credo poco capace di fare opere di carità.

Zero novità scientifiche. Quando ci vedremo, o se tarderai quando ti scriverò nuovamente, ti dirò le ragioni per le quali debbo dimenticare ogni cosa per varii mesi e mettermi a scrivere trattati, la fatica più *esimia* di questo mondo. Ci vuol pazienza.

Vi abbraccio col desiderio di vederti presto

Ama il tuo
Giovanni Novi

¹ Si tratta della Biblioteca dell'Istituto dei Padri Scolopi. Tale Istituto, fondato a Firenze nel 1630, a partire dal 1925 ha assunto il nome attuale di *Scuole Pie Fiorentine*.

² Il riferimento qui è ai lavori [CAUCHY 1826] e [CAUCHY 1835]. Gli *Exercices* furono raccolti nella seconda serie delle *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy* (publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le ministre de l'Instruction publique, Paris, Gauthier-Villars et fils), ai tomi VI (1887), VII (1889), VIII (1890) e IX (1891). Si fa notare che il tomo IX raccoglie gli *Exercices* usciti sia nell'anno 1829 che nell'anno 1830. I *Nouveaux Exercices* sono raccolti ancora nella seconda serie delle *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy*, al tomo X (1895).

³ Placido Tardy.

⁴ Anna Laura Georgina Tighe.

⁵ L'espressione sta per "primi giorni di matrimonio".

21

[Firenze,] Domenica 16 ottobre [1853]¹

Mio carissimo Betti

Ti scrivo due parole per dirti che la tua lettera non l'ho ricevuta che jeri: in guisa che pensai che il risponderti immediatamente non avrebbe potuto giovarti: ho avuto torto? Del resto Tardy si tratterà 10 giorni in Toscana, quindi tu sarai sempre in tempo di spedire quei libri. Ho ricevuta una sua lettera molto ritardata, nella quale mi dice che non è alieno dal cederti l'Eisenstein.²

Ti spedisco una lettera di Tortolini che ti manda Chelini; questi avrebbe avuto un gran piacere di vederti; si trattiene in Firenze fino a Mercoledì, perché non fai una corsa?

Ho a dirti molte cose pel mio affare che conosci; mi riserbo dirtele quando ci vedremo; per ora basta che sappi [*sic*] che Bonazzia [*sic*] ha chiesto il mio posto.

Addio ama il tuo amico vero

Giovanni Novi

[P. S.] Il Banco Fedeli so che è in via Borra,³ ma non altro.

Per fare entrare la lettera di Tortolini nell'inviluppo ho dovuto darle un'altra piega; quindi non ti spaventare.

¹ Il riferimento, in questa lettera e nella successiva, alla visita di Placido Tardy in Toscana permette di affermare che l'anno sia proprio questo.

² Betti riceverà, tramite Novi, i lavori di Eisenstein; scrive a tal proposito a Tardy: "Ricevetti dal Novi l'Eisenstein che ho gradito immensamente, e non so come ringraziartene. Fermò la mia attenzione sopra l'altre quella memoria in cui tratta maestrevolmente quelle serie infinite doppie dalle quali derivano le funzioni circolari e le ellittiche", riferendosi a [EISENSTEIN 1844-a] e [EISENSTEIN 1844-a]; (cfr. [CERRONI *et al.* 2010], lett. 10 di Betti a Tardy).

³ A Livorno.

Firenze, 26 ottobre [18]53

Mio amatissimo Betti

Ritorno in questo momento (ieri sera) da Pisa e Livorno ove ho accompagnato Placido;¹ trovo in mia casa una lettera di Torrigiani² di Domenica; vado da lui, tutto è combinato, poiché Buonazia si è ritirato.³ Il come e il quando di questa subitanea risoluzione dell'ultimo l'ignoro assolutamente, perché dopo quel giorno che fummo insieme con te non l'ho più riveduto; solamente egli incontrò Tardy e gli disse di avvertirmi che potessi procedere liberamente perché egli pensava ad altro; quest'*altro* non lo disse a Placido e però l'ignoro ancora io. Stando stamane da Torrigiani ho saputo che si *diceva* (bada bene) che il Ferruccio⁴ *lasciava* il Liceo militare⁵ e passava al civile;⁶ se fosse vero perché non ti affretti a venire in Firenze e cercare il posto che verrebbe a vacare nel Liceo Ferdinando?⁷

Non credo che ci sarebbe alcuna difficoltà perché Meniconi è certamente per te. Vieni dunque senza por tempo in mezzo e fatti vedere prima di tutti da me.

Tardy ed io siamo rimasti più che sorpresi dell'immobilità e del silenzio che hai duramente guardato in risposta alla lettera con la quale io ti avvisava la venuta di Placido. La prima può spiegarsi, la seconda parmi impossibile; eppure tu sai quanta stima e quanto amore abbia per te Tardy?

A Pisa abbiamo veduto il celebre Belli di Pavia: ho fatta la conoscenza del Martolini.⁸

Amami e vale

Il tuo Novi

¹ Placido Tardy, che nel emse di ottobre aveva trascorso qualche giorno in Toscana.

² Forse Carlo Torrigiani.

³ Girolamo Buonazia insegnava Matematiche Applicate all'Accademia delle Belle Arti di Firenze. Dal 1857, con l'avvio dell'Istituto Tecnico di Firenze (alla cui istituzione si adoperò Filippo Corridi), venne chiamato ad insegnarvi Meccanica Sperimentale e Tecnologia speciale delle arti meccaniche; cfr. [RELAZIONE 1862].

⁴ Presumibilmente Antonio Ferrucci.

⁵ Nel 1849, fu dato incarico a Mariano D'Ayala (1808-1877) di fondare, a Firenze, il Liceo militare "Arciduca Ferdinando", che aveva lo scopo di formare i futuri ufficiali delle armate di terra e di mare. Costituitosi, nel 1859, il Governo provvisorio toscano e votata poi l'annessione al Piemonte, l'istituto assumeva semplicemente il nome "Regio Liceo Militare".

⁶ Si tratta del "Liceo Fiorentino", fondato il 30 settembre 1853, con decreto del granduca Leopoldo II di Toscana (1797-1870). Nel 1865 assunse il nome di "Liceo Dante", in occasione del sesto centenario della nascita di Dante Alighieri.

⁷ Enrico Betti, a partire dal 1854, insegnerà presso il Liceo civile di Firenze; non si trasferì mai al Liceo militare.

⁸ Forse Guglielmo Martolini.

Firenze, 30 ottobre [18]53

Carissimo Betti.

Non ti ho scritto jeri perché il risultato della conversazione con Carloni non fu tale che rendesse necessario tanta sollecitudine.

Egli ignorava assolutamente che tu fossi tra i concorrenti alla cattedra di mat. del Liceo¹ e rimase meravigliato quando io gliene tenni parola. Dissi di te quello che un uomo che ti conosce da vicino può e deve dire; aggiunsi che era una vergogna per la Toscana che tu fossi sepolto a Pistoja, mentre altri infinitamente inferiori a te in tutto si dondolano a Firenze e in Pisa. Egli mi ascoltò con molta attenzione ma rispose che era già moralmente compromesso per Buonazzia [*sic*]; io non lo lasciai terminare, soggiungendo subito che né tu né io avremmo mai domandata cosa che potesse nuocere a Buonazzia nostro comune amico; ma che era più che probabile che fossero due le cattedre a provvedere, almeno se non pel momento, più tardi certamente; che infine ti avesse presente e ti giovasse con tutti i mezzi che sono a sua disposizione. La conversazione restò là, non parendo a me, né egli dandomene campo, di dovere più oltre insistere. Dall'essere il Carloni ben disposto per Buonazzia risulta, a mio credere, che Ferruccio² non ha forti probabilità in suo favore; allora tu dovresti, secondo me, preparare il terreno per la cattedra del Gonnella,³ e per questo oggetto io persisto a credere che il maggior giovamento può venirtene da una *calda* ed *efficace* raccomandazione di Mossotti. Del resto sarà forse bene aspettare il risultato di quest'elezioni prima di dare qualunque passo. Perché con una lettera del Mossotti non ti fai presentare al Gonnella?

Se avrò altre notizie te ne terrò avvertito; tu dammi nuove dei tuoi studii e credi all'affetto sincero del tuo Amico

Giovanni Novi

P. S. Ho trovata l'equazione del Didion⁴ mercè l'integrazione diretta dell'eq.^{ne} generale introducendovi l'ipotesi assunta dallo stesso: viene semplicissimo.

¹ Da questa lettera si comprende che Giovanni Novi si sta interessando del passaggio di Enrico Betti dal Liceo Forteguerri di Pistoia al Liceo civile di Firenze, da poco istituito.

² Antonio Ferrucci.

³ Tito Gonnella era professore di Matematica e Meccanica all'Accademia delle Belle Arti di Firenze.

⁴ Dovrebbe trattarsi della formula balistica, dovuta al generale Isidore Didion, che permette di calcolare lo spostamento tra il punto di arrivo effettivo di un proiettile e il punto mirato. Una esauriente trattazione del problema si trova in [CRANZ *et al.* 1921].

Firenze, 21 novembre [18]53

Mio carissimo Betti

Perdona l'indugio che mio malgrado ho posto nel rispondere all'ultima tua; gravi angustie d'animo e nuove sperienze della viltà e bassezza degli uomini n'è stata cagione. Riceverai con questa la Memoria di Gauss; ti avrei pure inviati i due volumi di Liouville¹ se non avessi speranza di vederti presto stabilito in Firenze, ove potrai prenderli da te stesso.

Di te e delle tue cose non so altro che la quistione pendeva fra Buonazia e te, come mi disse Domenica 13 il Carloni; tu comprendi benissimo che debito di delicatezza m'imponessa di non interporre parola fra due emuli miei amici e al primo dei quali io sono in qualche maniera obbligato per l'affare del Ginnasio. Del resto io non avrei aggiunto nulla alle possibili decisioni che saranno per prendere, giacché seppi che il Governo aveva di te opinione eccellente elevata ad una potenza grandissima; e acciò non cadi [*sic*] in errore, ti ricordo che eccellente è una quantità maggiore dell'unità. Se le tue cose vanno bene o sembrano almeno andare benissimo, e tu sai con che cuore io te l'auguro, le mie non vanno già male ma hanno avuto un denûment affatto impreveduto che non poteva essere peggiore. Quando ci vedremo ti dirò i particolari, per ora ti basti sapere che il Governo ha dichiarato i due impieghi di Professore al Liceo mil.[itare] e di maestro al Liceo civile essere incompatibili fra loro e però (vedi ironia!), mi ha domandato quale dei due impieghi io voglio a preferenza.² Tutto questo, come tu ben comprendi, è frutto di bassi intrighi: l'avvenire svelerà il resto.

Tardy mi incarica di salutarti e di manifestarti tutto il suo dispiacere per non averti potuto vedere nel suo soggiorno in Firenze.

Per ora non ho altro a dirti, amami e dammi presto nuove dei tuoi studi e delle tue cose.

Il tuo Novi

¹ Si tratta del *Journal de mathématiques pures et appliquées* fondato in Francia nel 1836 da Joseph Liouville e per questo conosciuto come *Giornale di Liouville*.

² Dai documenti rinvenuti fino ad oggi, non risulta che Novi sia mai stato al Liceo civile.

Firenze, 8 dicembre [18]57¹Amatissimo Errico [*sic*]

Dal Ferrucci² ebbi i tuoi giusti rimproveri pel mio lungo silenzio alla tua affettuosissima lettera del 20 del p. m. Hai ragione certamente, ma io non ho torto quanto apparisce. Sono stato più volte al banco Pozzolini³ per informarmi del tuo debito, e colla speranza di saperlo oggi o domani ho ritardato: crederesti che ti scrivo senza poter rispondere a quel paragrafo della tua lettera? Il Bertelli

(navicellaio⁴) non ha ancora detto nulla a mio suocero⁵, e quindi conviene che tu ancora per qualche altro giorno sia *bon gré mal gré* debitore di un navicellaio!

Oltre questa ragione, di non lieve peso, il mio ritardo a risponderti è provenuto anche dalle solite cagioni; fra una serie quasi non interrotta di noiosissime occupazioni, non ho neppure la forza di scrivere ad un amico. Oh! Errico, tu ora sei nel porto,⁶ disposto a ridere di coloro che si agitano fra le onde infuriate: compatisci chi, per circostanze superiori alla sua volontà, si trova in una posizione che non è la sua e si dibatte fra le volgari esigenze della vita. Sento con piacere vero dei tuoi studii vigorosamente ripresi e me ne riprometto frutti a te e all'Italia onorevoli. Comprendo che fra la vita pisana e fiorentina vi deve correre gran divario, e che in sulle prime il passaggio deve riuscirci duro; ma a poco a poco ti abituerai al nuovo sistema e diverrai pisano in anima e corpo. Ho ricevuto il *Manifesto*⁷ e farò di tutto per procurarvi associati. Quella riunione di professori è poi combinata? Tardy mi domandava notizie di te; io gliene ho date. Brioschi gli scrisse parlandogli del Giornale⁸ e invitandolo a cooperarvi. Genocchi sarà con tutta probabilità professore a Torino.⁹ Che te ne pare di quel lavoretto di Rubini sull'Algebra?¹⁰

I miei saluti a Mossotti e a Felici. La Gegia ti saluta e ti conforta a prender moglie.¹¹

Scrivimi, Errico mio, il più spesso che puoi: pensa che io non veggo anima vivente colla quale intrattenermi della scienza che amo tanto. Qualche sera la Gegia vedendomi passeggiare per la stanza mi conforta ad uscire, e mi dice con un sorriso: *aspetti forse il Betti?* No, non l'aspetto; egli adesso avrà altri amici, e secondo l'uso comune, amerà i nuovi e più fortunati a scapito dei vecchi e più bersagliati dall'avversa sorte. Scrivimi quindi e smentisci il tristo presentimento. Ama il tuo sincero amico

G. Novi

[P. S.] Euclide e Geronio sono a tua disposizione; se tu hai qualche occasione particolare, dimmelo; altrimenti ci penserò io.

¹ L'intervallo di quattro anni che intercorre tra la lettera precedente e questa potrebbe spiegarsi con il trasferimento di Betti a Firenze e il conseguente avvicinamento dei due corrispondenti. Tuttavia, in alcune lettere del carteggio [CERRONI *et al.* 2010], Betti scrive di aver ricevuto lettere da Giovanni Novi. Tra le altre cose, in una lettera del 4 ottobre 1855, Betti scrive: "Novi scrisse da Messina. Partiva per Lipari. Non abbiamo ricevute altre lettere; noi le aspettiamo di giorno in giorno".

² Presumibilmente Antonio Ferrucci.

³ Dalla lettura di tutto il periodo, sembra di poter affermare che il "banco Pozzolini" fosse un istituto bancario di proprietà di Luigi Pozzolini, suocero di Giovanni Novi.

⁴ Colui che guidava un navicello che era una caratteristica imbarcazione, larga e a basso pescaggio, utilizzata lungo i corsi d'acqua del Granducato di Toscana.

⁵ Luigi Pozzolini.

⁶ Novi si sta riferendo alla sicurezza della posizione raggiunta da Betti con il posto di professore presso l'Università di Pisa.

⁷ Si tratta quasi certamente del manifesto pubblicitario della nuova serie degli *Annali*, progetto portato avanti da Brioschi, con Cremona, Betti e Genocchi, a partire dal 1857; (cfr. la *Presentazione*).

⁸ Il riferimento è ancora agli *Annali di matematica pura ed applicata*.

⁹ Angelo Genocchi divenne, nel 1859, titolare della cattedra di Algebra e Geometria complementare (di cui era "reggente", vale a dire incaricato, dal 1857) presso l'Università di Torino; ma quando l'anno successivo tale cattedra fu abolita, passò prima all'insegnamento della Geometria superiore e ottenne poi, all'inizio dell'anno scolastico 1861-'62, la cattedra di Analisi superiore. Dal 1862-'63 al 1864-'65 fu professore di Algebra complementare e Geometria analitica c, dal 1865-'66 fino alla morte, di Calcolo infinitesimale sempre all'Università di Torino.

¹⁰ Il riferimento dovrebbe essere a [RUBINI 1857].

¹¹ Novi aveva sposato Teresa Pozzolini (da cui ha due figli, Marianna e Paolo), nipote di Vincenzo Malenchini, noto esponente politico del governo toscano. Teresa era figlia di Gesualda Malenchini, e sorella di Cesira, moglie del filosofo leccese Pietro Siciliani. E' presumibile che il matrimonio tra Giovanni e Teresa avvenne proprio nel 1857; è infatti del 2 gennaio 1858 una lettera del De Sanctis a Pasquale Villari, in cui il primo scrive: "Che ti dirò poi del mio carissimo Novi? Non mi sazio mai di leggere la sua lettera; contemplo con estasi quei caratteri, e mi domando s'egli è ben desso. Sì, che è sempre lui, fatto un po' filosofo dall'esperienza, ma pieno di cuore e giovane sempre. Digli che, poiché mi consiglia di prender moglie, me la trovi lui, che ha avuto un odorato sì' fino. Di una certa età, di una cultura sufficiente, mansueta, delicata, femmina insomma [...] e che abbia tanto almeno da poter mantenere se stessa. Se me la trova, verrò a veder lui e lei"; la lettera è contenuta in [DE SANCTIS 1955].

Scelleratissimo Enrico

È un secolo che non mi scrivi, e se non fossero le notizie che ho di te da Genova (incredibil cosa!) ti riputerei già tra coloro che dormono nella invidiabile pace dei sepolcri. Ma Tardy mi scrive che sei sano e che certamente avrà il piacere di abbracciarti a Genova; lo che mi piace moltissimo. Io, come ben puoi immaginare, appena pronunzio Genova mi attiro una tempesta dalla mia dolcissima Gegia; quindi per ora non bisogna pensarci. Ti rivedrò prima della tua gita? Lo spero, e intanto desidero più dirette notizie di te e della tua casa. Comunque da niuna parte abbia avuto nuove di Mossotti, pure a causa dello stesso silenzio, arguisco che sia o in via di guarigione o completamente sano; di che mi congratulo schiettamente e per Mossotti e per la nostra povera Italia che conta sì pochi uomini che veramente la onorino per l'ingegno e per l'animo. Anche qui stavamo per fare una perdita infin.[itamente] meno grave, ma pur nondimeno dolorosa; Lorenzo Capei il medico, era per varcare il terribile passo, né ancora è affatto fuori pericolo; una maledetta migliare¹ lo ha tormentato e tormenta. Io vivo la consueta vita di noie che non hanno nome e

che sono veramente insopportabili. Ho avuto la Gegia un pochino incomodata perché ha divezzata la bambina.² Domani o posdomani le mando in campagna per rimettersi bene. E tu, cosa fai? scrivimi una lunghissima lettera piena di notizie, particolarmente riguardanti te e i tuoi studi. Ricordami alla memoria di Mossotti, Felici, Lavagna. Vivi felice ed ama il tuo annoiatissimo Novi.

P. S. Ho avuto un cahier del Giornale della Scuola Politecnica³ che temeva di non più trovare perché non era nel Catalogo di Bachelier; così non ho più paura di vedermi incompleta quella preziosa raccolta. Di Giornali hai avuto nulla di nuovo?

¹ È una forma di tubercolosi, detta *miliare* o *disseminata*.

² Marianna Novi, figlia di Giovanni, soffriva probabilmente di gravi problemi dalla nascita, da quanto si può dedurre da una lettera del dicembre del 1866 di Pietro Siciliani al fratello Rosario, in cui Pietro si riferisce alla bambina con tali parole "*quella meschina fanciulla che non cammina né parla*"; la lettera è contenuta nel Carteggio Pozzolini-Siciliani del Fondo Vallone di Galatina (LE), in corso di pubblicazione a cura di F. Luceri.

³ Si tratta del *Journal de l'École Polytechnique* di Parigi.

Carissimo Enrico

Supponeva che al tuo ritorno da Genova mi avresti scritto; ma dimenticava che Pisa ti ha fatto porre in oblio gli amici lontani. Ti sei divertito? Che impressione ti hanno fatto Brioschi e Genocchi? Infine dammi tutte le notizie che credi possano interessarmi a questo riguardo. In Firenze nulla di notevole, eccetto un curioso fatterello avvenuto al tuo Merlo in occasione della Geometria di Amiot.¹ Merlo credendo che tu avessi disposto favorevolmente Carloni alla nuova Geometria, si era creduto in diritto di adottare l'Amiot senza tenerne parola all'Abate. Un bel giorno, com'era da aspettarsela, il rubicondo si presentò al Merlo domandandogli ragione dell'inatteso cangiamento. Qui non ti starò a ripetere i dialoghi corsi fra i due: ti dirò solo che dopo vari va e vieni, il reverendo consultò l'oracolo, il quale rispose che finché l'Università non mutava Trattato, non gli pareva conveniente avvenissero mutazioni nei Licei: parlato che ha l'oracolo tutto è finito. Il povero Merlo si trova nella durissima necessità di dire ai suoi scolari che si è ingannato, e che ora bisogna prendere il Legendre² e qui nuovo e curiosissimo dialogo fra gli scolari e il maestro. Per chiudere finalmente in modo degno questa commedia, eccoti un'ultima scena; Le Monnier si vede arrivare gli scolari che domandano restituzione dei quattrini; e Le Monnier restituisce!! Ciò posto, mio carissimo Betti, tu vedi bene che la quistione dipende interamente dall'illustre professore di Geometria dell'Università.³ Le Monnier ti mandò, per passarli allo Sbragia, una copia della Geometria piana,⁴ te ne ha detto nulla? Interroga, e con prudenza spingilo

a parlare. Ho saputo da Le Monnier che l'affare con Matteucci è combinato; il Sig. Felice,⁵ con quel suo sorriso che dice tante cose, mi faceva sapere che Matteucci aveva *detto che non poteva accettare meno di quattromila lire*,⁶ e poi aveva preso duecento scudi!⁷ Son cose che mi fanno male ai nervi; gli scienziati dovrebbero rispettarci un poco in più..

Addio scelleratissimo Betti; salutami Mossotti, Felici, Lavagna: scrivimi una lunghissima lettera, parlami dei tuoi studi ed ama il tuo annoiatissimo amico

Giovanni Novi.

¹ Il riferimento è a [NOVI 1858].

² Adrien Marie Legendre (1752-1833) fu autore degli *Éléments de géométrie*, Paris, Firmin Didot, 1794, trattato che ha rappresentato per oltre cento anni il testo di geometria adottato dalla maggior parte delle scuole di vari paesi d'Europa. Il trattato fu più volte tradotto e ristampato in italiano.

³ Si tratta forse di Fabio Sbragia, menzionato subito dopo.

⁴ Il riferimento è alla prima parte del Trattato di Amiot tradotto da Novi.

⁵ È ancora Felice Le Monnier.

⁶ Al momento dell'Unità d'Italia, la moneta di conto in uso nel Granducato di Toscana era la *Lira toscana o fiorentina*, equivalente a 84 centesimi di Lira italiana.

⁷ Uno *Scudo*, o *Piastra*, toscano equivaleva a circa 6,66 Lire toscane; di conseguenza, i 200 Scudi di cui parla Novi nella lettera erano equivalenti a circa 1332 Lire toscane.

28

[Firenze,] 15 giugno [18]59

Caro Enrico

Se un'assoluta impossibilità non te lo impedisce, vieni domani sera in Firenze piuttosto che Venerdì.¹ A me non è riuscito sinora penetrar nulla dei lavori della Commissione; quel che so di certo è che essa ha tenute parecchie sedute; che il Del Beccaro è in Firenze; che la cosa è vicina ad ottenere una soluzione.²

La tua presenza è indispensabile.

Alle 7 e 40 pm di domani sarà alla Stazione nella speranza di vederti.

Salutami Felici ed ama il tuo Novi.

¹ In questo periodo, Betti è a Pisa.

² Del Beccaro fu direttore dal 1859 al 1865 del Liceo civile di Firenze.

29

[Firenze,] 20 luglio [18]59

Cariss.^{mo} Enrico

Fra giorni conto vederti in Firenze; quindi ti scrivo per pregarti di portarmi le *Ricerche ecc.* di Gauss.¹ Io ho l'Opera in latino, perciò faremo per qualche mese baratto, essendo tu un esimio latinista.

Vidi la tua lettera ad Hermite² e mi rallegro teco della felice continuazione delle tue ricerche.

Salutami Mossotti, Lavagna e Felici e credi alla schietta amicizia

Del Tuo Giovanni Novi

¹ L'opera è [GAUSS 1801]. Evidentemente Novi vuole scambiare l'edizione latina delle *Disquisitiones*, da lui posseduta, con la traduzione francese dell'opera [GAUSS 1807], posseduta invece da Betti.

² Nei *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, al t. XLIX (1859), alle pp. 113-115, Enrico Betti pubblica un *Estratto di una lettera al Sig. C. Hermite*, in francese. Esso è inserito in [BETTI 1903], t. I (1903), pp. 188-189. La lettera riguarda l' "abbassamento" delle "equazioni modulari" nella linea di ricerca delle soluzioni delle equazioni algebriche di quinto grado, ricerca che Betti sta ormai abbandonando; su questo tema si può pure vedere il lavoro [MERCURIO et al. 2007].

30

Pisa¹, 17 febbrajo [18]60

Caro Enrico

Il Librajò *Cammelli*² mi ha scritto essergli venuti taluni fascicoli dell'Enciclopedia, mi faresti piacere a prenderli, pagandogli £ 16, di cui ti farai fare la ricevuta.

Ti rammento la Memoria di Hermite, e ti prego di dire a Ricordi³ che quando ha qualche cosa per me, la mandi al Banco Pozzolini.⁴

Se fosse venuta l'Opera di Catalan sulle serie prendila.⁵

Salutami Monzani,⁶ Gemelli, Bicchierai, Buonazia, Donati, Colignon,⁷ ecc. Al primo dirai che se non ha più bisogno del 2° Vol. di Guizot,⁸ mi farebbe piacere se lo passasse a te.

Divertiti il più che puoi ed ama

Il tuo Novi

¹ Nel 1859 Novi ottiene la cattedra di Algebra superiore all'Università di Pisa. In questa città si trasferisce nell'autunno di quell'anno, come si legge nella lettera del 30 settembre 1859 di Betti a Tardy: "Non sono ancora firmati i decreti delle nomine per la nostra Università di Pisa. Ma per Novi non vi è dubbio, e ha già cercato casa a Pisa. I Corsi quest'anno non avranno principio prima di dicembre". Si legge ancora nella lettera del 29 ottobre 1859 di Betti a Tardy: "Non è ancora fatto il Decreto per le Nomine dell'Università; e il Novi, che ha già preso casa a Pisa e ci ha mandato la famiglia, si trova in una posizione veramente singolare". Entrambe le lettere sono contenute in [CERRONI et al. 2010].

² Filippo o Eugenio Cammelli.

³ Forse il famoso editore Ricordi, che in questo periodo si sarebbe interessato anche della distribuzione di libri e riviste straniere; oppure Ettore Ricordi, professore di Matematica.

⁴ Cfr. lett. 25 nt. 3.

⁵ L'opera di Eugène Charles Catalan, qui menzionata, quasi certamente è [CATALAN 1860].

⁶ Forse Cirillo Monzani.

⁷ Potrebbe essere Charles-Etienne Collignon.

⁸ L'opera potrebbe essere [GUIZOT 1858]. Delle *Mémoires* vi fu anche un'edizione, pubblicata, ancora in 8 voll. e negli stessi anni, da più editori: oltre al citato Michel Lévy frères compaiono F.A. Brockhaus di Leipzig e Aug. Schnée di Bruxelles.

31

Pisa, 4 aprile [18]60

Caro Enrico

Spero che ti sarai ricordato di Cammelli,¹ dell'inchostro e della carta. Ora ti scrivo per darti qualche altra noia.

Ricordi,² in risposta ad una mia della settimana scorsa, mi scrive che dai suoi libri risultava che il fascicolo di Sett. del G. di Terquem³ fosse stato consegnato, e quindi mi consiglia di fare più diligente ricerca fra le mie carte. Or poiché a me non riesce trovare questo fascicolo, ti prego di dirgli che me lo faccia venire assolutamente. Fammi il piacere di passare dal Librajo Bettini⁴ e dimandargli se ha ricevuto il 3° Vol. delle Memorie di Guizot,⁵ edizione di Lipsia; nel caso affermativo prendilo, pagando 10 paoli. A Goodban⁶ darai la commissione di quel libro inglese sulle funzioni ellittiche di cui mi parlasti e prenderai due o tre bacchettine di cera-lacca rossa.

Finalmente ti prego di vedere Monzani e di farti dare il 1° Vol. delle Mem. di Guizot, che ha presso di sé.

Come vedi io uso francamente con te; ma credo che fra amici come siamo noi bisogna procedere in questo modo, e spero di non ingannarmi pensando che tu non mi manderai a quel paese.

Salutami gli amici comuni, fa' le mie congratulazioni a Bicchierai, ricevi i saluti dalla Gegia ed ama

Il tuo G. Novi

P. S. Sono tre giorni che ho una tosse piuttosto forte, conseguenza di una passeggiata da me fatta in un giorno poco propizio.

¹ Filippo o Eugenio Cammelli.

² Anche qui, si potrebbe trattare dell'editore Ricordi o di Ettore Ricordi.

³ Si tratta della rivista *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

⁴ Andrea Bettini, libraio-editore di Firenze.

⁵ [GUIZOT 1858].

⁶ Goodban, libraio di Firenze che si faceva pervenire libri da Londra e da Lipsia.

32

Pisa, 20 febbraio [18]60¹Caro Enrico²

Sabato scorso vi fu adunanza della Facoltà per rispondere alle dimande del Ministro;³ io non v'intervenni perché sono ammalato e perché prevedeva l'abisso che mi separa dai miei Colleghi. Una ora prima che avesse principio l'adunanza, Mossotti fu a vedermi e mi parlò di un suo progetto già comunicato a Mamiani; io presentai qualche obbiezione, ma poi tacqui, perché mi avvidi che Mossotti non mi citava ragioni ma autorità, le quali, comunque rispettabili, non possono avere efficacia per mutare le mie convinzioni. Ieri, Martedì, Pacinotti venne a prendermi all'Università, mi disse che la Facoltà aveva nominata una commissione composta di Lavagna e Barsotti⁴; che il progetto di Mossotti consiste nel fare una sola laurea che deve servire per gl'ingegneri, i quali a detta di Mossotti hanno bisogno di pochi studii, e che la tua cattedra e la sua debbono servire per dare un titolo di magistero; che la maggioranza si era opposta al parere di Mossotti, proponendo le due lauree e lo stato-quo [*sic*], ma che dopo aver sentito dalla bocca stessa di Mossotti che il suo progetto era approvato da Mamiani, si contentarono di esprimere la preghiera che qualora si adottasse il progetto Mossotti si volessero conservare all'Università di Pisa le due vostre cattedre. Dopo questa esposizione, mi pregava ad intervenire alla nuova adunanza; io risposi essere malato, e aggiunsi che la mia età e la mia pochezza mi rendevano all'intutto inutile; Pacinotti mi disse delle parole cortesi per indurmi ad uscire dalla mia riserva. Stamani è ritornato da me pregandomi nuovamente a intervenire all'adunanza che sarebbe tenuta Domenica prossima e di giorno affine di rimuovere qualunque cagione di rifiuto. In sostanza, caro Enrico, i miei onorevoli colleghi, hanno gran paura di opporsi a Mossotti e vogliono mettermi innanzi, sapendo che io non ho paura di nulla. Io, come vedi, capisco benissimo la subita tenerezza che costoro mi dimostrano; ma non retrocedo mai quando si tratta di esporre francamente la mia opinione, e così farò Domenica. Io già pensava di scriverti; ora me ne ha anche pregato Pacinotti, affine di sapere il tuo parere, il quale avrà molta influenza sulla sua decisione.

Mossotti dice che il suo progetto è pienamente approvato da te e da Placido.⁵ Di Placido non potrei giurare, perché è lungo tempo che non ragiono con lui di queste cose, tuttavia stento a credere che egli voglia *castrare* l'insegnamento delle matematiche. Di te poi sarei quasi disposto a giurare, se non mi ritenesse una triste esperienza degli uomini, pronti a variare opinione secondo i venti che spirano. Ma se debbo giudicare dalle lunghe conversazioni *un tempo* (ormai lontano è vero!) avute teco, se debbo giudicare dalla struttura del tuo ingegno, dall'insegnamento che tu hai sempre sostenuto con alto decoro, non posso ammettere che tu voglia ridurre le Università matematiche a semplici e volgari Licei. Il Mossotti ebbe fino il coraggio di dirmi che

gl'ingegneri quando sanno risolvere l'eq.ⁿⁱ di 2°, di 3° grado, un poco di Calcolo infinitesimale, un poco di Meccanica, il resto è superfluo. Che queste siano le tue opinioni, lo crederò solo quando me le scriverai; per ora dubito. Ma qualunque sia il tuo modo di pensare, eccoti il mio che svolgerò Domenica.

I giovani non hanno bisogno di dire quando entrano nell'Università se vogliono fare gl'ingegneri o altro; la carriera che vogliono intraprendere la manifestano dopo tre anni di studii vigorosi di matematica. Allora quelli che si dirigono per l'ingegneria e che non sentono il bisogno di accrescere le loro cognizioni hanno un Diploma di Licenziato e passano alle Scuole di applicazioni. Gli altri continuano, per un anno o due, i loro studii matematici superiori, dopo i quali ottengono il grado di dottore. Questo progetto è in sostanza quello che facesti adottare da Ridolfi; ma, sicuro, ora sono passati varii mesi e potresti aver mutato parere. Ad ogni modo, per quale progetto hai più propensione, fra quelli di Mossotti, delle due lauree, o del mio? La tua risposta dovrebbe venire al più tardi nella giornata di Sabato; perché se tu parteggi per il progetto Mossotti, la Facoltà (eccetto io, s'intende bene) piegherà il collo e farà, con quella insigne viltà che forma la sua unica distinzione, tutto quello che vorrete. Se poi tu appoggerai uno degli altri progetti, allora la Facoltà avrà il coraggio di opporsi a Mossotti. È inutile il dirti che tu non saresti punto nominato. Ho soddisfatto al mio debito.

Fammi il piacere di vedere dai librai di Torino se è in vendita una Memoria sulla Meccanica di Menabrea,⁶ pubblicata da varii anni, di cui furono pubblicati estratti nei Giornali; se la trovi comprala per me. Salutami quel tristissimo Placido, e ricordati, se puoi,

del tuo Novi

¹ Novi erroneamente, considerati i contenuti della stessa e consultato il calendario perpetuo, data questa lettera 20 febbraio 1860. L'anno è in realtà il 1861.

² In questo periodo, Betti è a Torino, come si deduce dall'ultima frase della lettera. Dalla lettera di Betti a Tardy del 20 gennaio 1861 si legge che Betti ha accettato l'invito di Mamiani di far parte di una Commissione per la legge sulla istruzione pubblica.

³ Terenzio Mamiani della Rovere.

⁴ In una lettera di Teresa Pozzolini ad Enrico Betti dell'11 aprile 1870, si legge che Giovanni Barsotti fu nominato curatore dei figli di Giovanni e Teresa: "Se ha occasione di vedere il Prof. Barsotti la prego dirgli a mio nome che essendo stato nominato (dal Tribunale) Curatore dei miei bambini, dovrà egli pure trovarsi presente il giorno dell'atto formale di pagamento". La lettera è custodita nell'Archivio Betti, Biblioteca della Scuola Normale di Pisa.

⁵ Placido Tardy.

⁶ Potrebbe trattarsi di una delle memorie di Luigi Federico Menabrea sulla teoria dell'elasticità pubblicate negli anni Cinquanta.

Caro Enrico

Ti scrivo nuovamente per farti sapere che jeri ebbi un lungo colloquio con Mossotti dal quale desunsi che Pacinotti mi aveva dato una falsa idea del progetto del nostro fisico.¹ Mossotti vuol dare all'insegnamento superiore delle matematiche una importanza maggiore di quella che abbia adesso nella nostra Università, ed allora anch'io sono di parere che per coloro che si addicono alla carriera d'ingegnere questi nuovi studii sono superflui. La differenza adunque si riduce ad una quistione di parole, cioè se dopo i primi tre anni di studii, si debba dare la *licenza* o la *laurea*; io parteggi sempre per la prima, e desidererei che anche tu appoggiassi questa opinione; ma infine è una quistione di piccola importanza e interamente diversa da quella che i miei colleghi ed io, dietro le loro parole, avevamo creduto sulle prime. La lettera che io ti scrissi l'altro giorno, fu scritta, e te ne sarai avveduto, sotto l'influenza dei discorsi del Pacinotti, che mi montarono il cervello, in me facile ad accendersi. Resta però sempre che si fissi che i primi tre anni non debbano servire esclusivamente per formare gl'ingegneri. A me pare che precludendo a questi ultimi la possibilità di fare studi superiori di matematiche, lo che è conseguenza inevitabile del progetto Mossotti, è tanto più importante che nei primi tre anni s'insegnino le matematiche bene e il più ampiamente che si può. So che potrà farsi soltanto quando si stabilisca che il corso triennale è un corso generale, che non ha in mira nulla di speciale, spero che tu appoggerai con tutta la tua influenza queste idee, che mi pare debbano essere anche le tue. Su questo punto non mi è riuscito intendermi con Mossotti, avemmo una quistione vivissima; egli sostiene sempre che nei primi tre anni bisogna insegnare quel tanto solo che può essere utile per gl'ingegneri; io nel calore della discussione giunsi fino a dirgli che egli si faceva il patrocinator dei corsi di Sbragia, Botto e compagni. Egli negò, ma criticò il mio corso Algebra: disse che noi giovani diamo troppa importanza alle cose moderne; che le matematiche *valide* sono quelle formate da Laplace e Lagrange, che quel che era venuto dopo se non era assolutamente cattivo, però aveva poca importanza, ecc. ecc. Io risposi che in ogni periodo della vita umana gli uomini dell'antica generazione sostenevano sempre che [le] sole cose importanti erano quelle fatte da loro; ma che il mondo e la storia ridevano sempre di queste periodiche affermazioni e procedevano innanzi. All'esempio da lui citato del Calcolo dei residui, io contrapposi l'esempio più concludente del Calcolo alle differenze finite che fece tanto rumore sullo scorcio del secolo passato e ai principii del presente, e di cui ora quasi nessuno si occupa.

Ma basta su ciò. Tornando al nostro affare, vi è anche dippiù [*sic*]. Ho sentito che è intenzione governativa distinguere le Università in primarie e secondarie, e che sarebbero primarie la torinese, la napoletana e la nostra. Or bene, cosa darette alle Università secondarie? I primi tre anni, bravissimo. Ma

se in questi tre anni non si può andare al di là degli elementi, voi riducete queste università a semplici licei.

L'Università di Pavia, di Bologna ridotte a Licei!!

Salutami Placido² ed ama

il tuo Novi

P. S. Oggi vado da Pacinotti per fargli intendere meglio il progetto Mossotti, e spero di riuscire a farlo capace dell'utilità che ne risulterà per la nostra Università dalla sua adozione.

¹ Per quanto riguarda il progetto di Mossotti, si vedano anche le lettere poste ai n° 32 e 34.

² Placido Tardy.

Caro Enrico

Non ho risposto subito alla tua, sia perché l'adunanza della Facoltà è stata insignificatissima, sia perché i miei dolori, che mi avevano lasciato per qualche giorno, hanno ripreso a tormentarmi.² La tua lettera mi giunse dopo l'adunanza, talché non potei proporre i privati docenti come tu desideravi; ma poi rivedendo Pacinotti gliene tenni parola, ed egli mi disse che la maggioranza della Facoltà era nimicissima di questa istituzione, giudicandola assai compromettente pei professori; ma se andranno più in là dei privati docenti, come farete? faremo la volontà di Dio mi rispose il buon professore.

Del resto il nostro comandante³ si consola col dire che le cose che insegna lui le masticano ben pochi. Il rapporto di Lavagna era redatto con tutta l'abilità necessaria per evitare qualunque discussione. In sostanza diceva che gli studii matematici universitarii si dividono in due sezioni, 1° studii per gl'ingegneri; 2° studii di perfezionamento.

Esauriti i primi si darebbe una laurea professionale; alla fine dei secondi una laurea scientifica o un diploma di magistero. Evitava i particolari, e solo per la 2^a sezione proponeva otto cattedre 1° Calcolo integrale; 2° Analisi sup.; 3° Geometria superiore; 4° Meccanica analitica; 5° Astronomia e Geodesia; 6° Meccanica celeste; 7° e 8° Fisica matematica.

Tu comprenderai agevolmente che a questo rapporto non si poteva fare opposizione, perché la quistione sta tutta nei particolari, cioè nel sapere i limiti dell'insegnamento per gl'ingegneri. Io mi permisi soltanto di dimandare se intendevano togliere altresì la Geodesia agl'ingegneri. Martolini mi mostrava con molto sussiego come questa scienza fosse inutile per gl'ingegneri; quando Mossotti interrompendolo disse che probabilmente io sosteneva la mia opinione perché confondeva la Geodesia colla Topografia, confusione nella quale cadono facilmente coloro che non sono di fatto di questa scienza. Io

tacqui, perché temei di perdere il rispetto che debbo all'onorevole professore. Tu mi domandi qual'è [*sic*] la differenza fra il sistema da te proposto a Ridolfi e quello di Mossotti; soddisfo al tuo desiderio. Col tuo progetto gl'ingegneri facevano tre anni di studii, dopo dei quali ottenevano il semplice titolo di licenziati; compiuti questi studii un'altro [*sic*] anno era sufficiente per far loro conseguire il titolo di dottore, e in quest'anno, al dilà [*sic*] degli studii che facevano prima, vi era la sola tua cattedra. Quindi mentre col titolo di licenziato si offriva opportunità alle rape di andar via, col piccolo sforzo che richiedeva il conseguimento del dottorato si rendevano più compiuti gli studii della maggioranza dei giovani ingegneri. Queste ottime condizioni non si trovano più nel progetto Mossotti; ed invero tu che conosci la nostra gioventù puoi credere se è possibile sperare che gl'ingegneri vogliano fare altri due anni di studii molto forti, fra i quali vi sono tre cattedre di cui non sanno davvero che farsene. Talché con l'adozione pura e semplice del progetto Mossotti voi sollevate l'istruzione matematica di una ventina di giovani in tutta Italia, e deprimete quella della gran maggioranza di coloro che studiano matematiche. A questa affermazione non mi pare si possa opporre alcuna obbiezione ragionevole; e se tu ne hai, mi farai piacere a comunicarmela. Gl'ingegneri che usciranno dalle nostre storiche università, ignoreranno i primi elementi della teoria delle funzioni ellittiche! Perché con tre lezioni alla settimana non è presumibile che si possa fare un corso discreto di Calcolo diff. e integrale; non è presumibile in generale, e poi col nostro Bottino!⁴ Coi Ministeri sempre memorabili dei Buonarroti e compagni gl'ingegneri toscani facevano 5 lezioni alla settimana di Calcolo inf. e sotto il Ministero liberale, gli uomini stessi della scienza abbassano il livello degli studii. Infine voi fate per gl'ingegneri in Italia, quello che Leverrier⁵ ha fatto in Francia per la scuola politecnica,⁶ con la protesta dei più distinti geometri di quel paese. Secondo il mio parere si potrebbe ovviare a questo grave inconveniente, portando a quattro anni invece di tre il corso di studii per gl'ingegneri. Nel tuo progetto io approvava i tre anni per le ragioni discorse sopra; ma ora li giudico dannosi. A me parrebbe cosa sommamente utile che gl'ingegneri facessero un anno solo di Analisi superiore, Calcolo integrale, e Geometria superiore, ove i singoli professori avrebbero cura di esporre quelle teorie che possono riuscire più proficue per le applicazioni: dopo questo anno i giovani riceverebbero la laurea professionale. Questa è la mia opinione; del resto fate quel che volete, perché ho promesso a me stesso di [non] occuparmi più di queste faccende. Una sola cosa mi annoia grandemente, ed è questo continuo sentirmi sussurrare agli orecchi intorno al mio corso; quando uscii dal Liceo militare credeva di essere libero da siffatte noie; mi sono ingannato, ché anzi mi perseguitano anche più. E finora almeno io aveva la soddisfazione di lasciar gridare e fare secondo i dettami della mia coscienza; ma ora sento da Villari⁷ che ci minacciate di commissioni

esaminatrici; queste presuppongono necessariamente programmi stabili e comuni; chi ridigerà questi programmi? Io temo che con tutte le vostre decantate libertà, non si accrescano i ceppi; o almeno che la libertà sia per tutti fuori che per i professori. Come uscire da questo pelago? Sai se nel nuovo ordinamento universitario, qualora venga adottato dal Parlamento, il Brioschi verrà fra noi? Sai a chi sarebbe destinata la Meccanica analitica?

Sulla fine della tua lettera tu dici che ti fa gran dolore vedere che persone che *stim*i ed *ami* possano dubitare di te. Che io *ami* e *stim*i te moltissimo non ne puoi dubitare; dal momento che ti conobbi, vedendo che in te alle felici doti dell'ingegno si associavano altresì quelle buone dell'indole, ti amai come fratello; se dunque talvolta io ti esprimo qualche biasimo, ciò anziché provenire da mancanza di affetto, trae la sua origine dal fervore di questo stesso affetto, in virtù del quale vorrei vederti immune da qualunque difetto.

I miei sentimenti verso di te non hanno variato per variare di circostanze; posso dire altrettanto di te? Non ho ragione di dubitarne? Desidero una tua dichiarazione a questo riguardo.

Salutami Placido, che mi è sempre debitore di un ritratto. Se Padula è sempre a Torino, salutalo per me, e digli che spero verrà a farmi una visita a Pisa

Il tuo Novi

¹ Il confronto tra il contenuto della presente e quello della precedente lettera conferma l'anno.

² E' questa la prima lettera in cui Giovanni Novi inizia a lamentare i gravi dolori che si accentueranno con il passare degli anni.

³ Il "Comandante" dovrebbe essere Mossotti.

⁴ Gaspare Botto, che nel 1859 passò alla cattedra di Calcolo infinitesimale, lasciando l'insegnamento della Geometria analitica, all'Università di Pisa.

⁵ Le Verrier.

⁶ Si tratta dell'*École Polytechnique* di Parigi, fondata, nel 1794, sotto la spinta di alcuni scienziati, tra cui Gaspard Monge (1746-1818) e Antoine-François de Fourcroy (1755-1809).

⁷ Il riferimento è a uno dei fratelli Villari, Pasquale o Emilio, ma più probabilmente a Pasquale.

Caro Enrico

Probabilmente accetterò l'offerta che mi facesti sere sono di leggere il mio discorso di Laurea; poiché essendo peggiorato di salute, sento il bisogno di fare un tentativo alla Grotta² per vedere se mi riesce di pormi in grado di partire per Napoli. Ho sentito dire che quest'anno non vi sono le solite funzioni per le Lauree, è vero? Ma allora il discorso del Mossotti basta ed il mio è inutile.

Ti prego quindi a farmi sapere qualche cosa per togliermi ad ogni incertezza.

Salutami Meneghini, Villari e gli altri tuoi compagni ed ama

Il tuo aff.mo Amico

G. Novi

¹ Il riferimento in questa lettera al viaggio di Giovanni Novi per Napoli, confrontato con il contenuto della successiva, permette di affermare che la collocazione della lettera stessa possa essere questa.

² Probabilmente è la Grotta Giusti a Monsummano Terme, appartenuta alla famiglia del poeta toscano Giuseppe Giusti e scoperta nel 1849. Le sue acque, ricche di bicarbonato, calcio e magnesio, sono ancora oggi largamente utilizzate. All'epoca dei fatti la scoperta era recente e le acque venivano considerate una sorta di panacea.

36

Pisa, 10 luglio [18]61

Caro Enrico

Sabato 13 parto per Napoli; da Pisa vado via col treno del tocco e andrò a fermarmi sino alle 4 in casa di Vincenzo Malenchini, posta in Piazza Ponte Nuovo, ove si trova per ora mia Suocera.¹ Non voglio che tu t'incomodi minimamente; ma se ti facesse piacere la gita, io sarò lietissimo di abbracciarti.

Di salute mi trovo un pochino meglio, ma l'effetto non è proporzionato ai 12 bagni che ho presi. Stamane ho veduto per un momento Giorgio² mio cognato, che m'incarica di trasmetterti i suoi saluti.

Salutami Mossotti e la famiglia Bicchierai³ ed ama

il tuo Novi.

P. S. Quando mi scrivi a Napoli, porrai sull'indirizzo: Via Toledo Palazzo De Rosa, presso il Marchese Pepe.

Tardy desidera che tu gli faccia sapere la tua opinione sul progetto Matteucci.⁴ Scrivigli.

¹ Gesualda, sorella di Vincenzo Malenchini.

² Giorgio Pozzolini.

³ Si tratta della famiglia di Zanobi e Paolina Bicchierai.

⁴ Si ricorda che a Matteucci si deve il *Regolamento generale delle università del Regno d'Italia*, noto come *Regolamento Matteucci*, approvato il 14 settembre 1862.

37

Napoli, 17 luglio [18]61

Caro Enrico

Soddisfo alla mia promessa di scriverti appena giunto in Napoli. Abbiamo avuto un viaggio discreto; la Gegia la prima notte ha sofferto molto, la seconda punto; io mi sono mantenuto in equilibrio per l'appunto. La mia gamba destra è

però peggiorata; talché da due giorni sono sofferente. I medici di questo paese, che ho già consultati, mi assicurano che guarirò *certamente*; che i miei dolori sono di natura puramente reumatica, e che l'azione continuata e paziente dei bagni minerali dovrà *infallibilmente* essere efficace. Come vedi, le affermazioni sono precise e confortanti; ma chi può aver fede nelle ciarle mediche? Ad ogni modo, domani forse andrò ai bagni di Pozzuoli, per tentare se fossero sufficienti: in caso diverso passerò ad Ischia.

L'aspetto dei miei cari, le cure di cui mi circondano, Napoli e il suo brio non valgono a vincere, caro Enrico, la mia tristezza; questa pertinace malattia si è impadronita del mio spirito, lo confesso e mi toglie fino la facoltà di pensare. Voleva vedere i miei amici, ma in questo stato non ho né la voglia né il potere di muovermi. Che disgrazia è l'esser malati, e più ancora il non avere virilità d'animo sufficiente a essere superiore ai propri mali!

Ed eccoci con una nuova crisi luogotenenziale! Speriamo che Cialdini non faccia cattiva prova come i tanti che lo hanno preceduto.¹ I mali da cui è afflitto questo paese sono varii e di disforme natura, e l'uomo che è chiamato a dirigere questo caos, deve possedere una varietà di attitudini, non facili a riscontrare in un solo uomo. Ma è fuor di dubbio che il male peggiore, più insoffribile e che più irrita la fibra napoletana è il brigantaggio; i napoletani non si possono persuadere che un governo forte possa tollerare per sì lungo tempo questa piaga vergognosa. I recenti fatti di Avellino,² hanno suscitato la universale indignazione; si sono commessi fatti atroci dall'una e dall'altra parte; i proprietari cominciano a farsi giustizia da per loro stessi e gli atti crudeli si moltiplicano. Ieri a pochi passi dalla mia casa, in una strada laterale fu ammazzato un delegato di buona reputazione.

Dammi notizie tue e di Villari; la Gegia ti saluta; io ti prego di salutarmi Mossotti e la famiglia Bicchierai; ed ama

Il tuo Novi

Via Toledo Palazzo De Rosa.

Presso il Marchese Francesco Pepe.³

Fammi il piacere di mandare questa lettera a Mochi.⁴

¹ Il 16 luglio, Enrico Cialdini era stato nominato Luogotenente del Re Vittorio Emanuele II nell'ex Regno delle Due Sicilie, in sostituzione di Gustavo Ponza di San Martino. Cialdini venne inviato a Napoli per affrontare l'emergenza del brigantaggio e si distinguerà per la sua azione di repressione poco moderata.

² Nei primi giorni di luglio del 1861, i paesi dell'Irpinia furono protagonisti di vicende storicamente rilevanti che videro susseguirsi rivolte popolari e scontri a fuoco.

³ E' probabile che Giovanni Novi fosse imparentato con i Marchesi Pepe di Napoli; scrive infatti Antonietta Pozzolini, alla sorella Teresa, in una lettera senza data: "Mia cara Gegina, [...] salutami la tua cognata M.sa Pepe". In [POZZOLINI 1875].

⁴ Forse Mochi Antonio Giuseppe o Mochi Giovanni.

Napoli, 16 settembre [18]61

Caro Enrico

Dopo 52 giorni di dimora nell'Isola d'Ischia, eccomi di ritorno in Napoli e pronto a rompere il mio lungo silenzio. Tu che conosci l'affetto che ti porto, non puoi dubitare quale sia stata la cagione di questo silenzio. Il caldo eccessivo, la noia, la cura, una inerzia indicibile, la mancanza di novità, il desiderio di non rattristarti ecc., ecco le cause vere della mia tardanza a scriverti. Ad Ischia sono stato male, ho avuto quasi sempre dolori in tutte le articolazioni, lo che era spiegato dall'azione stessa dei bagni e delle docce. Ora però mi trovo un po' meglio; ma questo miglioramento sarà duraturo? È principio di un futuro benessere o una delle solite fasi della mia malattia? *Ai posteri l'ardua sentenza.*¹

La sola cosa certa è che ho speso orribilmente; il resto è dubbio.

In questo momento tu sarai tutto occupato nel divertirti a Firenze ed io ti auguro ogni sorta di consolazione e fra queste quella di prendere moglie.²

Tant'è; tu non vuoi sentirne parlare, e un giorno te ne pentirai, ma sarà troppo tardi.

Ieri sera furono a vedermi Battaglini e Villari;³ il primo mi domandò di te con molto interesse. È una persona gentile e modesta; si parlò a lungo dell'anarchia che vi è qui in fatto d'Istruzione. L'Università napoletana è una vera Babilonia: ognuno fa quel che vuole, e quasi tutti non fanno lezione. In matematica gli scolari non superano trenta, perché abbiamo la Scuola dei Ponti e Strade⁴ che attira tutti coloro che studiano matematiche. L'insegnamento privato è come prima fioritissimo; un Professore di matematica ha circa 200 scolari.

Sei stato a Torino? Hai veduto Brioschi?

Nel nuovo anno si farà qualche cosa o continueremo nel provvisorio? Infine dammi tutte le notizie interessanti di cui devi essere possessore.

Io conto ritornare a Firenze verso la metà di Ottobre e spero che ti troverò. La Gegia ti saluta affettuosamente; io ti prego di ricordarmi alla famiglia Bicchierai, di scrivermi presto e di volermi bene

Il tuo Giovanni Novi

[P. S.] Gemelli qui presente ti saluta.

¹ Nella lettera del 16 ottobre 1863, Betti scrive a Tardy di una "macchina" costruita appositamente per Novi: "Novi sta al solito; dimani va a Pisa la Sig.ra Gegia colla bimba e tra pochi giorni andrà anch'egli col bimbo. La macchina è quasi finita la porterà fino a Pisa e proverà l'effetto. Mi pare assai bene immaginata"; (in [CERRONI *et al.* 2010]).

² Dalle informazioni finora rinvenute della vita di Betti, non risulta che egli sia mai stato sposato.

³ Probabilmente Emilio.

⁴ Si tratta della *Scuola di Applicazione del Corpo degli Ingegneri di Ponti e Strade*; per notizie sull'istituto, si può consultare [RUSSO 1967].

Pisa, 31 ottobre [18]64

Caro Enrico

Nocchi mi ha fatto domandare se aderiva a far parte della commissione per i giovani che concorrono al posto fuori d'Italia; in sostanza per esaminare il Dini e l'altro che tu conosci.¹ Io non potevo rifiutarmi; Botto e Beltrami sarebbero gli altri due incaricati. Ma tu non potresti proprio assistervi? Una rapida corsa a Pisa, ti costerebbe molto? io ignoro affatto quali sono le condizioni che si richiedono per ottenere quel posto; ignoro il valore relativo dei due giovani, conoscendone uno solo; Botto ti è troppo noto, perché mi sia lecito dirti l'utilità che può recarci; Beltrami è capacissimo, ma è molto giovane e poco pratico delle cose universitarie. Se tu potessi venire ci faresti un gran regalo; ma ne temo forte. Non potendo, dammi almeno tutti gli schiarimenti opportuni. L'esame avrà luogo il 3 o il 4, almeno così mi ha detto il Franceschi.² Beltrami non è ancora giunto, ma gli hanno scritto.

Sapeva che tu eri stato a Pisa dopo il mio arrivo, e aveva già capito che tu dovevi non aver ricevuto la lettera che io ti scrissi da Lari³ prima di partire. In che modo questa lettera è andata smarrita, non mi riesce comprendere; ma non ho dubitato pure un momento del tuo affetto. Tu ora sei in mezzo della gran politica; speriamo che tutto proceda bene e con dignità. L'Italia ha dato più esempi di luminosa assennatezza; speriamo che ne dia novella prova in questa grave occasione. Il nuovo ministro della pubb. ist.⁴ si annunzia con molto rigore; se persevererà, si renderà benemerito degli studii. È amico di Tardy; tu lo conosci?

Le mie notizie sono sempre tristemente monotone. Per ora nessun vantaggio dai bagni; una grande disappetenza mi perseguita da molto tempo, senza che mi riesca di vincerla.

Ho ricominciato lentamente a studiare, ma mi sento profondamente scoraggiato d'una lotta, di cui non preveggo la fine.⁵

Se hai notizie, dimmele. Salutami Brioschi, Malenchini, Monzani. Mia moglie si ricorda alla tua memoria ed io ti abbraccio

Il tuo Novi

P. S. Dovresti farmi un piccolo favore.

Tu, se la memoria non m'inganna, conosci Giovanni Gemelli napol.[etano] che fu prefetto ad Arezzo, ed ora è capo-divisione al Ministero dell'Interno. Fammi il piacere di andarlo a vedere e domandargli se vi sono notizie pel mio raccomandato *Becciani*;⁶ se se ne ricorda sempre, e se continua a promettermi

la continuazione dei suoi buoni uffici anche presso il nuovo ministro. Lo saluterai da mia parte, e gli dirai che spero che l'amico impiegato non sarà punto diverso rispetto a me da quello che era l'amico esulo a Firenze. Addio!

Se vai a prendere sigari da quella solita donna, dille che l'ultima volta ti ha servito *malissimo*.

¹ Ulisse Dini, dopo aver conseguito la laurea a Pisa nel 1864, trascorse un anno di studi e perfezionamento a Parigi. E' probabile che Novi fosse stato invitato a far parte della commissione per tale concorso.

² Potrebbe essere Goffredo o Francesco Franceschi.

³ In provincia di Pisa.

⁴ Giuseppe Natoli.

⁵ E' del 25 maggio 1865 una lettera di Giovanni Novi al Rettore dell'Università di Pisa; dalla Casa di salute *alla Mattonia* di Firenze (fondata nel 1862), scrive: "Pregiatissimo Sig. Rettore, la mia malattia, che conta già sei anni di durata, richiede una cura lunga e perseverante. Io dovrò restare in questa Casa di Salute probabilmente sino a tutto ottobre; quindi ho bisogno di un nuovo permesso, che mi conceda di occuparmi liberamente della mia salute. Fin'ora non ho ottenuto risultati notevoli, ma tutto contribuisce a farmi bene sperare dell'avvenire".

⁶ Potrebbe essere Guido Becciani.

40

[S.l.,] 2 dicembre [?]

Caro Enrico

Siamo stati invitati ad andare questa sera a salutare S. E. il Ministro; vai tu? Nell'ipotesi affermativa vorrei venirvi anch'io; mi vieni a prendere? Ti aspetto.

Il tuo Novi

[P. S.] In abito scuro s'intende?

41

[S.l.,] [S.d.]

Caro Enrico

Beltrami ti prega di domandare a De Luca se Cannizzaro gli ha scritto di un certo fascicolo del *Cimento*¹ perduto da esso (Beltrami); nel caso affermativo potrebbe passarlo a te, e tu incaricati d'inviarlo a Beltrami.

Addio; salutami Mossotti, Lavagna, Felici, Pacinotti ed ama il tuo amico

Giovanni Novi

¹ Trattasi de *Il Cimento, giornale di fisica, chimica e storia naturale*, rivista che nacque nel 1844 e vide tra i suoi fondatori anche Enrico Betti. A partire dal 1855 la rivista assunse il nome di *Nuovo Cimento*, in seguito divenne organo della *Società Italiana di Fisica*, fondata nel 1897.

42

[S.l.,] [S.d.]

Caro Enrico

Dopo il tuo primo pranzo di mezzogiorno dovresti farmi il piacere di passare un momento da me, perché voglio farti sentire il Processo verbale della seduta di jeri, essendovi cose che riguardano anche te.

Sarei venuto io da te se oggi non mi sentissi peggio del solito, tanto che ho dovuto fino lasciare la lezione.

Il tuo Novi

43

Di casa, 1° Maggio [?]

Caro Enrico

Sei uno scellerato. Ti mando due tuoi libri e ti prego d'inviarmi il 7° Vol. di Liouville¹

Il tuo Novi

¹ *Journal de mathématiques pures et appliquées* (cfr. nt. 1 lett. 24).

44

[S.l.,] [S.d.]

Caro Enrico

Poiché il Sacchi è in trattative col Finzi, mi par giusto che attinga a quelle fonti gli schiarimenti che desidera: così noi ci caviamo d'impicci.

Ti ringrazio della premura che ti sei presa e col desiderio di presto abbracciarti mi dico

Tuo aff.^{mo} amico
G. Novi

45

[S.l.,] [S.d.]

Caro Enrico

Ieri sera mi dimenticai dirti che non ho ancora presa la provvisione di febbraio; quindi ti prego, col tuo comodo, di farmela avere.

Il tuo Novi

46

[S.l.,] [S.d.]

Caro Enrico

Sono un vero disgraziato! Stamane mi sono levato perfettamente bene, e mi preparavo a venire alla Lezione; dopo una mezz'ora adagio adagio è cominciato a ritornarmi il dolore alla gamba sinistra, e in breve è diventato tale da non permettermi di uscire di casa. Sono un vero disgraziato!

Suppongo che tu alla fine della Lezione vada a riscuotere; in questa ipotesi, ti prego a farmi il piacere di riscuotere anche per me.

Quando ripassi sotto la mia casa, suona il campanello e la mia donna verrà a prendere il tutto.

Amami e credimi

Tuo aff. Giovanni Novi

47

Di casa, Mercoledì [?]

Caro Enrico

Oggi sono costretto a restare in letto, perché il dolore alla gamba sinistra, comunque scemato, pure si conserva sempre tale che mi obbliga a riguardarmi. Ti invio tutti i Programmi e le Note dei temi che consegnerai allo Sbragia pregandolo a voler fare le mie veci e a stendere il Rapporto relativo. Mi duole infinitamente di non poter essere presente per difendere i temi di Geometria, ma mi affido in te e nello Sbragia. L'importante è di difendere l'ordine dei temi; in quanto al numero poco importa.

Amami e credimi

Tuo Aff.mo Amico

G. Novi

48

Di casa, 4 Maggio [?]

Caro Enrico

Fammi il piacere di dare questo libro alla tua padrona di casa, che mi saluterai; e di mandarmi le tue lezioni di Algebra del 1° Anno¹ e il Rinnovamento di Gioberti,² se lo hai trovato fra i libri del Villari.

Ama il tuo Amico

G. Novi

¹ E' probabile che in questa lettera, Novi si stia interessando della compilazione del *Trattato di algebra superiore*, basandosi sui manoscritti delle lezioni di Algebra di Betti.

² Si tratta dell'opera [GIOBERTI 1851].

INDICE DEI PERSONAGGI CITATI NELLE LETTERE CON BREVI CENNI BIOGRAFICI

Abel Niels Henrik (1802-1829). Matematico norvegese, a lui si devono risultati fondamentali soprattutto nell'algebra e nella teoria delle funzioni; ([LUI]). Lett. 4, lett. 7.

Amante Fedele (1794-1851). Napoletano, compì i suoi studi a Pisa. Insegnò Astronomia e Geodesia nell'Ufficio topografico di Napoli e nel Collegio militare, dove ebbe Giovanni Novi come allievo. Nel '49 fu deposto dagli uffici; ([AMODEO 1905]). Lett. 4.

Amici Vincenzo (1807-1874). Professore di Matematica applicata all'Università di Pisa. Lett. 8.

Amiot Antoine (1809-(?)). Nel 1850 era professore di Matematica al Lycée Bonaparte e nel 1853 al Lycée Saint-Louis a Parigi. Lett. 27.

Ampère André-Marie (1775-1836). Fisico francese, noto per le sue ricerche su elettricità e magnetismo. Lett. 2

Antonietta, sig.ra. Moglie del direttore della Biblioteca Palatina (nel 1852). Lett. 11.

Antonelli Giovanni (1818-1872). Padre scolpio, svolse la funzione di padre provinciale delle Scuole Pie in Toscana. Fu direttore dell'Osservatorio Ximeniano di Firenze dal 1851 sino alla morte. Si occupò di astronomia, di fisica, di ingegneria e si dedicò anche alla progettazione di linee ferroviarie, dove raggiunse eccellenti risultati; ([TRICOMI 1962]). Lett. 20.

Bachelier, libraio ed editore francese. Lett. 26.

Battaglini Giuseppe (1826-1894). Napoletano, studiò privatamente matematica. Fu assistente presso l'Osservatorio astronomico di Capodimonte, consigliere della Pubblica Istruzione e professore di Geometria superiore all'università di Napoli, professore e Rettore dell'Università di Roma. Nel 1863 fondò il "Giornale di matematica ad uso degli studenti delle Università italiane", di cui fu sempre direttore; [PALLADINO *et al.* 2010]. Lett. 38.

Barsotti Giovanni (1799-1870). Professore di Meccanica razionale all'Università di Pisa, viene ricordato per alcune ricerche sulle equazioni algebriche e le funzioni iperboliche; ([TRICOMI 1962]). Lett. 32.

Becciani Guido. Agronomo, di lui si conoscono un *Manuale di zootechnia, sulla guida delle lezioni dettate nella R. Università di Pisa negli anni 1872-73 e 1873-74 dal prof. Giovanni Baraldi*, del 1877, ed un *Manuale dell'allevatore* del 1896. Lett. 39.

Belli Giuseppe (1791-1860). Fu professore di Fisica alle università di Padova e di Pavia. Lett. 22.

Beltrami Eugenio (1835-1900). Fu professore di Algebra e Geometria analitica a Bologna, di Geodesia teoretica a Pisa, di Meccanica razionale a Bologna e a Roma, di Fisica matematica e Meccanica superiore a Pavia e a Roma. Fu socio e poi, nel 1898, presidente dell'Accademia dei Lincei; ([DBI], voce a cura di N. VIRGOPIA). Lett. 39, lett. 41.

Bertelli, navicellaio. Lett. 25.

Bertrand Joseph Louis François (1822-1900). Matematico francese, fu professore di Analisi matematica all'École polytechnique. Si occupò di geometria, di meccanica, di storia della scienza; ([GAP]). Lett. 14, lett. 19.

Bettini Andrea, libraio-editore di Firenze. Lett. 31.

Bicchierai, famiglia. Lett. 36, lett. 37, lett. 38.

Bicchierai Zanobi (1816-1887). Medico, insegnante e giornalista, fondò il settimanale "il Passatempo". Partecipò alla battaglia di Curtatone e Montanara, nel 1848, nel battaglione universitario di Pisa. Fu direttore della Scuola Normale Maschile di Firenze e Consigliere Comunale. Fu anche ispettore al Ministero della Pubblica Istruzione. Scrisse, tra le altre cose, un *Ricordo del Prof. O.F. Mossotti*, Firenze, Stamperia sulle Logge del Grano, 1863; ([CRP]). Lett. 30, lett. 31.

Boncompagni Baldassarre (1821-1894). Interessato alla storiografia della scienza, in particolare della matematica, pubblicò alcuni scritti inediti di L. Fibonacci. Nel 1868 cominciò a pubblicare la rivista "Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche", che ben presto annoverò importanti collaboratori a livello internazionale; ([TRICOMI 1962]). Lett. 10.

Boole George (1815-1864). Matematico e logico inglese. Fu autore di ricerche sulle equazioni differenziali, sul calcolo delle differenze finite e sulla logica matematica; ([EB]). Lett. 11, lett. 13.

Botto Gaspare (1811-1892). Fu professore di Algebra, Geometria analitica e Geodesia dell'Università di Siena. Nel '45 venne chiamato all'Università di Pisa per insegnare Geometria analitica e nel 1848 fu tra i docenti dell'Ateneo pisano che parteciparono alla Prima guerra d'indipendenza; ([SIUSA]). Lett. 33, lett. 34, lett. 39.

Bourdon Louis Pierre Marie (1779-1854). Matematico francese, fu autore di diversi trattati di aritmetica ed algebra. Lett. 13.

Brioschi Francesco (1824-1897). Laureato a Pavia, dove fu incaricato dell'insegnamento di Meccanica razionale, divenne professore di Matematica applicata e di Analisi superiore nella stessa università, quindi di Idraulica fluviale e Analisi matematica al Politecnico di Milano, da lui istituito e diretto dal 1863 alla sua morte. Deputato e quindi senatore, svolse anche un'intensa attività politica. Socio nazionale dell'Accademia dei Lincei, della quale fu presidente dal 1884 alla sua morte; ([DBI], voce a cura di N. RAPONI). Lett. 25, lett. 27, lett. 34, lett. 38, lett. 39.

Buonarroti Cosimo (1790-1858). Ultimo erede della famiglia toscana dei Buonarroti, fu tra l'altro ministro della Pubblica Istruzione nel governo granducale di Toscana. Lett. 34.

Buonazia (o Bonazia) Girolamo (1821-?). Pedagogista, fu delegato straordinario di Pubblica Istruzione a Firenze. Insegnò in vari istituti fiorentini; ([DE FEO 1989]). Lett. 18, lett. 21, lett. 22, lett. 23, lett. 24, lett. 30.

Cammelli Filippo e Eugenio, librai a Firenze. Lett. 30, lett. 31.

Cannizzaro Stanislao (1826-1910). Iscritto alla facoltà di medicina a Palermo, non conseguì mai la laurea. Nel 1847 partecipò alla preparazione della rivolta contro i Borboni e l'anno seguente ne prese parte attiva, come ufficiale di artiglieria, a Messina. Costretto all'esilio, rientra nel 1855, come professore di chimica presso l'università di Genova. Ricoprì a Roma la cattedra di chimica e contemporaneamente ebbe la nomina a senatore; ([DBI], voce a cura di A. GAUDIANO e D. MAROTTA). Lett. 41.

Capei Lorenzo (?-1875). Medico fiorentino, originario di Cortona. Lett. 26

Carloni Girolamo (1800-1882). Prete, professore di discipline filosofiche, fu direttore del Liceo civile di Firenze. Lett. 23, lett. 24, lett. 27.

Carmagnini, *procaccia* ovvero *corriere postale*. Del Carmagnini, si è trovata testimonianza in [BACCINI1904], dove l'autrice scrive: "*Verso la fine del 1856 [...] sarei partita col Carmagnini, il procaccia che aveva la rimessa a Firenze in Piazza delle Cipolle e che partiva per Prato con la sua grande, pencolante e vetusta diligenza, due volte la settimana, il martedì e il venerdì, giorni di mercato*". Lett. 6.

Catalan Eugène Charles (1814-1894). Matematico belga, docente a Parigi, dal 1865 fu professore di Analisi matematica all'Università di Liegi; ([LUI]). Lett. 30.

Cauchy Augustin Louis (1789-1857). Matematico francese, fu membro dell'*Académie des sciences*. Insegnò all'École polytechnique, alla Sorbona e al Collège de France. Rifiutatosi di prestare giuramento al nuovo regime sorto dalla rivoluzione del 1830, fu rimosso dalla cattedra e lasciò volontariamente la Francia, ove ritornò nel 1852; ([LUI]). Lett. 3, lett. 20.

Cayley Arthur (1821-1895). Dedicatosi dapprima alla professione legale, le sue ricerche matematiche gli valsero la cattedra di algebra nell'università di Cambridge. Fu anche socio straniero dei Lincei; ([LUI]). Lett. 12.

Chelini Domenico (1802-1878). Professore di Meccanica e Idraulica presso l'Università di Bologna; ([TRICOMI 1962]). Lett. 21.

Cialdini Enrico (1811-1892). Generale e luogotenente dell'ex Regno delle Due Sicilie; ([DBI], voce a cura di G. MONSAGRATI). Lett. 37.

Collignon Charles Etienne (1802-1885). Ingegnere francese; ([VAPEREAU 1865]). Lett. 30.

Corridi Filippo (1806-1877). Fu docente all'Università di Pisa di Aritmetica razionale e Geometria, di Elementi di algebra e, infine, di Calcolo sublime. Fu il principale artefice della costituzione dell'Istituto Tecnico Toscano; ([PRISTEM]). Lett. 13.

d'Alembert Jean Baptiste Le Rond (1717-1783). Fisico, matematico e filosofo francese, portò avanti importanti ricerche scientifiche contenute negli 8 volumi di *Opusculs mathématiques*; ([LUI]). Lett. 18.

Del Beccaro Tommaso. Fu professore di Fisica sperimentale (sucedendo a Gilberto Govi) al neoistituito Liceo Civile di Firenze dove avviò, con vari acquisti, la collezione di strumenti scientifici; insegnò Matematica al Liceo Militare di Firenze e Fisica all'Istituto Tecnico della stessa città. Fu pure Provveditore agli Studi di Siena; ([LICEO DANTE]). Lett. 28.

De Luca Giuseppe (1823-1895). Geografo, docente di Geografia e Statistica, fu rettore dell'Università di Napoli dal 1861 al 1863; ([PIROMALLI 1996]). Lett. 41.

Didion Isidore (1798-1878). Generale francese, scrisse alcuni trattati di balistica. Lett. 23.

Dini Ulisse (1845-1918). Matematico, allievo di E. Betti, fu professore all'Università di Pisa ([DBI], voce a cura di M. MENGHINI). Lett. 39.

Dirichlet Johann Peter Gustav Lejeune (1805-1859). Dopo aver frequentato le scuole superiori in Germania, si recò a Parigi per gli studi universitari. Dal 1827 insegnò presso l'Università di Breslau, e poi all'Università di Berlino. Dal 1855 passò

all'Università di Gottinga; ([LUI]). Lett. 8, lett. 18.

Donati Giovanni Battista (1826-1873). Matematico ed astronomo. Lett. 30.

Eisenstein Ferdinand Gotthold Max (1823-1852). Matematico, conseguì risultati di notevole importanza in diversi campi: teoria dei numeri, algebra, funzioni ellittiche; ([LUI]). Lett. 21.

Euler Leonhard (1707-1783). Matematico, fisico e filosofo naturale, fu professore all'Accademia delle Scienze di Pietroburgo e a Berlino; ([LUI]). Lett. 5, lett. 18.

Felici Riccardo (1819-1902). Professore di Fisica all'Università di Pisa, di cui fu anche Rettore. Fu uno dei fondatori e direttore (insieme a Betti) della rivista *Nuovo Cimento*; ([TRICOMI 1962]). Lett. 10, lett. 12, lett. 25, lett. 26, lett. 27, lett. 28, lett. 29, lett. 41.

Ferrucci Antonio. Professore di Geometria e Geodesia al Liceo militare di Firenze, figlio di Michele, fu il traduttore nel 1856 del *Trattato di Trigonometria* di Alfredo Serret. Lett. 22, lett. 23, lett. 25.

Ferrucci Michele (1801-1881). Professore di Storia e Archeologia all'Università di Pisa, fu anche direttore della Biblioteca di quell'università dal 1848 al 1881; ([DBI], voce a cura di L. M. GONELLI; [SBP]). Lett. 12.

Finzi Cesare (1836-1908). Docente di Algebra presso l'Università di Pisa e alla Scuola Normale Superiore; ([TRICOMI 1962]). Lett. 44.

Franceschi Francesco (1843- 1924). Botanico, si laureò a Pisa nel 1864. Lett. 39.

Franceschi Goffredo (1843-1877). Professore di Storia e preside nel liceo di Rimini, oltre che ispettore scolastico. Lett. 39.

Francoeur Louis Benjamin (1773-1849). Matematico e pedagogista francese, autore di moltissimi trattati di matematica. Lett. 13.

Galois Évariste (1811-1832). Matematico francese, pubblicò lavori fondamentali sulle frazioni continue, su nuovi insiemi numerici, sulla risolubilità per radicali delle equazioni algebriche; ([LUI]). Lett. 8.

Gauss Karl Friedrich (1777-1855). Si laureò nel 1796 al Collegio Carolinum di Braunschweig e nel 1799 ottenne il dottorato. Nel 1807 divenne professore di astronomia e direttore dell'osservatorio astronomico di Göttingen; ([LUI]). Lett. 1, lett. 5, lett. 6, lett. 7, lett. 24, lett. 29.

Gemelli Giovanni. Fu Prefetto in varie città d'Italia e autore del volume *Napoli e Austria, ossia Delle beghe e delle intervenzioni austriache a Napoli: cenno storico-politico*, Firenze, Barbera, Bianchi e Comp., 1859. Fu anche governatore della provincia di Basilicata e presidente della Deputazione provinciale di Terra d'Otranto. Lett. 30, lett. 38, lett. 39.

Genocchi Angelo (1817-1889). Giurista, professore di diritto a Piacenza, emigrò a Torino, avendo partecipato ai moti rivoluzionari degli anni 1848-49. Si dedicò alla matematica e divenne nel 1857 professore di Geometria e di Analisi nell'Università di Torino; ([DBI], voce a cura di L. GIACARDI). Lett. 25, lett. 27.

Gergonne Joseph-Diez (1771-1859). Fu professore di Astronomia e poi rettore all'Università di Montpellier. E' noto per i suoi contributi alla Geometria proiettiva e

per essere stato il fondatore degli *Annales de mathématiques pures et appliquées*; ([GAP]). Lett. 2.

Gioberti Vincenzo (1801-1852). Filosofo e uomo politico. si laureò nel 1823 in teologia e nel 1825 fu ordinato sacerdote. Fu ministro e presidente del Consiglio del Regno di Sardegna e sostenitore del processo di unificazione dell'Italia, come espresso in una delle sue maggiori opere (*Del rinnovamento civile d'Italia*, 1851); ([DBI], voce a cura di F. TRANIELLO). Lett. 48.

Gonnella Tito (1794-?). Fu nominato, nel 1829, professore di Matematica e Meccanica all'Accademia delle Belle Arti di Firenze e premiato costruttore di strumenti matematici, quali il planimetro che va sotto il suo nome; ([IMSS]). Lett. 23.

Goodban, libraio di Firenze. Lett. 31.

Guizot François Pierre Guillaume (1787-1874). Politico e storico francese. Lett. 30, lett. 31.

Hamilton William Rowan (1805-1865). Fisico matematico, fu professore di Astronomia al Trinity College di Dublino e astronomo reale d'Irlanda, oltre che presidente della Royal Irish Academy; ([LUI]). Lett. 7, lett. 9.

Hermite Charles (1822-1901). Matematico, fu membro della Académie des Sciences, professore all'École polytechnique e alla Sorbona; fu anche socio straniero dei Lincei; ([LUI]). Lett. 6, lett. 29, lett. 30.

Jacobi Carl Gustav Jacob (1804-1851). Matematico, è stato tra i protagonisti degli studi matematici del 19° secolo. Fu professore all'Università di Königsberg; ([LUI]). Lett. 3, Lett. 8, lett. 9, lett. 10, lett. 11.

Lagrange Joseph Louis (1736-1813). Fu assistente per il corso di Matematica delle Reali Scuole di artiglieria di Torino, professore all'École normale e poi all'École polytechnique; ([LUI]). Lett. 33.

Laplace Pierre-Simon (1749-1828). Astronomo, fisico e matematico francese, fu anche ministro della Pubblica Istruzione, senatore, cancelliere del senato; ([LUI]). Lett. 33.

Lavagna Giovanni Maria (1812-1870). Nel 1840 fu nominato professore di Geometria all'Università di Pisa; poi, nel 1843, di Calcolo infinitesimale e, a partire dal 1862, di Astronomia e Meccanica celeste; ([TRICOMI 1962]). Lett. 26, lett. 27, lett. 29, lett. 31, lett. 34, lett. 41.

Lefébure de Fourcy Étienne-Louis (1787-1869). Matematico francese. Lett. 13.

Le Monnier Felice (1806-1884). Noto editore fiorentino di origine francese, fondò, nel 1840, a Firenze, la Casa editrice omonima, tutt'oggi esistente. Nel 1865, cedette l'azienda ad una società anonima, formata da notabili fiorentini e toscani e presieduta da Bettino Ricasoli. Egli ne rimase direttore fino al 1879; ([CERRONI et al. 2010]). Lett. 3, lett. 27.

Le Verrier Urbain Jean Joseph (1811-1877). Matematico e astronomo francese. È famoso soprattutto per il suo contributo alla scoperta di Nettuno, usando solo calcoli matematici e osservazioni astronomiche precedenti; ([EB]). Lett. 34.

Libri Carrucci Guglielmo (1803-1869). Professore di Fisica matematica all'Università di Pisa Dal 1825, Libri si recò a Parigi, dove cominciò ad interessarsi di

Storia delle scienze divenendo un appassionato bibliofilo. Alla Sorbonne fu nominato professore di Calcolo delle probabilità; ([DBI], voce a cura di L. GIACARDI). Lett. 8, lett. 9, lett. 10.

Liouville Joseph (1809-1882). Fu Professore di Analisi e meccanica all'École Polytechnique e al Collège de France, di Meccanica alla Sorbona, nonché membro dell'Institut de France, fondatore (nel 1836) e direttore del *Journal de mathématiques pures et appliquées*; ([LUI]). Lett. 19, lett. 24, lett. 43.

Mainardi Gaspare (1800-1879). Si laureò all'Università di Pavia in Ingegneria civile e Architettura; lì fu professore ordinario di Introduzione al calcolo e di Matematica pura sublime e poi di Calcolo differenziale e integrale. Fu anche socio della Società italiana delle scienze detta dei XL; ([LUI]). Lett. 8.

Malenchini Pozzolini Gesualda (1809-1894). Suocera di G. Novi, era sorella di Vincenzo Malenchini. Nata da una famiglia di agiati commercianti e proprietari di navi di Livorno, si trasferì a Firenze dopo il matrimonio con Luigi Pozzolini. A Firenze, teneva un importante salotto, assieme anche alla figlia Cesira; ([CAMBI et al. 2008]). Lett. 36.

Malenchini Vincenzo (1813-1881). Esponente politico del governo toscano, amico di Mazzini e di Garibaldi. Fratello della madre di Teresa Pozzolini. Lett. 36, lett. 39.

Mamiani della Rovere Terenzio (1799-1885). Ministro della Pubblica Istruzione dal 20 gennaio 1860 al 22 marzo 1861. Lett. 32.

Martolini Guglielmo. Fu professore di Architettura all'Università di Pisa. Lett. 22, lett. 34.

Matteucci Carlo (1811-1868). Fu professore di Fisica a Bologna e poi a Ravenna e Pisa; fu ministro della Pubblica Istruzione del Regno d'Italia dal marzo al dicembre del 1862 e vicepresidente del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione; ([DBI], voce a cura di F. FARNETANI e G. MONSAGRATI). Lett. 27, lett. 36.

Menabrea Luigi Federico (1809-1896). Uomo politico, scienziato e generale, fu professore di Geometria descrittiva, Meccanica e Scienza delle costruzioni all'Accademia militare di Torino. Dal 27 ottobre 1867 al 13 maggio 1869 è stato primo ministro del Regno d'Italia; ([DBI], voce a cura di P. GENTILE). Lett. 32.

Meneghini Giuseppe (1811-1889). Paleontologo, dal 1849 fu docente di Mineralogia e di Geologia presso l'Università di Pisa; ([LUI]). Lett. 35.

Meniconi Gustavo, professore di Lettere al Collegio "Cicognini" di Prato. Fu insegnante anche di D'Annunzio. Lett. 22.

Mérimeé Prosper (1803-1870). Scrittore, storico e archeologo francese; ([LUI]). Lett. 10.

Merlo Francesco. Professore di Matematica. Insegnò nella sezione ginnasiale del Liceo fiorentino dal 1853 al 1859. Lett. 27.

Minding Ernst Ferdinand Adolf (1806-1885). Matematico polacco, fu professore all'università di Dorpat. Ha fornito importanti contributi alla geometria intrinseca delle superfici, fondata da K. F. Gauss; ([LUI]). Lett. 6.

Mochi Antonio Giuseppe, avvocato. Lett. 37.

Mochi Giovanni (1827-1892), pittore. Lett. 37.

Molini, editore in Firenze. Lett. 6.

Monzani Cirillo (1820-1889). Storico e politico italiano. Lett. 30, lett. 31, lett. 39.

Mossotti Ottaviano Fabrizio (1791-1863). Fisico e patriota, fu assistente all'osservatorio di Brera; dal 1840 fu professore all'Università di Pisa; ([TRICOMI 1962]). Lett. 5, lett. 9, lett. 18, lett. 23, lett. 25, lett. 26, lett. 27, lett. 29, lett. 32, lett. 33, lett. 34, lett. 35, lett. 36, lett. 37, lett. 41.

Natoli Giuseppe (1815-1867). Fu ministro della Pubblica Istruzione dal 28 Settembre 1864 al 31 Dicembre 1865. Lett. 39.

Nocchi Raffaello (1822-1878). Segretario generale al Ministero della Pubblica Istruzione. Lett. 39.

Novi Marianna. Figlia di Giovanni. Lett. 26.

Otto F. Capitano dell'artiglieria della guardia, direttore della reale fabbrica di polveri di Neisse. Lett. 4.

Pacinotti Luigi (1807-1891). Ricoprì la cattedra di Fisica sperimentale all'Università di Pisa dal 1831 al 1840 quando si spostò su quella di Fisica Tecnologica. Lett. 32, lett. 33, lett. 34, lett. 41.

Padula Fortunato (1815-1881). Insegnò Matematica al collegio Militare e in quello di Marina di Napoli, poi Meccanica razionale all'Università di Napoli, di cui fu due volte rettore. Dal 1864 alla morte fu direttore della Scuola degli Ingegneri di Napoli; ([TRICOMI 1962]). Lett. 34.

Pepe Francesco, marchese. Lett. 36, lett. 37.

Peri Giuseppe (1822-1874). Autore, tra il 1859 ed il 1873 di una serie di trattati per l'insegnamento delle matematiche per gli istituti tecnici industriali, professionali del regno e per le scuole normali e magistrali tecniche e ginnasiali; ([CERRONI *et al.* 2010]). Lett. 11.

Piatti, editore in Firenze. Lett. 6, lett. 9.

Piola Gabrio (1794-1850). Matematico e fisico, studiò all'Università di Pavia. Ha scritto numerosi trattati e memorie. Lett. 15.

Poinsot Louis (1777-1859). Professore di Analisi e Meccanica all'École polytechnique, fu chiamato a succedere a Lagrange nell'Académie des sciences. Particolarmente notevoli i suoi contributi alla meccanica e alla dinamica dei solidi; ([GAP]). Lett. 9.

Poisson Siméon-Denis (1781-1840). Professore di Analisi matematica e di Meccanica all'École polytechnique e alla Sorbona; ([LUI]). Lett. 4.

Pozzolini Giorgio (1834-?), cognato di G. Novi. Patriota e ufficiale, fu generale comandante dei bersaglieri. Lett. 36.

Pozzolini Luigi (?-1884), suocero di Giovanni Novi. Lett. 25.

Pozzolini Teresa, detta Gegia. Moglie di G. Novi. Lett. 25, lett. 26, lett. 31, lett. 37, lett. 38, lett. 39.

Puiseux Victor Alexandre (1820-1883). Fu professore di Matematica e Astronomia alla Sorbona; ([LUI]). Lett. 6.

Richelot Friedrich Julius (1808-1875). Matematico tedesco, fu allievo di Jacobi. Lett. 9.

Ricordi, editore. Lett. 30, lett. 31.

Ricordi Ettore. Professore di Matematica. Lett. 30, lett. 31.

Ridolfi Cosimo (1794-1865). Professore di Agraria all'Università di Pisa, fu ministro della Pubblica Istruzione per la Toscana e nella fase di transizione al Regno d'Italia divenne senatore; ([IMSS]). Lett. 32, lett. 34.

Rubini Raffaele (1817-1890). Allievo di F. Padula, si laureò in Matematica e in Architettura all'Università di Napoli; fu nominato, nel 1859, professore di Meccanica razionale alla Scuola di Marina di Napoli; nel 1861, passò, sulla stessa cattedra, all'Università di Napoli e dopo poco assunse l'insegnamento di Algebra complementare, che tenne fino al 1886; ([TRICOMI 1962]). Lett. 25.

Sacchi Giuseppe (1804-1891). Educatore, direttore dell'ispettorato generale, vi esplicò un'attiva azione a favore dell'educazione infantile e popolare. Collaborò al riordinamento della pubblica istruzione piemontese; ([LUI]). Lett. 44.

Sbragia Fabio (1822-1899). Laureatosi a Pisa in Scienze matematiche, divenne, presso l'ateneo pisano, assistente alla cattedra di Fisica, poi supplente e, infine, professore ordinario per quella di Geometria e Trigonometria; ([SIUSA]). Lett. 27, lett. 34, lett. 47.

Schlömilch Oskar Xavier (1823-1901). Matematico tedesco, fu professore al Politecnico di Dresda; (). Lett. 6.

Serret Joseph Alfred (1819-1885). Matematico francese, fu membro dell'Académie des sciences e professore al Collège de France; ([LUI]). Lett. 7.

Stern Moritz Abraham (1807-1894). Fu professore ordinario all'Università di Gottinga, succedendo a C.F. Gauss; ([ADE]). Lett. 6.

Sylvester James Joseph (1814-1897). Matematico, fu professore in diverse università inglesi e americane ed infine a Oxford. Fondò il *Quarterly journal* di Londra e l'*American journal of mathematics* di Baltimora; ([LUI]). Lett. 8, lett. 11.

Tabani Enrico. Fisico pisano, si laureò alla Scuola Normale di Pisa nel 1851. Lett. 18.

Tardy Placido (1816-1914). Matematico e fisico, fu professore alle università di Messina e di Genova, di cui fu anche rettore; ([TRICOMI 1867]). Lett. 1, lett. 2, lett. 4, lett. 5, lett. 6, lett. 7, lett. 8, lett. 9, lett. 10, lett. 12, lett. 15, lett. 16, lett. 17, lett. 18, lett. 19, lett. 20, lett. 21, lett. 22, lett. 24, lett. 25, lett. 26, lett. 32, lett. 34, lett. 34, lett. 36, lett. 39.

Terquem Orly (1782-1862). Matematico francese, insieme a C.C. Gerono (1799-1891) fondò nel 1842 i *Nouvelles annales de mathématique*; ([ADE]). Lett. 7, lett. 31.

Thomson William (1824-1907). Noto anche come Lord Kelvin, fu un fisico e ingegnere britannico; ([GAP]). Lett. 13.

Tighe Anna Laura Georgina (1809-1880). Moglie di Placido Tardy. Lett. 20.

Torrigiani Carlo (1807-1865). Marchese, fu anche senatore dal 1862; (sito web del Senato della Repubblica). Lett. 22.

Tortolini Barnaba (1808-1874). Professore di Calcolo infinitesimale nell'università di Roma, fu uno dei fondatori dell'Accademia dei XL. Nel 1850 fondò gli *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche*; ([TRICOMI 1867]). Lett. 1, lett. 2, lett. 3, lett. 4, lett. 5, lett. 9, lett. 11, lett. 15, lett. 21.

Venturoli Giuseppe (1768-1846). Fu professore di Matematiche applicate all'Università di Bologna. Nel 1817, fu nominato, da Papa Pio VII, Direttore della Scuola degli Ingegneri a Roma; ([SISM]). Lett. 5.

Vercillo Luigi (1793-1872). Assunse varie cariche istituzionali, fu nominato senatore nel 1863; ([SR]). Lett. 18.

Vieille Jules Marie Louis (1814-1880). Matematico francese, era professore al Lycée Louis-le-Grand di Parigi; ([VAPEREAU 1865]). Lett. 6.

Villari Emilio (1836-1904). Fu professore di fisica al Liceo Dante di Firenze e poi direttore, dal 1889 al 1904, del Gabinetto di Fisica Federico II di Napoli; ([GNAM] e [LUI]). Lett. 38.

Villari Pasquale (1826-1917). Storico e uomo politico; napoletano, esulò a Firenze dopo i moti del '48. Fu ministro della Pubblica Istruzione dal 6 febbraio 1891 al 15 maggio 1892; ([PSF] e [LUI]). Lett. 34, lett. 35, lett. 37, lett. 48.

FONDI

- Carte dell'Ufficio Topografico di Napoli, Archivio di Stato, serie I.
- Registri di Matricola degli alunni dell'Accademia della Nunziatella, Associazione Nazionale Ex- allievi Nunziatella, Napoli.
- Fondo Vallone, Galatina (LE).
- Fondo Siciliani, Biblioteca Civica di Galatina (LE).
- Archivio Betti, Biblioteca della Scuola Normale di Pisa.
- Fondo Genocchi, Biblioteca comunale Passerini-Landi di Piacenza.
- Carte personali docenti dell'Università di Pisa, Archivio di Stato di Pisa.
- Fondo Gaspare Botto, Biblioteca Universitaria di Pisa.

BIBLIOGRAFIA

[ABEL 1824] N.H. ABEL, *Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*, Brochure imprimée chez Grøndahl, Christiania, 1824; inserita in N.H. ABEL, *Oeuvres complètes*, Christiania, Grøndahl & Son, 2 tomi, 1881, t. I, pp. 28-33.

[ADE] Academic dictionaries and encyclopedias, de.academic.ru

[AMICI 1833] V. AMICI, *Sul problema dell'equilibrio delle volte. Memoria del Signor Dottore Vincenzo Amici, coronata dalla Società Italiana delle Scienze residente in Modena*, Tipografia Camerale, Modena, 1833.

[AMIOT 1850] A. AMIOT, *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire*, Dezobry et E. Magdeleine libraires-éditeurs, Parigi, 1850.

[AMODEO 1905] F. AMODEO, *Vita matematica napoletana*, vol.I, Tip. Giannini e Figli, 1905; vol.II, Tipografia dell'Accademia Pontaniana, Napoli, 1924.

[AMPÈRE 1824] A.M. AMPÈRE, *Analise transcendante. Analogie entre les faculté numeriques et les puissance; démonstration générale de la formule du binôme de Newton; développement des fonctions exponentielles et circulaires*, Annales de Gergonne, t. 15 (1824-1825), pp. 369-385.

[AMPÈRE 1825] A.M. AMPÈRE, *Analise transcendante. Exposition des principes du calcul des variations*, Annales de Gergonne, t. 16 (1825-1826), pp. 133-167.

[AMPÈRE] A.M. AMPÈRE, *Analise transcendante. Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel, du calcul aux différences et de l'interpolation des suites, considérée comme dérivant d'une source commune*, Annales de Gergonne, t. 16, pp. 329-349.

[AMPÈRE 1826] A.M. AMPÈRE, *Analise transcendante. Démonstration du théorème de Taylor, pour les fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes, avec la détermination de l'erreur que l'on commet lorsqu'on arrête la série donnée par ce théorème à l'un quelconque de ses termes*, Annales de Gergonne, t. 17 (1826-1827), pp. 317-329.

[AMPÈRE 1829] A.M. AMPÈRE, *Astronomie. Démonstration élémentaire du principe de la gravitation universelle*, Annales de Gergonne, t. 20 (1829-1830), pp. 89-96.

[AMPÈRE 1830] A.M. AMPÈRE, *Sur la théorie des forces-centrales*, Annales de Gergonne, t. 21 (1830-1831), pp. 1-30.

[BACCINI 1904] I. BACCINI, *La mia vita. Ricordi autobiografici*, Società editrice Dante Alighieri di Albrighi, Segati e C., Roma-Milano, 1904.

[BERTRAND 1849-a] J. BERTRAND, *Mémoire sur les simplifications que peuvent apporter les changements de coordonnées dans les questions relatives au mouvement de la chaleur*, Journal de mathématiques pures et appliquées, t. XIV (1849), pp. 1-20.

[BERTRAND 1849-b] J. BERTRAND, *Nouvelle méthode pour trouver les conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles*, Journal de mathématiques pures et appliquées, t. XIV (1849), pp. 123-130.

[BERTRAND 1849] J. BERTRAND, *Traité d'arithmétique*, Hachette, Paris, 1849.

[BERTRAND 1850] J. BERTRAND, *Traité élémentaire d'algèbre*, Hachette, Paris, 1850.

[BETTI 1850] E. BETTI, *Sopra la determinazione analitica dell'efflusso dei liquidi per una piccolissima apertura*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», Roma, t. I (1850), pp. 425-443, in [BETTI 1903], t. I, pp. 3-16.

[BETTI 1851-a] E. BETTI, *Sopra la risolubilità per radicali delle equazioni algebriche irriducibili di grado primo*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», Roma, t. II (1851), pp. 5-19, in [BETTI 1903], t. I, pp. 17-27.

[BETTI 1851-b] E. BETTI, *Un teorema sulle risolventi delle equazioni risolubili per radicali*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», Roma, t. II (1851), pp. 102-103. In [BETTI 1903], t. I (1903), pp. 28-29.

[BETTI 1852] E. BETTI, *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», Roma, t. III (1852), pp. 49-115. In [BETTI 1903], t. I (1903), pp. 31-80.

[BETTI 1853] E. BETTI, *Sopra l'abbassamento delle equazioni modulari delle funzioni ellittiche*, *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche*, t. IV, 1853, pp. 81-100 e in *Opere matematiche di Enrico Betti pubblicate per cura della R. Accademia de' Lincei*, Hoepli, Milano, t.I, 1903, pp. 81-95.

[BETTI 1856] J. BERTRAND, *Trattato di algebra elementare. Prima traduzione italiana con note ed aggiunte di Enrico Betti*, Le Monnier, Firenze, 1856.

[BETTI 1903] *Opere matematiche di Enrico Betti*, pubblicate per cura della R. Accademia de' Lincei, Hoepli, Milano, 2 tomi, 1903-1913.

[BOLLATI 1866] E. BOLLATI, *Fasti legislativi e parlamentari delle rivoluzioni italiane nel secolo XIX*, Vol.II 1859-61 Toscana, Civelli, Milano, 1866.

[BOTTAZZINI 1994] U. BOTTAZZINI, *Va' pensiero. Immagini della Matematica nell'Italia dell'Ottocento*, Il Mulino, Bologna, 1994.

[CAMBI et al. 2008] F. CAMBI, G. STACCIOLI, *Il gioco in Occidente. Storia, teorie, pratiche*, Armando, Roma, 2008.

[CARBONE et al. 2006] L. CARBONE, A.M. MERCURIO, F. PALLADINO, N. PALLADINO, *La corrispondenza epistolare Brioschi-Genocchi*, «Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli», s. IV, vol. LXXIII, 2006.

[CATALAN 1860] E.C. CATALAN, *Traité Élémentaire des Séries*, Paris, Librairie Centrale des Sciences Leiber et Faraguet, 1860.

[CATENACCI 2008] G. CATENACCI (a cura di), *Francesco de Sanctis. Discorso ai giovani. Napoli, 18 febbraio 1848*, Scuola militare "Nunziatella", Istituto italiano per gli Studi filosofici, Associazione nazionale ex allievi Nunziatella, Napoli, 2008.

[CAUCHY 1826] A.L. CAUCHY, *Exercices de Mathématiques*, de Bure Frères, Libraires du roi et de la bibliothèque du roi, Parigi, 5 voll., 1826-1830.

[CAUCHY 1835] A.L. CAUCHY, *Nouveaux Exercices de Mathématiques*, publié par la Société Royale des Sciences de Prague, 1835.

[CAYLEY 1845] A. CAYLEY, *On the theory of linear transformations*, «Cambridge Mathematical Journal», vol. IV (1845), pp. 193-209.

[CAYLEY 1846-a] A. CAYLEY, *On linear transformations*, «Cambridge and Dublin Mathematical Journal», vol. I (1846), pp. 104-122.

[CAYLEY 1846-b] A. CAYLEY, *Mémoire sur les hyperdéterminants*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Berlin, Bd. 30, 1846, pp. 1-37.

[CAYLEY 1847] A. CAYLEY, *Note sur les hyperdéterminants*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Berlin, Bd. 34 (1847), pp. 148-152.

[CAYLEY 1851] A. CAYLEY, *Note sur la théorie des hyperdéterminants*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Berlin, Bd. 42 (1851), pp. 368-371.

[CERRONI et al. 2007] C. CERRONI - G. FENAROLI, *Il Carteggio Cremona-Tardy (1860-1886)*, Mimesis, Milano, 2007.

[CERRONI et al. 2010] C. CERRONI - L. MARTINI, *Il carteggio Betty-Tardy (1850-1891)*, Mimesis, Milano, 2010.

[CRANZ et al. 1921] C. CRANZ, K. BECKER, *Handbook of ballistics, vol. I Exterior ballistics*, London, 1921.

[CREMONA 1860] L. CREMONA, *Considerazioni di storia della geometria, in occasione di un libro di geometria elementare pubblicato recentemente a Firenze*, in «Il Politecnico», vol. IX, Editori del Politecnico, Milano, 1860, pp. 286-322.

[CRP] CENTRO RICERCHE PRATO, www.crprato.it.

[D'ALEMBERT 1744] J. D'ALEMBERT, *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, Chez David l'âné Libraire rue Saint Jacques à la Plume d'or, Paris, 1744.

[DBI] Dizionario Biografico degli Italiani, www.treccani.it.

[DE FEO 1989] F. DE FEO, *Itinerario spirituale di Cesare Guasti*, Edizioni di storia e letteratura, Roma, 1989.

[DE SANCTIS 1938] F. DE SANCTIS, *Lettere dall'esilio (1853-1860)*, raccolte e annotate da Benedetto Croce, Laterza, Bari, 1938.

[DE SANCTIS 1955] F. DE SANCTIS, *Lettere a Pasquale Villari*, con introduzione e note di Felice Battaglia, Einaudi, Torino, 1955.

[DIRICHLET 1851] L. DIRICHLET, *Nachricht über Jacobi's wissenschaftlichen Nachlass*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Berlin, Bd. 42 (1851), pp. 91-92.

[EB] Enciclopedia Britannica, www.britannica.com.

[EISENSTEIN 1844-a] F.G.M. EISENSTEIN, *Transformations remarquables de quelques series*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 27, 1844, pp.193-197.

[EISENSTEIN 1844-b] F.G.M. EISENSTEIN, *Transformations remarquables de quelques series*, {II.}, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 28, 1844, pp. 36-40.

[EULER 1755] L. EULER, *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in Analysis Finitoum ac doctina serierum*, St. Petersburg Royal Academy of Sciences, 1755; II ed. in typographico Petri Galeatii, 1787 e in *Opera mathematica*, Lipsia et Berolini typis et in aedibus B. G. Teubneri, serie I, vol.10, 1913.

[GAP] Groups, Algorithms, Programming - a System for Computational Discrete Algebra; sito web: www.gap-system.org.

[GAUSS 1801] C.F. GAUSS, *Disquisitiones Arithmeticae auctore D. Carolo Friderico Gauss*, In Commissis Apud Gerh. Fleischer, Lipsia, 1801.

[GAUSS 1807] C.F. GAUSS, *Recherches Arithmétiques, Par M. Ch.-Fr. Gauss (de Brunswick); Traduites par A.-C.-M. Pouillet-Delisle, Professeur de Mathématiques au Lycée d'Orléans, A Paris*, Chez Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57, 1807.

[GAUSS 1850] C.F. GAUSS, *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen*, «Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen», Bd. IV (1850), in [GAUSS 1863], t. III (1866), pp. 71-102.

[GAUSS 1863] *Carl Friedrich Gauss Werke*, herausgegeben von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 9 tomi, 1863-1906.

[GIOBERTI 1851] V. GIOBERTI *Del rinnovamento civile d'Italia*, a spese di Giuseppe Bocca, Parigi e Torino, 2 voll., 1851.

[GNAM] Galleria nazionale arte moderna e contemporanea di Roma, www.gnam.beniculturali.it.

[GUIZOT 1858] F. GUIZOT *Mémoires pour servir à l'histoire de mon temps*, Michel Lévy frères, Paris, 8 voll., 1858-1867.

[HAMILTON 1839] W.R. HAMILTON, *On the Argument of Abel, respecting the Impossibility of expressing a Root of any General Equation above the Fourth Degree, by any finite Combination of Radicals and Rational Functions*, «Transactions of the Royal Irish Academy», Dublin, vol. 18 (1839), pp. 171-259

[HERMITE 1851] C. HERMITE, *Sur les fonctions algébriques*, «Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris», t. XXXII (1851), pp. 458-461; in *Oeuvres de Charles Hermite*, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par Émile Picard, Gauthier-Villars, Paris, 4 tomi, 1905-1917, t. I, pp. 276-280.

[HERMITE 1859] C. HERMITE, *Sur la théorie des équations modulaires*, Mallet-Bachelier, Paris, 1859 e in *Oeuvres de Ch.Hermite*, vol.II, Paris, 1908, pp. 38-82.

[IMSS] Sito web Istituto e Museo di Storia della Scienza, brunelleschi.imss.fi.it.

[LICEO DANTE] Sito web del Liceo ginnasio "Dante" di Firenze, <http://www.liceoclassicodante.fi.it>.

[LIOUVILLE 1846] J. LIOUVILLE, *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer*, «Journal de mathématiques pures et appliquées», t. XI (1846), pp. 345-378.

[LIOUVILLE 1847] J. LIOUVILLE, *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer (Second Mémoire)*, «Journal de mathématiques pures et appliquées», t. XII (1847), pp. 410-444.

[LIOUVILLE 1849] J. LIOUVILLE, *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels*, «Journal de mathématiques pures et appliquées», t. XIV (1849), pp. 257-299.

[LUI] Lessico Universale Italiano, Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani, Arti grafiche Marchesi per i tipi dell'Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, Roma, www.treccani.it.

[MAINARDI 1850] G. Mainardi, Nuovi teoremi di Analisi, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», Roma, t. I (1850), pp. 342-348.

[MERCURIO *et al.* 2007] A.M. MERCURIO, N. PALLADINO, *Intorno alla risoluzione delle equazioni algebriche di quinto grado per funzioni ellittiche in Betti e Brioschi*, «Memorie scientifiche, giuridiche e letterarie. Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti, Modena», serie VIII. vol. X, Fasc. II (2007), pp. 391-441.

[MINDING 1849] E.F.A. MINDING, *Sammlung von Integraltafeln zum Gebrauch für den Unterricht an der Königl. Gewerbe-Institut*, Reimaurs, Berlin, 1849.

[NOVI 1850] G. NOVI, *Memoria sopra le trasformazioni generali di date funzioni. Estratto di un opuscolo del sig. O. Schlömilch*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», Roma, t. I (1850), pp. 517-527.

[NOVI 1854] G. NOVI, *Sul moto dei proietti nell'anima delle bocche da fuoco. Considerazioni del Sig. Giovanni Novi, Professore di Artiglieria nel Liceo militare di Firenze*, estratti dagli «Annali di Scienze matematiche e fisiche» pubblicati in Roma Ottobre e Novembre 1854, Tipografia delle belle arti, Roma, 1854.

[NOVI 1856] G. NOVI, *Elogio di Carlo Gustavo Jacob Jacobi letto nell'Accademia delle Scienze di Berlino il 1° di luglio 1852 da Lejeune Dirichlet. Traduzione dal tedesco di Giovanni Novi, Professore di Meccanica, e di Artiglieria nel Liceo militare di Firenze*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», t. VII (1856), Tipografia delle belle arti, Roma, pp. 342-372.

[NOVI 1857] G. NOVI, *Elementi d'aritmetica*, Le Monnier, Firenze, 1859.

[NOVI 1858] A. AMIOT, *Trattato di Geometria elementare di A. Amiot, prima traduzione italiana con note ed aggiunte di Giovanni Novi, Professore di Meccanica*

nell'I e R. Liceo militare di Firenze, con un atlante di 59 tavole, Felice Le Monnier, Firenze, 1858.

[NOVI 1860] G. NOVI, *Lezioni di Meccanica razionale di O. F. Mossotti, La Statica dei sistemi di forma invariabile di F. Brioschi, Milano 1859, Elementi di Meccanica razionale di D. Chelini delle Scuole Pie, Bologna 1860*, «Annali di Matematica pura e applicata», Roma, t. 3 (1860), pp. 245-251.

[NOVI 1862] J. BERTRAND, *Trattato d'aritmetica. Prima traduzione italiana con note ed aggiunte di Giovanni Novi*, Le Monnier, Firenze, 1862.

[NOVI 1863] G. NOVI, *Trattato di Algebra superiore, Parte I. Analisi algebrica*, Le Monnier, Firenze, 1863.

[NOVI 1864 a] G. NOVI, *Riduzione in serie delle facoltà analitiche*, «Giornale di Matematiche», vol. II, Benedetto Pellerano Editore, Napoli, 1864, pp. 1-46.

[NOVI 1864 b] G. NOVI, *Sugli invarianti e i covarianti delle forme binarie*, «Giornale di Matematiche», vol. II, Benedetto Pellerano Editore, Napoli, 1864, pp. 306-330.

[OTTO 1844] F. OTTO, *Bemerkungen über den Einfluss der Umdrehung der Artillerie-Geschosse auf ihre Bahn im Allgemeinen, so wie über die Unzulänglichkeit der desfallsigen untersuchungen des Herrn Poisson ins Besondere*, Berlin, 1844.

[PALLADINO et al. 2009] F. Palladino -A.M. Mercurio- N. Palladino, *Per la costruzione dell'Unità d'Italia. Le corrispondenze epistolari Brioschi - Cremona e Betti - Genocchi, Olschki*, Firenze, 2009.

[PALLADINO et al. 2010] N. PALLADINO- A.M. MERCURIO, *La corrispondenza epistolare di Battaglini a Cremona*, in corso di pubblicazione per il «Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli», 2011.

[PIOLA 1852] G. PIOLA, *Ulteriori considerazioni sul moto dell'acqua in vasi, canali e fiumi, memoria postuma di Gabrio Piola, (pubblicata per cura del professore Francesco Brioschi)*, «Memorie del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere», Milano, vol. 3 (1852), pp. 283-367.

[PIROMALLI 1996] A. PIROMALLI, *La letteratura calabrese*, Pellegrini Editore, Cosenza, 1996.

[POINSON 1834] L. POINSON, *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, Bachelier, Paris, 1834

[POISSON 1838-a] S.D. POISSON, *Sur le mouvement des Projectiles dans l'air, en ayant égard à la rotation de la Terre*, Journal de l'École Polytechnique, Paris, 26° cahier, al t. XVI (1838), pp. 1-68,

[POISSON 1838-b] S.D. POISSON, *Sur le mouvement des Projectiles dans l'air, en ayant égard à leur rotation*, Journal de l'École Polytechnique, Paris, 26° cahier, al t. XVI (1838), pp. 69-176.

[POISSON 1839] S.D. POISSON, *Second Mémoire. Sur le mouvement des Projectiles dans l'air, en ayant égard à la rotation de la Terre*, Journal de l'École Polytechnique, Paris, 27° cahier, al t. XVI (1839), pp. 1-50.

[POLENGHI 1993] S. POLENGHI, *La politica universitaria italiana nell'età della Destra storica*, Editrice La Scuola, Brescia, 1993.

[POZZOLINI 1875] A. POZZOLINI, *Lettere e frammenti inediti di Antonietta Pozzolini*, dal periodico fiorentino "Letture di Famiglia", Tip. di M. cellini e C., 1875.

[POZZOLINI 1904] C. POZZOLINI-SICILIANI, *Lettere da Parigi*, Tipografia Barbera, Firenze, 1904.

[PRISTEM] Sito PRISTEM, Università Bocconi, matematica-old.unibocconi.it.

[PROCISSI 1853] A. PROCISSI, Gli studi di Enrico Betti sulla teoria di Galois nella corrispondenza Betti-Libri, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, serie 3, volume 8 (1953), n. 3, p. 315-328.

[PSF] Portale per la storia di Firenze, www.dssg.unifi.it.

[RELAZIONE 1862] *Relazione del Ministro di Agricoltura, Industria e Commercio sopra gli Istituti tecnici, le Scuole di Arti e Mestieri, le Scuole di Nautica... Presentata alla Camera dei Deputati nella tornata del 4 luglio 1862*, Tipografia della Camera dei Deputati, Torino 1862.

[RICHELOT 1852] F.J. RICHELOT, *Eine neue Lösung des Problems der Rotation eines festen Körpers um einen Punct (Auszug aus einer zu Berlin 1851 erschienenen Schrift)*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Berlin, Bd. 44 (1852), pp. 60-65.

[ROMANO 2003] M. ROMANO, *Storia di una famiglia borghese: i Vallone di Galatina (secc. XVII-XX)*, FrancoAngeli Editore, Milano, 2003.

[RUBINI 1857] R. RUBINI, *Applicazione della teorica dei determinanti*, in «Annali di Scienze matematiche e fisiche», t. VIII, Tipografia delle Belle Arti, Roma, 1857.

[RUSSO 1967] G. RUSSO, *La Scuola d'Ingegneria in Napoli. 1811-1967*, E.S.I., Napoli, 1967.

[SBP] Sito web del Sistema bibliotecario di ateneo dell'Università di Pisa, biblio.unipi.it.

[SCHLÖMILCH 1848] O.X. SCHLÖMILCH, *Theorie der Differenzen und Summen*, Druck und Verlag von H.W. Schmidt, Halle, 1848.

[SCHLÖMILCH 1849-a] O.X. SCHLÖMILCH, *Die Allgemeine Umkehrung gegebener Funktionen. Eine Monographie von D. Oskar Schloemilch Professor an der Universität Jena*, Druck und Verlag von H. W. Schmidt, Halle a./S., 1849.

[SCHLÖMILCH 1849-b] O.X. SCHLÖMILCH, *Neue Methode zur Summirung endlicher und unendlicher Reihen*, «Archiv für Mathematik und Physik», Greifswald, t. XII (1849), pp. 130-166.

[SERRET 1851] J.A. SERRET, *Traité de trigonométrie*, Bachelier, Paris, 1851.

[SERRET 1852] J.A. SERRET, *Traité d'arithmétique*, Bachelier, Paris, 1852.

[SISM] Società Italiana di Storia delle Matematiche, www.dm.unito.it/sism.

[SIUSA] Sistema Informativo Unificato per le Soprintendenze Archivistiche, Archivi di personalità, siusa.archivi.beniculturali.it.

[SOLDANI 2010] S. SOLDANI, *Ingegneri e studi di ingegneria nella Firenze di metà Ottocento*, in "Alle radici della moderna ingegneria. Competenze e opportunità nella Firenze dell'Ottocento", a cura di Angotti, Pelosi, Soldani, Firenze University Press, Firenze, 2010.

[SR] Sito web del Senato della Repubblica, <http://www.senato.it/>.

[STERN 1841-a] M.A. STERN, *Über die Auflösung der transcendenten Gleichungen*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Vol.22, de Gruyter, 1841.

[STERN 1841-b] M.A. STERN, *Recherches sur la theorie des residus quadratiques, memoire en reponse à la question suivante: ou demande un memoire d'analyse algebrique dont le sujet est laissé au choix des concurrents*, M. Hayez, Bruxelles, 1841.

[SYLVESTER 1842] J.J. SYLVESTER, *Memoir on the dialytic method of elimination, Part I*, XXI (1842), pp. 534-539. In [SYLVESTER 1904], vol. I, pp. 86-90.

[SYLVESTER 1851] J.J. SYLVESTER, *On extensions of the dialytic method of elimination*, II (1851), pp. 221-230. In [SYLVESTER 1904], vol. I, 256-264.

[SYLVESTER 1904] J.J. SYLVESTER, *The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester* (Cambridge, at the University Press, 4 voll., 1904-1912).

[TARDY 1851] P. TARDY, *Sulla risoluzione algebrica di talune equazioni*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», Roma, t. II (1851), pp. 197-205.

[TERQUEM 1851] O. TERQUEM *Résolution numérique des équations trinomes*, «Nouvelles Annales de Mathématiques», t. X (1851), pp. 165-174.

[TRICOMI 1962] F.G. TRICOMI, *Matematici Italiani del Primo Secolo dello Stato Unitario*, «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino – Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali», Serie 4a, n. I, 1962.

[VALERIO 1993] V. VALERIO, *Società Uomini e Istituzioni Cartografiche nel Mezzogiorno d'Italia*, Istituto Geografico Militare, Firenze, 1993.

[VAPEREAU 1865] L.G. VAPEREAU, *Dictionnaire universel des contemporains*, Librairie de L. Hachette, Paris, 1865.

[VENTUROLI 1806] G. VENTUROLI, *Elementi di meccanica e d'idraulica*, Tip. F.lli Masi e C., Bologna, 2 voll., 1806-1807.

[VIEILLE 1851] J.M.L. VIEILLE, *Cours complémentaire d'analyse et de mécanique rationnelle*, Bachelier, Paris, 1851.

A new hole in the stratospheric ozone on Arctic Ocean.

Nota presentata dal socio Guido Barone*
(adunanza del 4 novembre 2011)

Abstract

The ozone stratospheric layer is one of the mechanisms by means of which the Nature protects all the terrestrial life and the human health.

The “ozone hole” on the Antarctic stratosphere has been no longer discussed in the scientific literature in the last years, as previously. This is a consequence of the full apparent success achieved by the Montreal Protocol and the relative Treatise concerning the banned production of chlorine containing gases. As it is well known these international agreements were achieved for preserving this precious natural barrier.

Actually, after a maximum restore occurred during the year 2000, the ozone concentration at the end of each September started to decrease again every year. At 26 September 2010 the ozone concentration registered at the Antarctic stations reached the 210 Dobson Units (DU) with a deficit of 150 DU respect to the lower latitudes. (The DU are equivalent to the “columnar eight” in millimetres of all the ozone concentration, insisting on a specific area, normalized at Standard conditions). In comparison, during the years 1995-2008, at the end of the boreal winter, the ozone concentration on the stratospheric Arctic oscillated among 420 and 360 DU.

Surprisingly in the spring 2011 it was registered the formation of a new “ozone hole” over the North Pole, characterised by the analogous extension and deepness of the hole appeared over the Antarctic during the first years '80.

* Guido Barone – Department of Chemistry, University of Naples “Federico II”
e-mail guido.barone@unina.it
assistenza grafica di Marco Barone

The recent ozone hole on the North Pole

The alert was given because the ozone layer was strongly depleted from the end of March for about two months, interesting all the Arctic Islands, the Northern areas of Greenland and the Canadian, Siberian and Scandinavian coasts. A thickening of ozone layer was also registered at the Meteorological Stations of all the North and Central Europe, up to the Institute for Atmospheric and Climate Sciences at the Bologna CNR, as an increasing of the UV solar radiations.

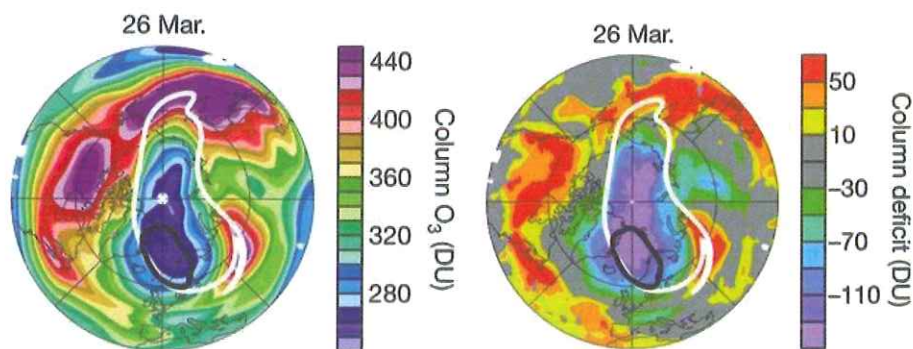


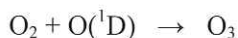
Figure 1 – Columnar ozone concentration on the Arctic at March, 26, 2011 and its depletion.

The ozone dance

The ozone gas (O_3) is generated in the stratosphere, between 15 and 50 km, by a photochemical reaction involving the energetic UV radiations ($185 < \lambda < 220$ nm) that break the oxygen molecule (O_2), giving two excited atoms:



The Spectroscopic notations define the excited states of the oxygen atoms, that maintain the energy surplus not dissipated in the photochemical process. The last one is the more reactive and can attack molecular oxygen:

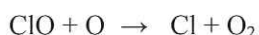


The efficiency of this process depends (among other factors) by the collision angle between intermolecular O-O bond and the trajectory of the entering third atom. It must be noted that the two differently excited oxygen atoms for quantum-mechanical reasons cannot combine each other, giving again the molecular oxygen, unless the $O(^1D)$ will decay to $O(^3P)$ by collision with an inert species.

The discovery of the ozone hole on Antarctic stratosphere

During the 1980 decade, because of the permanent presence of Meteorological Stations in the Antarctica, and the use of some satellites dedicated to the study of atmosphere (Figure 3), the Scientific Community discovered the existence of a very extended and deep hole in the stratospheric ozone layers over this area and alerted the International Institutions: nevertheless during any summer the ozone hole increased its extension, year by year, beyond the Antarctica margins.

Particularly, the attention was focused on the synthetic methane and ethane derivatives containing chlorine and fluorine atoms (CFC): actually the carbon-chlorine bond is broken by the solar UV radiation, giving free chlorine atoms, which are involved in turn in a cycle of chemical and photochemical reactions, that transform the ozone molecules into oxygen containing species. For instance:



The previous equations were proposed by Molina and Rowland (awarded with the Nobel Price for the chemistry, with Crutzen): they have shown that the chlorine atoms are very effective gaseous catalysts for the ozone molecule decomposition. In fact the chlorine atoms are regenerated at the end of the process. Each of them is capable to destroy about 1000 ozone molecules, before that two of them give a chlorine inactive diatomic molecule.

The ClO, moreover, beside to the sequestering the free oxygen atoms, can react with the nitrogen oxides, released by the aircraft jets flying at high altitudes, forming ClNO_2 and ClONO_2 that constitute a chlorine reserve for the hot season.

The CFC can escape from the malfunctioning compressors of refrigerators and air conditioners, or from the spray bombs for cosmetics or are employed in the industrial electronics. Actually, even if relatively heavy, they can reach the stratosphere being insoluble in rain nor metabolised by the troposphere agents.

Natural emissions (as the volcanic anhydrous HCl and the bromine containing metabolic products of some algae or microorganism) are also involved in the ozone cycle. The alert for the human health and environment damages, brings to the Montreal Protocol (1987) and to the executive Treatises, that banned the CFC productions. So several Industries converted their productions to that of the hydro-chlorofluorocarbons (HCFC shortly living in the lower atmosphere) and of hydro-fluorocarbons (HFC) and fluorocarbons (FC).

This industrial conversion was accomplished easily, because the basic alternative technologies are still operative¹. The Montreal Treatise do not was initially accepted by several Countries, as China, India, Indonesia, Malaysia etc., that ask unsuccessfully do not pay for the new technologies.

¹ Another problem: HFC, FC and the Global Warming

Unfortunately (or fortunately) the environmental compartments are all connected and interacting: so that the use of these new compounds had consequences on all the atmospheric cycles. This is the case of the substitution of CFC with the HFC and FC. Both these family of gases increase the green house effect and consequently the global warming. Actually these gases today are present in the atmosphere just in traces; however they cannot easily destroyed by the natural processes: the HFC can be attacked only by the rare OH radicals, that subtract their hydrogen atom, giving the start of a cascade of oxidation reactions. The FC in turn, composed only by fluorine and carbon atoms, are not destroyed by whatever atmospheric or stratospheric agent, becoming practically immortal. So their accumulation in the troposphere will be significant in some years. Several industries, then, are starting to produce other cooling organic and not toxic fluids, relatively easy to be metabolised by natural processes in the case of dispersion into the environment.

Why the Arctic ozone hole appeared only in 2011?

The first explanation refers to the increase of winter temperatures of the Arctic Ocean and troposphere: this imply, on the other hand, a cooling of the lower layers of the stratosphere to maintain the radiative balance. Moreover, the Arctic atmosphere (and Antarctic too) is lowered for the Earth rotation, so that the troposphere is confined up to 7-8 km against the 14-15 km of the middle latitudes.

The higher atmospheric clouds, very rich of summer humidity, enter into the cold layers of the polar stratosphere with formation of very small, fine ice crystals, that remain suspended for the absence of vertical remixing.

The complexes between chlorine and nitrogen oxides (the last released by the transpolar jet aircrafts) (ClNO_2 and ClONO_2), are adsorbed on those crystals that melts during the first months of the spring, making free the ozone killers. Actually this mechanism was evoked also for the Antarctic ozone cycle, beside the vortex hypothesis.

A strange coincidence

On September, 24, 2011, one of the UARS (Upper Atmosphere Research Satellite) satellites, dedicated to the study of stratospheric ozone (see Figure 3) dropped in the Pacific Ocean. It has been operating from 1991 up to 2005, when it was electronically deactivated. Its original orbit (at 604 km, 57° inclined) during 2010 become unstable, so its entrance in the atmosphere made necessary some emergence manoeuvres for the International Space Station, to avoid contact with its white-hot detritus, and alarming many Countries, including Northern Italy.



Figure 4 – UARS

Conclusions

The appearance of a second “ozone hole” on the Northern Pole open several hypotheses:

- A) the problem of synthetic chemicals capable to kill the stratospheric ozone must be reconsidered;
- B) the time necessary for making executive the Montreal Protocol and Treatise become much more longer, for the resistance Governments of Countries with new economies standing out;
- C) the estimated time (30 – 35 years) for the destruction of chlorine containing gases by the slow natural spontaneous atmospheric processes was highly underestimated;
- D) the accumulation of natural ozone killing emissions, as volcanic anhydrous HCl or bromine containing compounds from some algae and microorganism, was recently accelerated by means of different mechanisms (increased by particular volcanic eruptions, metabolic activity due to the Global Warming); all these processes could be move back the ozone balance;
- E) new industrial products must be considered potentially dangerous not only for the humans, but also for the environment. Laboratory proves should be no longer sufficient. In any case the industries need many time and economic investments before to introduce new substitutive technologies. As in the case of CFC the possibility to transform the production into HFC and FC, was easy, since the corresponding technologies were already operative for other industrial applications.

References:

1. Solomon, S., Garcia, R. R., Rowland, F. S. & Wuebbles, D. J. On the depletion of Antarctic ozone. *Nature* 321, 755–758 (1986);
2. Farman, J. C., Gardiner, B. G. & Shanklin, J. D. Large losses of total ozone in Antarctica reveal seasonal ClO_x/NO_x interaction. *Nature* 315, 207–210 (1985)
3. Molina, M.J., Rowland, F.S., *Nature* (1974);
4. Anderson, J. G., Brune, W. H. & Proffitt, M. H. Ozone destruction by chlorine radicals within the Antarctic vortex: the spatial and temporal evolution of $\text{ClO}-\text{O}_3$ anticorrelation based on *in situ* ER-2 data. *J. Geophys. Res.* 94, 11465–11479 (1989);
5. Schoeberl, M. R. & Hartmann, D. L. The dynamics of the stratospheric polar vortex and its relation to springtime ozone depletions. *Science* 251, 46–52 (1991);
6. Solomon, S. “Stratospheric ozone depletion: a review of concepts and history”. *Rev. Geophys.* 37, 275–316 (1999);
7. The World Meteorological Organization - “Scientific Assessment of Ozone Depletion: 2010” – Report 52. Global Ozone Research and Monitoring Project, (2011);
8. Manney, G. L., et al., “Variability of ozone loss during Arctic winter (1991–2000) estimated from UARS Microwave Limb Sounder measurements”. *J. Geophys. Res.* 108, 4149, <http://dx.doi.org/10.1029/2002JD002634> (2003);
9. G.L. Manney et al., “Unprecedented Arctic ozone loss in 2011”. *Nature* 2/10/2011, doi: 10.1038/nature 10556 ;
10. The NASA’s UARS Reports. “Final Update: Nasa’s UARS Re-enter in Earth Atmosphere (<http://www.nasa.gov/mission-pages/uars/index.html/>).

La scoria da siviera: caratterizzazione ed utilizzazione.

Ladle furnace slag: characterization and exploitation.

Nota del Socio Riccardo Sersale

(Adunanza del di 2 dicembre 2011).

Riassunto. La Nota esamina le caratteristiche idrauliche della scoria da siviera, al fine di valutarne sia la possibile utilizzazione come materiale cementizio supplementare, sia come attivatore della scoria d'alto forno granulata in miscela al 50%. Viene descritta la composizione mineralogica e chimica della scoria da siviera e valutata la resistenza meccanica di provini di malta, confezionati sia con il prodotto puro, che con la miscela scoria da siviera/scoria d'alto forno granulata. Si pone in luce che la scoria da siviera pura e la sua miscela con scoria d'alto forno granulata possono essere con successo impiegate come materiale cementante supplementare in applicazioni che richiedono leganti.

Parole chiave: Scoria da siviera. Prodotto cementante supplementare.

Summary. The paper gives an account on the hydraulic characteristics of the ladle slag, with a view of using it as supplementary cementing material and as blastfurnace granulated slag activator in a 50% blend. Mineralogical and chemical composition of ladle furnace slag are described, evaluating strength development on mortar prisms, prepared both with pure ladle furnace slag and with blends ladle furnace slag/blastfurnace granulated slag. It has been emphasized that ladle furnace slag and its blend with blastfurnace granulated slag can be favorably used as supplementary cementing material in binder application.

Key words: Ladle furnace slag. Supplementary cementing material.

La siviera è un recipiente di lamiera, a forma di secchia, normalmente cilindrico, rivestito all'interno di materiale refrattario, destinato a ricevere il metallo fuso da forno ed a trasportarlo e versarlo nelle forme. Si costruisce nelle più svariate dimensioni, con portate variabili fino a decine di tonnellate, trasportata a mano, o montata su carrello, con dispositivi per il rovesciamento.

I tipi di maggiore portata sono in genere predisposti per la colata attraverso un foro situato sul fondo, chiuso da un tappo di materiale refrattario manovrabile con un'asta sporgente verso l'alto ed offrono il vantaggio di non fare uscire le scorie che, più leggere, galleggiano sulla massa fusa.

Com'è noto, l'industria siderurgica genera scorie, i cui tipi principali sono: scoria d'alto forno, scoria basica di forno ad ossigeno, scoria da siviera.

La scoria d'altoforno, che costituisce un sottoprodotto idoneo alla produzione di cementi compositi, viene colata direttamente in acqua ove solidifica istantaneamente, granulandosi in forma sabbiosa. Acquista carattere amorfo e reca alto contenuto di vetro. Avendo idraulicità latente richiede l'attivazione che è operata dalla miscela con clinker di Portland.

La scoria da convertitore ad ossigeno e quella da siviera sono cristalline, perché lentamente raffreddate alla temperatura ambiente.

La composizione mineralogica di tali scorie è notevolmente differente in funzione della composizione dei prodotti generatori di scoria, impiegati in ciascuna operazione.

Tipici minerali rilevati nella scoria da convertitore ad ossigeno sono: silicato bicalcico, analoghi della wustite con manganese e magnesio e calce libera.

Quelli rilevati nella scoria da siviera sono: alluminati di calcio e forme polimorfe di silicato bicalcico.

Una notevole differenza fra scoria da siviera e scoria da convertitore ad ossigeno è rappresentata dall'alto contenuto di alluminato di calcio della prima.

Il processo di raffinazione dell'acciaio, che origina la scoria da siviera esaminata, richiede modalità operative differenti in funzione del tipo di acciaio che si intende produrre.

La raffinazione è normalmente associata a trattamenti di disossidazione, rimozione d'inclusioni, addizione di elementi leganti, desolfurazione, controllo della temperatura del bagno d'acciaio ed altro. Per tale ragione la composizione chimica della scoria da siviera che si genera nella raffinazione può variare, pur rimanendo relativamente stabile quella mineralogica.

Gli ossidi principali sono: CaO , Al_2O_3 , SiO_2 ed MgO , ma il contenuto di MnO può anche raggiungere livelli significativi, a seconda della qualità dell'acciaio che si produce.

Nella scoria da siviera, l'impiego di alluminio come agente disossidante contribuisce alla formazione di alluminati di calcio come la mayenite (C_{12}A_7) ed alluminato tricalcico (C_3A). E' generalmente accettato che gli alluminati di calcio siano altamente idraulici e reagiscano rapidamente con l'acqua, specialmente la mayenite (1).

L'idratazione di differenti alluminati di calcio comporta la formazione di idrati, quali: C_2AH_8 , C_4AH_{13} , CAH_{10} e C_3AH_6 (2), che conferiscono resistenza al prodotto. Fra tali idrati, solo C_3AH_6 è termodinamicamente stabile (3). Pertanto, tutti gli altri idrati si convertono in C_3AH_6 come prodotto finale. Il processo di conversione influenza negativamente la resistenza del prodotto.

Ancorché siano state compiute diverse ricerche sul valore idraulico della scoria da siviera, i risultati sembrano tuttora insufficienti.

Recentemente la scoria da siviera è stata caratterizzata, con lo scopo di impiegarla come un materiale da costruzione (4). L'analisi mineralogica ha, fra l'altro, posto in luce fasi cristalline come C_{12}A_7 , C_3A e forme polimorfe di C_2S ed è stato suggerito che la scoria da siviera può esser utilizzata in costruzioni ed applicazioni civili. E' stato anche sottolineato che la presenza di periclasio libero e la carbonatazione favoriscono modificazioni volumetriche, che devono esser attentamente valutate prima che il prodotto venga destinato a qualsivoglia applicazione.

La scoria da siviera è stata anche esaminata per poter esser impiegata come materia prima per la produzione di cementi belitici solfoalluminosi (SAB) (5). Differenti miscele di scoria, nonché di scoria da siviera pura, sono state riscaldate a 1200°C . Successivamente il clinker SAB temprato, è stato caratterizzato e sono state valutate le sue proprietà idrauliche.

Si è rilevato che la scoria di acciaieria, così come la scoria da siviera, hanno buona possibilità d'impiego come materia prima per la produzione di cementi SAB a lento indurimento (6).

La scoria da siviera contenente ferro e residui di acciaieria, utilizzata come legante supplementare per mattonelle legate a freddo, produce un risparmio di costi interni ed esterni nelle acciaierie. Una parziale sostituzione di cemento Portland ordinario, tradizionalmente usato come legante per mattonelle, con scoria da siviera, potrebbe inoltre produrre un risparmio sul costo del legante e ridurre il tonnellaggio di scoria da siviera da inviare allo scarico.

Nell'intento di valutare più compiutamente le caratteristiche idrauliche della scoria da siviera e poterla impiegare come sostituto del cemento in alcune applicazioni, è stata ultimamente condotta un'ampia ricerca sperimentale, prendendo in esame sia campioni di scoria di siviera lentamente raffreddata, sia una scoria d'alto forno super-raffreddata, recante il 98% di contenuto di vetro per effetto di granulazione, provenienti da una fabbrica svedese di acciai ad alta resistenza (SSAB EMEA) (7).

La loro composizione è riportata in Tab. I.

Tab. I – Composizione della scoria da siviera e della scoria granulata

	FeO	CaO	SiO₂	Mn₂O₃	Al₂O₃	MgO	Na₂O
Siviera	4.8	40.0	5.0	8.1	32.5	5.9	0
Granulata	0.4	30.2	34.2	0.8	12.9	17.3	0.5

L'ammontare di fasi cristalline, presente nella scoria da siviera, determinato per diffrazione dei raggi X (analisi Rietveld), è risultato prossimo al 60%. Quello di fase amorfa, calcolato separatamente con un secondo e terzo esame roentgenografico ed impiegando quarzo puro come standard interno, è risultato prossimo al 35%, con un errore dell'ordine del 5% (7).

E' stato rilevato che la composizione della scoria da siviera reca alcune fasi idrauliche conosciute, fra le quali predominano gli alluminati. La mayenite (C_3S 12% in peso) è generalmente presente quale fase minore dei cementi calcio alluminosi (CAC), ma frequentemente si presenta come costituente maggiore nelle scorie da siviera svedesi.

L'alluminato tricalcico, un componente essenziale nel cemento Portland ordinario, è presente per circa il 9% in peso. Altri minerali benefici sono il beta- C_2S (circa 6% in peso), a fondo studiato nel cemento Portland ordinario) e la fase principale posta in luce nel gruppo delle gehlenite conosciuta come pleochroite, la fase Q, di morfologia aciculare, che si rinviene in alcuni cementi ad alto contenuto d'allumina e con più dell'1% di MgO (8). Alla fase Q venne originariamente assegnata la formula $\text{C}_6\text{A}_4\text{MS}$.

La fase Q può influenzare le proprietà idrauliche della scoria da siviera, formando inizialmente idrati simili a quelli rilevati in cementi ad alto contenuto d'allumina a temperatura ambiente (9).

La wustite (FeO), presente in circa il 7%, si ritiene formi una soluzione solida con il manganese e la magnesio. FeO e/o (Fe , Mg , Mn) O non sembra abbiano una influenza determinante sulle proprietà idrauliche. Un aspetto interessante di (Fe , Mg , Mn) O è che la soluzione solida è debolmente idraulica e non contribuisce ad un'espansione volumetrica, come farebbe MgO libero.

Al fine di valutare l'utilizzo della scoria da siviera sia come materiale cementizio supplementare, sia come possibile attivatore della scoria d'altoforno granulata, sono, fra l'altro, state effettuate prove di resistenza a compressione (7).

Prismi di malta preparati con scoria da siviera hanno esibito buon comportamento, raggiungendo dopo due giorni 33.1 MPa e 34.9 MPa dopo sette giorni, come si rivela dalla Fig.1.

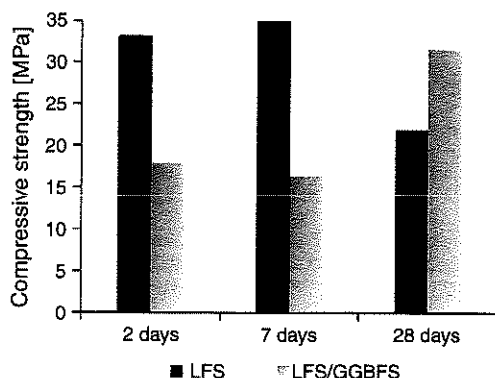


Fig.1 - Sviluppo della resistenza a compressione di prismi di malta.

Lo sviluppo di resistenza si accorda con la formazione di alluminato di calcio idrato, una fase esagonale che appartiene alle fasi AFm, C_2AH_8 ed alluminato tetracalcico idrato C_4AH_{19} , che sono stati rilevati dopo 24 ore in campioni analizzati con calorimetria. A partire da 7 giorni fino a 28 giorni d'idratazione, la resistenza a compressione si abbassa di 13 MPa, segnando 21.9 MPa, ciò che si giustifica con una conversione a C_3AH_6 termodinamicamente stabile, una fase di tipo idrogranato. Il risultato suggerisce anche che la fase Q, in questo stadio dell'idratazione, non ha dato origine a significativa formazione di stratlingite, considerata un prodotto d'idratazione della fase Q, poiché la sua formazione avrebbe impedito il declino della resistenza. Il risultato convalida anche la funzione della fase amorfa presente per circa il 35%.

Com'era prevedibile, la miscela con scoria d'alto forno granulata reagisce più lentamente della scoria da siviera pura. La resistenza a 2 giorni denuncia 17.9 MPa e 16.4 dopo 7 giorni.

La resistenza a 28 giorni, però, risulta superiore a quella della scoria da siviera, raggiungendo 31.6 MPa. Tale incremento è da attribuire alla formazione di stratlingite, ciò che si giustifica con un effetto di attivazione della scoria d'alto forno granulata, già evidente dopo 24 ore alla stessa temperatura.

Conclusioni.

La scoria da siviera e la sua miscela con scoria d'altoforno granulata possono esser utilizzate come legante supplementare per la produzione di mattonelle amalgamate a freddo, grazie all'influenza positiva di $C_{12}A_7$ e C_3A sulla formazione di alluminati in lamelle esagonali e stratlingite, contribuendo allo sviluppo di resistenza a compressione a 28 giorni.

La miscela scoria da siviera/scoria d'alto forno granulata impedisce inoltre il declino di resistenza che interessa i provini della scoria da siviera dopo 28 giorni, declino attribuibile alla formazione di stratlingite, già iniziata dopo 24 ore. La sua idratazione è ritenuta un prodotto di trasformazione della fase Q che avviene però lentamente, come dimostra la sua presenza fra i prodotti non reagiti, rilevata dopo 24 ore (7). Deve anche esser sottolineato che la reattività a breve termine della fase amorfa contribuisce limitatamente allo sviluppo di resistenza fino a 28 giorni d'idratazione, rispetto all'effetto della scoria d'alto forno.

Volendo utilizzarla come legante, sarebbe interessante studiare la possibilità di aumentare il contenuto di alluminati di calcio nella scoria da siviera in corso di produzione ed abbassare quello di fasi del sistema $CaO-Al_2O_3-MgO-SiO_2$, che cristallizzano prima ad alluminati di calcio nel prodotto raffreddato lentamente, ad esempio la fase Q. Ciò potrebbe realizzarsi diminuendo i contenuti di silice e magnesio fin dove è possibile ed aumentando l'impiego di allumina durante la raffinazione dell'acciaio.

Il fatto che gli alluminati di calcio reagiscono rapidamente con l'acqua suggerisce poi che è necessario riconsiderare il metodo di maneggio della scoria da siviera, evitando ogni esposizione agli agenti atmosferici o bagnamento nei limiti del possibile, al fine di realizzarne una più vantaggiosa utilizzazione.

Bibliografia

1. Raab B., Stober S., Pollmann H. Investigations on the Hydration behaviour of pure cement phases by different synthesis methods. Proc. Centenary Conferente. 79-92. Avignon (2008).
2. Benstedt J. Calcium aluminate cements. In: Structure Performance of Cements, 2nd E&FN Spoon. London. Chapt. 4, 114-138 (2002).
3. Odler I. Calcium aluminate cement. Special Inorganic Cements. E&FN Spoon. London. Chapt. 10, 173-201 (2000).
4. Setién J., HernandezD., Gonzales J.J. Characterization of ladle furnace slag for use as construction material.- Construction Building Mat.,23, 1788-1794 (2009).
5. Adolfsson D., Menad N., Viggh E., Bjorkman B. Steelmaking slags as raw material for sulphoaluminate belite cement. Advances Cement Res., 19, 147-156 (2007).
6. Adolfsson D., Menad N., Viggh E., Bjorkman B. Hydraulic properties of sulphoaluminate belite cement based on steelmaking slags. Advances Cement Res., 19, 133-138 (2007).
7. Adolfsson D., Robinson R., Engstrom F., Bjorkman B. Influence of mineralogy on the hydraulic properties of ladle slag. Cement Concrete Res., 41,8, 865-871 (2011).
8. Dourdonis E., Stivanakis V., Angelopoulos G.N.,Chaniotakis E., Frogoudakis E., Papanastasion D., Papamantellos D.C. High-alumina cement production from Fe-Ni-ERF slag, limestone and diasponic bauxite. Cement Concrete Res., 34, 941-947 (2004).
9. Kapralic I., Svetula L., Hanic F. Hydratation and hydraulic properties of the Q-phase in the system $\text{CaO-Al}_2\text{O}_3\text{-MgO-H}_2\text{O}$ referred to high alumina cements. Cement Concrete Res., 19, 519-526 (1989).

A Review on Relative and Absolute Laws in General Relativity

Nota del Socio ordinario Antonio Romano *

presentata nell'Adunanza del 2 Dicembre 2011.

Abstract

In special relativity well established criteria allow us to derive the physical laws relative to an *inertial* frame starting from their 4-dimensional formulation and viceversa. Determining analogous criteria in General Relativity is a more difficult task. In this paper, three physical assumptions are proposed to derive the laws relative to a *general* frame of reference. After analyzing the mathematical implications of these assumptions on the structure of the space-time, we derive the relative laws starting from the absolute ones. First, we determine the momentum equation and the energy equation of a material point relative to an arbitrary frame of reference from the four dimensional momentum-energy equation and we compare them with the equations proposed by other authors. Then, the proposed procedure is applied to determine the *relative* charge conservation, the *relative* Maxwell equations, and the *relative* balance equations of an incoherent fluid.

1 Introduction

Einstein derived the Lorentz transformations from the optical isotropy principle and the relativity principle. As a consequence of the relativity principle, the physical laws must be covariant, that is, invariant under Lorentz transformations. After verifying the covariance of Maxwell's equations under these transformations, Einstein determined the equation governing the dynamics of a particle in special relativity.

Later, Minkowsky proposed a geometric formulation of special relativity adopting a pseudo-Euclidean 4-dimensional space V_4 as a model of space-time. The hyperbolic nature of the metrics allows us to define at any point $\mathbf{x} \in V_4$ a cone $C_{\mathbf{x}}$, called the light cone at $\mathbf{x}$. In this model, any inertial frame I is represented in V_4 by an orthogonal frame of reference $\mathbb{R} = Ox^1x^2x^3x^4$ with the

*Dipartimento di Matematica e Applicazioni, R. Caccioppoli, Università Federico II, Napoli.e-mail antroman@unina.it

forth axis Ox^4 contained in the light cone C_O . As a consequence, the Lorentz transformation between two inertial frames I and I' is regarded as an orthogonal transformation between the orthogonal frames $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}'$, corresponding in V_4 to the inertial frames I and I' , respectively. Then, the principle of relativity is satisfied by those physical laws that can be written as tensor equations of V_4 . In conclusion, in this formulation of special relativity, the correspondence between physical quantities and geometric objects of V_4 is well defined. In other words, the rule is given to go from the physical description of a phenomenon in an inertial frame to its geometric formulation in the corresponding *orthonormal* frame of V_4 .

To overcome the contradictions contained in Newton's theory of gravitation, Einstein adopted a hyperbolic Riemannian manifold as a model of space-time V_4 , assigning to the metrics of V_4 the task to describe the gravitation. Geometrically, the principle of equivalence states that the gravitational field can be eliminated in a small neighborhood of any point $\mathbf{x} \in V_4$ adopting *local geodesic coordinates*, that differ for second order terms from the rectilinear coordinates of Minkowski's space. Further, Einstein supposed that the *absolute* laws of special relativity hold only in these coordinates, i.e., in the absence of gravitation. Referring these laws to an arbitrary system of coordinates of V_4 , the *absolute* form of the physical laws can be obtained in any frame of reference. After supposing that the metrics of V_4 is determined from the distribution of mass and energy, Einstein formulated the celebrated equations relating the gravitational field to the curvature of space-time.

This elegant formulation of physics places us in a 4-dimensional Riemannian manifold V_4 without attributing a physical meaning to the many geometric structures equipping V_4 . Only the equivalence principle introduces a correspondence between V_4 and the physical world associating the proper frames with the geodesic coordinates in V_4 . On this basis, this correspondence outlines the only way going from V_4 to the real world. All the papers devoted to the problem of deducing the physical laws, i.e., their *relative form* from the corresponding 4-dimensional ones have the same starting point: the natural decomposition of any tensor quantity of V_4 in space and time tensors in a geodesic frame. By an extensive use of this decomposition of tensors of V_4 , in some papers (see, for instance, [1]-[12]) are derived relative laws that are justified by their similarity with the corresponding classical laws in accelerated frames of reference. In other papers (see, for instance, [15]-[17], [14], [23]) many affine connections are introduced in V_4 that are, in a certain sense, compatible with the Riemannian metrics of V_4 . Then, it is shown that only one of these connections verifies the Fermi-Walker transport (see [13], [21]). It is just this connection which is used to obtain the relative laws. Finally, in other papers (see, for instance, [28],[19]) fields of Lorentz frames are introduced on V_4 (tetrad fields) together with affine connections in the fibre bundle of tetrad fields to relate one Lorentz frame to another one. Once again, the connection related to the Fermi-Walker transport is chosen to obtain reasonable relative laws. In the cited papers some geometric structures are introduced "a priori" in V_4 and then their physical meaning is recognized. The same procedure is adopted in [36], [37]. In the present paper,

we propose convincing *physical assumptions* to derive the relative form of physical laws and we analyze the corresponding geometric structures they introduce in V_4 . We explicitly notice that this paper contains some well known results here included for completeness. From now on, we say that a physical law is expressed in *relative form*, when it is referred to an arbitrary physical frame of reference R , and in *absolute form*, when it is written in arbitrary coordinates of V_4 . Then, from the above physical assumptions, we derive the relative equations of momentum and energy of a moving particle, already obtained on different bases. Finally, this analysis is extended to the charge conservation, Maxwell's equations and continuum mechanics. In such a way, we find how the observer in the frame of reference R describes the action of the gravitational field on a moving particle, an electromagnetic field or a continuous system.

In section 2 we adopt the usual definition of a frame of reference R as a continuum of ∞^3 particles. Its representation in V_4 is given by the set of the world-lines of these particles that are supposed to form a time-like congruence Γ , covering a region W of V_4 . The frame R will be *local* if $W \subset V_4$, *global* if W coincides with V_4 . Let $\mathbf{x} \in W$ be an event and denote by γ the unit vector tangent at $\mathbf{x}$ to the unique curve of Γ containing $\mathbf{x}$. It is well known that (see Appendix) *geodesic coordinates* $(\bar{x}^\alpha)$ exist in a neighborhood of $\mathbf{x} \in V_4$ such that the corresponding holonomic base at $\mathbf{x}$ is a Lorentz base, whose fourth axis is γ . These coordinates give the geometric representation of the proper inertial frame $\bar{I}_{\mathbf{x}}$ (the freely gravitating cabin) of the particle of R , at the event $\mathbf{x}$. In this frame, in view of the equivalence principle, there is no gravitation. For the observer $\bar{I}_{\mathbf{x}}$, the special relativity locally holds so that he knows how to obtain the physical quantities from 4-vectors and 4-tensors.

The fundamental role of $\bar{I}_{\mathbf{x}}$ in formulating physical laws relative to R is stated by the following assumption (see [1]-[4]):

Assumption 1. *The observer in the frame of reference R adopts at $\mathbf{x}$ the measures of the physical quantities carried out by the observer in $\bar{I}_{\mathbf{x}}$, after expressing them in terms of his arbitrary coordinates.*

In other words, the observer in R entrusts the observer in $\bar{I}_{\mathbf{x}}$ with the task of measuring physical quantities *in the absence of gravitation* with the aim to adopt the results of $\bar{I}_{\mathbf{x}}$, after expressing them in terms of his arbitrary coordinates.

This assumption is more or less explicitly accepted in all the papers about this subject; moreover, in [1] it is justified assuming that the measuring rods have a length independent on their acceleration relative to an inertial frame. In any case, it is used to define the measures of elementary lengths and time intervals.

Geometrically, this procedure corresponds to the decompositions of the absolute quantities along $\gamma(\mathbf{x})$ and the three-dimensional vector space $\Sigma_{\mathbf{x}}$ of the 4-vectors orthogonal to $\gamma(\mathbf{x})$ (see [5]-[24]).

In particular, the above assumption makes possible to define the elementary spatial distance $d\sigma$ between two particles of the frame R and the elementary standard time interval dT relative to R between two events. Further, for a moving particle P , we can introduce kinematic and dynamic quantities relative

to R as the standard velocity, standard momentum, and so on, at any event of the time world-line $\mathbf{x}(\tau)$ of P , where τ is the proper time (Section 2).

It is important to remark that the above assumption, although it introduces a simple criterion to measure physical quantities, generates a "Babel effects" since all the quantities used by R , during the evolution of P , are supplied by different inertial observers $\bar{I}_{\mathbf{x}(\tau)}$, that are not related to each other. Consequently, it is impossible to describe the dynamic evolution of P without comparing the different information supplied by the observers $\bar{I}_{\mathbf{x}(\tau)}$. The second assumption, which introduces such a criterion, states that (see, for instance, [13]-[23], [34], [35]):

Assumption 2. *Along the time world-line of P , the spatial axes of the observer $\bar{I}_{\mathbf{x}(\tau+d\tau)}$ must be related to the spatial axes of $\bar{I}_{\mathbf{x}(\tau)}$ by a Lorentz transformation without rotation.*

In other words, the spatial axes of the different frames $\bar{I}_{\mathbf{x}(\tau)}$ undergo a Fermi-Walker transport along the world-line $\mathbf{x}(\tau)$ of P (Sections 3). Although the literature about the Fermi-Walker transport is very extensive (see, for instance, [13]-[23]), in Sections 4-6 we analyze the derivative $d_F \mathbf{V}/dT$ along $\mathbf{x}(\tau)$ of a 4-vector $\mathbf{V}$, introduced by the Fermi-Walker transport (F-W transport). That is done with the aim to put in evidence the relapse of the F-W transport on the arbitrary observer rather than the geometric structures that can be defined in V_4 by such a transport.

By the elementary spatial distance $d\sigma$ between two particles of R and the Fermi transport, it is possible to determine the evolution equation of $d\sigma$ along the world-line of an arbitrary particle of R (see [13]). This equation allows us to describe all the kinematic characteristics of the frame R (Section 7).

A first formulation of the relative equations of momentum and energy of a single particle P moving relative to R , has been proposed in [5]-[8] by a formal approach, which can be summarized as it follows. Consider a material particles P with a rest mass m_0 and denote by $\mathbf{x}(\tau)$ its world-line. Then, the absolute equation of motion is

$$\frac{dP^\alpha}{d\tau} = \Phi^\alpha, \quad (1.1)$$

where $d/d\tau$ is the absolute derivative along $\mathbf{x}(\tau)$, $P^\alpha = m_0 U^\alpha$ is the 4-momentum of P , $U^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ its 4-velocity and Φ^α the 4-force acting on P . Let R be a frame of reference defined by the time-like congruence Γ and denote by $\gamma(\mathbf{x})$ the unit vector field of the tangent vectors to Γ and by $\Sigma_{\mathbf{x}(\tau)}$ the three-dimensional space orthogonal to $\gamma(\mathbf{x}(\tau))$. After defining the standard momentum $\bar{\mathbf{p}}$ and the standard energy E , the relative equations of momentum and energy are obtained projecting (1.1) on the three-dimensional space $\Sigma_{\mathbf{x}(\tau)}$ and along γ , respectively, and introducing in the projection along $\Sigma_{\mathbf{x}(\tau)}$, without a physical motivation, a covariant *space* derivative of the standard momentum $\bar{\mathbf{p}}$ of P along its trajectory.

Denote by P_Σ the linear operator projecting a 4-vector on $\Sigma_{\mathbf{x}}$ and let $\tilde{\mathbf{v}} = P_\Sigma(dU^\alpha/d\tau)$ be the standard velocity (Section 9). Then, in [24], [25], these equations are obtained from the following assumptions:

- the force $\tilde{\mathbf{F}}$ relative to R equates the Fermi-Walker derivative $\frac{d_F}{dT}$ of the standard momentum $\tilde{\mathbf{p}}$ of the particle P and the power of $\tilde{\mathbf{F}}$ equates the derivative of the energy E

$$\frac{d_F \tilde{\mathbf{p}}}{dT} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (1.2)$$

$$\frac{dE}{dT} = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}; \quad (1.3)$$

- The equations (1.2), (1.3) are obtained projecting the equation (1.1) on $\Sigma_{\mathbf{x}(\tau)}$ and γ , respectively.

In [24], [25], some inconsistencies of the equations determined in [5]-[8] are pointed out. Further, some terms $\tilde{\mathbf{G}}$ of $\tilde{\mathbf{F}}$ are identified with the gravitational force since they have the same form of the inertial forces of classical mechanics.

Before going on, we remark that the gravitational force acting on the material particle P during its motion relative to the frame of reference R is given by the vector

$$\tilde{\mathbf{G}} = \frac{d_F \tilde{\mathbf{p}}}{dT} - P_\Sigma \left(\frac{dP^\alpha}{dT} \right). \quad (1.4)$$

Further, in special relativity the two terms on the right-hand side of (1.4) are equal and the gravitational force $\tilde{\mathbf{G}}$ vanishes. Finally, the first term has the same form as in special relativity, except for the substitution $d/dT \rightarrow d_F/dT$. In conclusion, we can obtain (1.2) and (1.3) stating that

Assumption 3. the relative quantities $\tilde{\mathbf{p}}$, E , $\tilde{\Phi} = \frac{d\tau}{dT} P_\Sigma(\Phi^\alpha)$, evaluated by the axiom 1 from P^α and Φ^α (i.e., in the absence of gravitation), satisfy equations obtained from the corresponding equations of special relativity, with the substitution $d/dT \rightarrow d_F/dT$ and the addition of the gravitational force (1.4) to the applied force $\tilde{\Phi}$.

Dynamics of a single material point P describes the evolution of the 4-momentum along the world-line of P . Therefore, the Fermi-Walker transport is sufficient to determine the corresponding relative equations of momentum and energy. Differently, the Maxwell equations and the balance equations of a relativistic continuum express differential relations among vectors and tensor fields in regions of space-time. Consequently, to obtain the relative form of these laws, in Sections 5 and 6, we define the Fermi-Walker *covariant derivative* $\overset{F}{\nabla}$, which naturally follows from the F-W transport, in the fibre bundle $\bigcup_{\mathbf{x} \in V_4} \Sigma_{\mathbf{x}}$.

It remains to generalize the assumption 3 to obtain the relative form of the physical laws starting from their absolute form. Let A be a set of tensor fields satisfying a system B of differential equations in an arbitrary inertial frame I of the special relativity. Denote by $\mathfrak{A}$ the tensor fields representing the fields A in the space-time V_4 of general relativity. Furthermore, let $\mathfrak{B}$ be the covariant formulation in V_4 of the equations B . For instance, for the density of current $\mathbf{j}$

and the charge density ρ , we have that $A = (\mathbf{j}, c\rho)$, B reduces to the equation

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.5)$$

$\mathfrak{A}$ is the current 4-vector (J^α) and $\mathfrak{B}$ is given by the covariant equation

$$\nabla_\alpha J^\alpha = 0. \quad (1.6)$$

Finally, we denote by $\tilde{A}$ the physical quantities evaluated by the observer R according to the axiom 1, that is in the absence of gravitation, starting from the tensor fields $\mathfrak{A}$. Then, we extend the **Assumption 3** as it follows

Assumption 4. *The physical quantities $\tilde{A}$ satisfy the equations $\tilde{B}$ that are obtained from B , that is, from the equations that the quantities A satisfy in special relativity, by the following correspondence rules*

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d_F}{dT}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial_F}{\partial T}, \quad \nabla \rightarrow \tilde{\nabla}, \quad (1.7)$$

where $\frac{\partial_F}{\partial T}$ is the F - W derivative along a curve of the frame R . Further, the difference between the space and time projections of the absolute equations $\mathfrak{B}$ and $\tilde{B}$ give the interaction between the fields $\tilde{A}$ and the gravitational field.

For instance, in a frame R , instead of 1.5, we obtain

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{j}} + \frac{\partial_F \tilde{\rho}}{\partial T} = \phi, \quad (1.8)$$

where

$$\phi = \left(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{j}} + \frac{\partial_F \tilde{\rho}}{\partial T} \right) - P_\Sigma(\nabla_\alpha J^\alpha). \quad (1.9)$$

In this way, in Section 10 we determine the relative form of the continuity equation of charge, whereas in Sections 11 and 12 we find the relative forms both of the Maxwell equations and the balance equations of an incoherent fluid. On the right-hand side of all these relative equations there appear terms which describe the interactions of charges and currents with the gravitational field.

2 Time-Like Congruences

Let V_4 be a 4-dimensional Riemannian manifold whose metric tensor $\mathbf{g}$ has hyperbolic signature $(+, +, +, -)$ and let $T_{\mathbf{x}}V_4$ be the vector tangent space to V_4 at the point $\mathbf{x} \in V_4$. Then, any vector $\mathbf{V} \in T_{\mathbf{x}}V_4$ is said to be, respectively, a *space-like vector*, a *light-like vector*, or a *time-like vector* according to whether it verifies the first, the second or the third of the following conditions

$$\mathbf{g}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) > 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) < 0.$$

Definition 2.1 The element $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_\alpha)$ of the tangent bundle TV_4 , $\alpha = 1, \dots, 4$, is a *Lorentz frame* at $\mathbf{x}$ if

$$\mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \eta_{\alpha\beta},$$

where $\eta_{\alpha\beta} = 0$, if $\alpha \neq \beta$, and $\eta_{ii} = 1$, $i = 1, 2, 3$, $\eta_{44} = -1$.

Definition 2.2 A curve γ of V_4 is *time-like* if its tangent vector is time-like at any point of γ .

It is evident how to define a light-like curve and a space-like curve of V_4 .

Definition 2.3 A *time-like congruence* Γ on the region $W \subset V_4$ is a family of time-like curves such that any point $\mathbf{x} \in W$ belongs to one and only one curve of Γ .

Definition 2.4 A system of coordinates (y^α) , $\alpha = 1, \dots, 4$, is said to be *adapted* to the congruence Γ if the curves $y^4 = \text{var.}$ locally coincide with the curves of Γ .

If $(\mathbf{e}_\alpha)$ denote the natural base of these coordinates, then the vector field $\mathbf{e}_4$ is tangent to the curves of Γ . In adapted coordinates the unit vector field $\gamma = \mathbf{e}_4/(\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4)$ has, respectively, the following contravariant and covariant components

$$\gamma^\alpha = (0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}}), \quad (2.1)$$

$$\gamma_\alpha = g_{\alpha 4} \gamma^4 = \frac{g_{\alpha 4}}{\sqrt{-g_{44}}}. \quad (2.2)$$

A change of adapted coordinates is expressed by the functions

$$y'^i = y'^i(y^1, y^2, y^3), \quad (2.3)$$

$$y'^4 = y'^4(y^1, y^2, y^3, y^4), \quad (2.4)$$

$i = 1, 2, 3$.

Theorem 2.1 Let Γ be a time-like congruence in the region W of V_4 and let $\gamma(\mathbf{x})$ be the unit time-like vector field tangent to the curves of Γ . Then, in a neighborhood of any $\bar{\mathbf{x}} \in W$, there are local coordinates $(\bar{x}^\alpha)$, named *geodesic coordinates*, with the following properties:

- The coordinates of $\bar{\mathbf{x}}$ vanish.
- $\gamma(\bar{\mathbf{x}})$ is the tangent vector at $\bar{\mathbf{x}}$ to the coordinate curve $\bar{x}^i = 0$, $i = 1, 2, 3$, $\bar{x}^4 = \text{var.}$
- The curves $\bar{x}^i = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$, $\bar{x}^4 = \text{var}$ are time-like in a neighborhood of $\bar{\mathbf{x}}$. Therefore, they locally define a time-like congruence to which they are adapted.
- It results

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{x}}) = \eta_{\alpha\beta}, \quad \bar{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha(\bar{\mathbf{x}}) = 0. \quad (2.5)$$

Then, the covariant derivative at $\bar{\mathbf{x}}$ coincides with the ordinary derivative. Further, $\bar{\mathbf{x}}$ and the natural base $(\bar{\mathbf{e}}_i, \gamma(\bar{\mathbf{x}}))$ form a Lorentz base;

- The world-line of the origin of $I_{\bar{\mathbf{x}}}$, in a neighborhood of $\bar{x}^4 = 0$, is an arc of geodesic.

For completeness, the proof of the above known theorem is given in the Appendix.

Let Γ be the time like congruence in the region $W \subset V_4$ and denote by $\gamma(\mathbf{x})$ the unit vector field tangent to the curves of Γ . $\forall \mathbf{x} \in W$, we consider the one-dimensional vector space $\Theta_{\mathbf{x}}(\gamma)$ of the all time-like vectors such that

$$\Theta_{\mathbf{x}}(\gamma) = \{\mathbf{u} = \lambda\gamma, \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad (2.6)$$

as well as the three-dimensional space

$$\Sigma_{\mathbf{x}}(\gamma) = \{\tilde{\mathbf{v}} \in T_{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}} \cdot \gamma = 0\}, \quad (2.7)$$

of the all space-like vectors $\tilde{\mathbf{v}}$, which are orthogonal to γ at $\mathbf{x}$. For any choice of the orthonormal triad $(\mathbf{a}_i) \in \Sigma_{\mathbf{x}}(\gamma)$, we obtain a Lorentz frame $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i, \gamma(\mathbf{x}))$ at $\mathbf{x}$.

Let $T_{\mathbf{x}}$ be the tangent space to the space-time V_4 at the point $\mathbf{x} \in W$. Then, any 4-vector $\mathbf{V} \in T_{\mathbf{x}}$ can be written as the sum of a space-like vector $P_{\Sigma}(\mathbf{V}) = \tilde{\mathbf{v}} \in \Sigma_{\mathbf{x}}(\gamma)$ and a time-like vector $P_{\Theta}(\mathbf{V}) \in \Theta_{\mathbf{x}}(\gamma)$:

$$\mathbf{V} = P_{\Sigma}(\mathbf{V}) + P_{\Theta}(\mathbf{V}). \quad (2.8)$$

If we put $P_{\Theta}(\mathbf{V}) = \mu\gamma$, then, the scalar product of (2.8) and γ , since $\gamma \cdot \gamma = -1$, gives us the value of μ

$$\mu = -\gamma \cdot \mathbf{V}. \quad (2.9)$$

Substituting this expression into (2.8), we finally get

$$P_{\Sigma}(\mathbf{V}) = (\mathbf{g} + \gamma \otimes \gamma)\mathbf{V}, \quad (2.10)$$

$$P_{\Theta}(\mathbf{V}) = -(\gamma \cdot \mathbf{V})\gamma. \quad (2.11)$$

Let (x^i) be an arbitrary system of coordinates in a neighborhood of $\mathbf{x}$ and let (g_{ij}) be the components of the metric tensor in these coordinates. Then, the components of the tensor $\mathbf{g} + \gamma \otimes \gamma$ are

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}. \quad (2.12)$$

For the extension of the decomposition (2.8) to any tensor, see [5], [6], and [7]. From now on we name *space vectors* and *time vectors* the vectors belonging to $\Sigma_{\mathbf{x}}(\gamma)$ and $\Theta_{\mathbf{x}}(\gamma)$, respectively.

Remark 2.1 For any space tensor we can use both the tensors $g_{\alpha\beta}$ and $\gamma_{\alpha\beta}$ to relate contravariant and covariant components. In other words, $\gamma_{\alpha\beta}$ defines a scalar product in any three-dimensional subspace $\Sigma_{\mathbf{x}}(\gamma)$.

The pseudo-tensor

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta\mu} = \eta_{\alpha\beta\mu\delta}\gamma^{\delta} \equiv \sqrt{-g}\epsilon_{\alpha\beta\mu\delta}\gamma^{\delta}, \quad (2.13)$$

where $g = \det(g_{\alpha\beta})$ and $\epsilon_{\alpha\beta\mu\delta}$ is the Levi-Civita symbol, is a *space* pseudo-tensor since, from the symmetry of $\gamma^\alpha\gamma^\delta$ and the skew-symmetry of $\epsilon_{\alpha\beta\mu\delta}$, it follows that

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta\mu}\gamma^\alpha = \eta_{\alpha\beta\mu\delta}\gamma^\delta\gamma^\alpha = 0 \quad (2.14)$$

and the same result holds for the other indices. In coordinates (y^α) , adapted to the congruence Γ , in view of (2.1), we can write (2.13) as it follows

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta\mu} = \sqrt{-g} \epsilon_{\alpha\beta\mu 4} \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}}$$

and all the components of $\tilde{\eta}_{\alpha\beta\mu}$ with an index equal to 4 vanish. Further, it is $g_{44}\gamma = g$, with $\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta})$.¹ Consequently, we have that

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta\mu} = \sqrt{\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\mu 4} \equiv \sqrt{\gamma} \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta\mu}. \quad (2.15)$$

The space tensor $\tilde{\eta}_{\alpha\beta\mu}$ allows us to define the cross product of two space vectors $\tilde{\mathbf{u}}$ and $\tilde{\mathbf{v}}$ by the formula

$$(\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}})_\alpha = \sqrt{\gamma} \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta\mu} \tilde{u}^\beta \tilde{v}^\mu. \quad (2.16)$$

Similarly, we can define the adjoint space vector $\tilde{T}_\alpha^*$ of a given space 2-tensor $\tilde{T}^{\alpha\beta}$:

$$\tilde{T}_\alpha^* = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma} \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta\mu} \tilde{T}^{\beta\mu}. \quad (2.17)$$

3 Fermi-Walker Transport

In this section we recall known results for completeness (see, for instance, [1]). Let $(O, \mathbf{a}_\alpha)$ be a Lorentz frame of the Minkowski space-time V_4 . The new frame of reference $(O', \mathbf{a}'_\alpha)$, where $O' \in V_4$ and

$$\mathbf{a}'_\alpha = A_\alpha^\beta \mathbf{a}_\beta, \quad (3.1)$$

is a Lorentz frame, if and only if the coefficients A_α^β satisfy the conditions

$$\eta_{\alpha\beta} - A_\alpha^\lambda A_\beta^\mu \eta_{\lambda\mu} = A_\alpha^\lambda \eta_{\lambda\mu} A_\beta^\mu. \quad (3.2)$$

By introducing the notation $\mathbf{E} \equiv (\eta_{\alpha\beta})$, (3.2) can be written as follows

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \mathbf{E} \mathbf{A}^T. \quad (3.3)$$

The transformation (3.1) is said to be *infinitesimal* if

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \epsilon, \quad (3.4)$$

where $\mathbf{I}$ is the unit matrix and ϵ is a first-order matrix. Taking into account (3.3) and the symmetry of the matrix $\mathbf{E}$, an infinitesimal transformation is a Lorentz transformation, if and only if

$$\mathbf{E} \epsilon^T + \epsilon \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (3.5)$$

¹sec [1], Appendix n.8

It is trivial to verify that condition (3.5) is verified if and only if the matrix $\mathbf{E}$ has the form

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_1^2 & \epsilon_1^3 & 0 \\ -\epsilon_1^2 & 0 & \epsilon_2^3 & 0 \\ -\epsilon_1^3 & -\epsilon_2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \epsilon_1^4 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2^4 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_3^4 \\ \epsilon_1^4 & \epsilon_2^4 & \epsilon_3^4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

The first matrix on the left-hand side of (3.6) represents an infinitesimal rigid rotation of the space axes $(\mathbf{a}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Therefore, we say that the infinitesimal transformation (2.11) is an infinitesimal Lorentz transformation *without rotation of the space axes* if

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \epsilon_i^4 \\ \epsilon_i^4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Under this transformation, the two bases $(\mathbf{a}_i)$ and $(\mathbf{a}'_i)$ are related by the following formulae

$$\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i + \epsilon_i^4 \mathbf{a}_4, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{a}'_4 = \mathbf{a}_4 + \sum_{i=1}^3 \epsilon_i^4 \mathbf{a}_i, \quad (3.9)$$

where in the first three equations there is no summation over i . In conclusion, under a transformation (3.7), the base $(\mathbf{a}_\alpha)$ undergoes a variation given by

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}_i &= \epsilon_i^4 \mathbf{a}_4, \quad i = 1, 2, 3, \\ d\mathbf{a}_4 &= \sum_{i=1}^3 \epsilon_i^4 \mathbf{a}_i. \end{aligned}$$

Since, from (3.9) we derive that

$$\epsilon_i^4 = \mathbf{a}_i \cdot d\mathbf{a}_4, \quad i = 1, 2, 3,$$

we finally get

$$d\mathbf{a}_i = (\mathbf{a}_i \cdot d\mathbf{a}_4) \mathbf{a}_4, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.10)$$

$$d\mathbf{a}_4 = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i \cdot d\mathbf{a}_4) \mathbf{a}_i. \quad (3.11)$$

We note that the equation (3.11) implies that the variation of $\mathbf{a}_4$ in an infinitesimal Lorentz transformation without space rotation is orthogonal to $\mathbf{a}_4$. In conclusion, *an infinitesimal Lorentz transformation does not impose restrictions on the vector γ , which can arbitrarily be chosen.*

Let σ be any curve of V_4 defined by the equation $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$, $\lambda \in [0, a]$. We denote by $\gamma(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in W$, the unit time-like vector field,

$$\gamma \cdot \gamma = -1, \quad (3.12)$$

which, at any point, is tangent to the integral curves of Γ . Finally, we introduce at the initial point $\mathbf{x}(0)$ of σ , three unit space vectors $\mathbf{a}_i^0$, $i = 1, 2, 3$, which are orthogonal to each others and to $\gamma(0)$. Consequently, $(\mathbf{x}(0), \mathbf{a}_i^0, \gamma(0))$ is a Lorentz frame in V_4 , with the origin at the point $\mathbf{x}(0)$ of σ (see Figure 1).

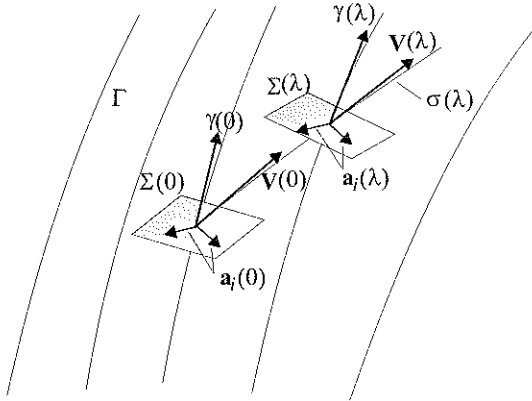


Figure 1: Fermi-Walker transport

Theorem 3.1 ([13]) *It is possible to determine at any point $\mathbf{x}(\lambda)$ of the curve σ three unit space vectors $\mathbf{a}_i(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$, such that, $\forall \lambda \in [0, a]$,*

- $LR_{\mathbf{x}(\lambda)} \equiv (\mathbf{x}(\lambda), \mathbf{a}_i(\lambda), \gamma(\lambda))$ is a Lorentz frame;
- the Lorentz frame $LR_{\mathbf{x}(\lambda)}$ is related to the Lorentz frame $LR_{\mathbf{x}(\lambda+d\lambda)}$ by an infinitesimal Lorentz transformation without rotation.

Proof. To verify the above statement, we prove that the solution $\mathbf{a}_i(\lambda)$ of the following initial value problem,

$$\frac{d\mathbf{a}_i}{d\lambda} = \left(\mathbf{a}_i \cdot \frac{d\gamma}{d\lambda} \right) \gamma, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{a}_i(0) = \mathbf{a}_i^0, \quad (3.14)$$

generates, together with the field $\gamma(\lambda)$, the requested Lorentz frame at any point of the curve σ .

First, owing to (3.13) and the condition $\gamma \cdot \gamma = -1$, we have that

$$\frac{d}{d\lambda} (\mathbf{a}_i \cdot \gamma) = \frac{d\mathbf{a}_i}{d\lambda} \cdot \gamma + \mathbf{a}_i \cdot \frac{d\gamma}{d\lambda} = \left(\mathbf{a}_i \cdot \frac{d\gamma}{d\lambda} \right) \gamma \cdot \gamma + \mathbf{a}_i \cdot \frac{d\gamma}{d\lambda} = 0.$$

On the other hand, from the initial data

$$\mathbf{a}_i^0 \cdot \mathbf{a}_j^0 = \delta_{ij}, \quad \mathbf{a}_i^0 \cdot \gamma(0) = 0,$$

we obtain that

$$\mathbf{a}_i \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{a}_i^0 \cdot \boldsymbol{\gamma}(0) = 0.$$

Moreover, in view of the above conditions, it is also

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) = \frac{d\mathbf{a}_i}{d\lambda} \cdot \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_i \cdot \frac{d\mathbf{a}_j}{d\lambda} = \left(\mathbf{a}_i \cdot \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda} \right) \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{a}_j + \left(\mathbf{a}_j \cdot \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda} \right) \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{a}_i = 0,$$

and, we get

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_i^0 \cdot \mathbf{a}_j^0 = \delta_{ij}.$$

Finally, comparing (3.10), (3.11) and (3.13), we verify that the Lorentz frames $LR_{\mathbf{x}(\lambda)}$ and $LR_{\mathbf{x}(\lambda+d\lambda)}$ are related by a Lorentz transformation without rotation.

■

Definition 3.1 *The solution $\mathbf{a}_\alpha(\lambda)$ of the initial value problem (3.13), (3.14) is named the Fermi-Walker transport of the Lorentz frame $(\mathbf{e}_i^0, \boldsymbol{\gamma}(0))$ along the curve σ .*

4 The Fermi-Walker Derivative

Let γ a time-like congruence on the region $W \subset V_4$ and denote by $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})$ the unit vector field tangent to the curves of Γ . Let $(\mathbf{a}_i(\lambda), \boldsymbol{\gamma}(\lambda))$ be the Lorentz frames obtained by the Fermi-Walker transport along the curve $\mathbf{x}(\lambda)$ of a Lorentz frame $(\mathbf{a}_i(0), \boldsymbol{\gamma}(0))$ (see Theorem 3.1). Let us consider a C^1 vector function $\mathbf{V}(\lambda)$ assigned along $\mathbf{x}(\lambda)$. If $\bar{V}^\alpha(\lambda)$ denote the components of $\mathbf{V}(\lambda)$ relative to the base $(\mathbf{a}_i(\lambda), \boldsymbol{\gamma}(\lambda))$, then it is

$$\mathbf{V} = \bar{V}^i \mathbf{a}_i + \bar{V}^4 \boldsymbol{\gamma} \equiv \tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}}, \quad (4.1)$$

where (see (2.10), (2.11))

$$\tilde{\mathbf{v}} = \bar{V}^i \mathbf{a}_i, \quad \hat{\mathbf{v}} = \bar{V}^4 \boldsymbol{\gamma} = -(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\gamma}. \quad (4.2)$$

Definition 4.1 We name *Fermi-Walker derivative* (F-W derivative) of $\mathbf{V}(\lambda)$ along the curve $\mathbf{x}(\lambda)$, the vector function along $\mathbf{x}(\lambda)$ given by

$$\frac{d_F \mathbf{V}}{d\lambda} = \frac{d\bar{V}^\alpha}{d\lambda} \mathbf{a}_\alpha, \quad (\mathbf{a}_4 = \boldsymbol{\gamma}). \quad (4.3)$$

In other words, the F-W derivative of $\mathbf{V}(\lambda)$ is evaluated with respect to the family of Lorentz frames $(\mathbf{a}_i(\lambda), \boldsymbol{\gamma}(\lambda))$, where the vectors $\mathbf{a}_i(\lambda)$, that are transported according to (3.11), are supposed to be constant.

Theorem 4.1 *The Fermi-Walker derivative along a curve $\mathbf{x}(\lambda)$ is related to the absolute derivative in V_4 by the formula:*

$$\frac{d_F \mathbf{V}}{d\lambda} = \frac{d\mathbf{V}}{d\lambda} - \left(\mathbf{V} \cdot \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda} \right) \boldsymbol{\gamma} + (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda}. \quad (4.4)$$

In particular, the F-W derivative along $\mathbf{x}(\lambda)$ of a space vector field $\tilde{\mathbf{v}}(\lambda) \in \Sigma_{\mathbf{x}(\lambda)}(\gamma(\lambda))$ is equal to the space projection of the absolute derivative of $\tilde{\mathbf{v}}(\lambda)$ along $\mathbf{x}(\lambda)$:

$$\frac{d_F \tilde{\mathbf{v}}}{d\lambda} = \left(\frac{d_F \tilde{\mathbf{v}}}{d\lambda} \right)_{\Sigma} = \left(\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{d\lambda} \right)_{\Sigma}, \quad \left(\frac{d_F \tilde{\mathbf{v}}}{d\lambda} \right)_{\Theta} = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

where we used the more compact notations $\Sigma = \Sigma_{\mathbf{x}(\lambda)}(\gamma(\lambda))$ and $\Theta = \Theta_{\mathbf{x}(\lambda)}(\gamma(\lambda))$.

Proof.

In view of (4.1) and (3.13), the absolute derivative of $\mathbf{V}(\lambda)$ along the curve $\mathbf{x}(\lambda)$ is

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} \left(\bar{V}^i \mathbf{a}_i + \bar{V}^4 \gamma \right) \\ &= \frac{d\bar{V}^i}{d\lambda} \mathbf{a}_i + \frac{d\bar{V}^4}{d\lambda} \gamma + \bar{V}^i \frac{d\mathbf{a}_i}{d\lambda} + \bar{V}^4 \frac{d\gamma}{d\lambda} \\ &= \frac{d\bar{V}^\alpha}{d\lambda} \mathbf{a}_\alpha + \bar{V}^i \mathbf{a}_i \cdot \frac{d\gamma}{d\lambda} \gamma + \bar{V}^4 \frac{d\gamma}{d\lambda} \\ &= \frac{d\bar{V}^\alpha}{d\lambda} \mathbf{a}_\alpha + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \frac{d\gamma}{d\lambda} \gamma + \bar{V}^4 \frac{d\gamma}{d\lambda}, \end{aligned}$$

where $\tilde{\mathbf{v}} = P_{\Sigma}(\mathbf{V}) = \bar{v}^i \mathbf{a}_i$. Formula (4.4) is proved when (4.3) is taken into account and we note that $\bar{V}^4 = -\mathbf{V} \cdot \gamma$. On the other hand, from $\gamma \cdot \gamma = -1$ there follows

$$\gamma \cdot \frac{d\gamma}{d\lambda} = 0 \quad (4.6)$$

i.e., $d\gamma/d\lambda$ is orthogonal to γ . Consequently, it is also

$$\left(\frac{d\gamma}{d\lambda} \right)_{\Sigma} = \frac{d\gamma}{d\lambda}, \quad \left(\frac{d\gamma}{d\lambda} \right)_{\Theta} = \mathbf{0}. \quad (4.7)$$

Then, the space and time projections of (4.4) are

$$\left(\frac{d_F \mathbf{V}}{d\lambda} \right)_{\Sigma} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{d\lambda} \right)_{\Sigma} + \mathbf{V} \cdot \gamma \frac{d\gamma}{d\lambda}, \quad (4.8)$$

$$\left(\frac{d_F \mathbf{V}}{d\lambda} \right)_{\Theta} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{d\lambda} \right)_{\Theta} - \left(\mathbf{V} \cdot \frac{d\gamma}{d\lambda} \right) \gamma. \quad (4.9)$$

In particular, if $\mathbf{V}(\lambda) = \tilde{\mathbf{v}}(\lambda) \in \Sigma$, then it is $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \gamma = 0$ and the projections on Σ of the F-W derivative and covariant derivative are equal. In view of (4.3), when $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{v}} \in \Sigma$, the F-W derivative belongs to Σ ; consequently, it coincides with its projection on Σ and (4.5) is proved. ■

The following definition and theorem extend (4.3), (4.4) and (4.5) to a 2-tensor.

Definition 4.2 Let $(\mathbf{a}_\alpha(\lambda)) \equiv (\mathbf{a}_i(\lambda), \gamma(\lambda))$ be the Lorentz frames obtained by the Fermi-Walker transport along the curve $\mathbf{x}(\lambda)$ of a Lorentz frame $(\mathbf{a}_i(0), \gamma(0))$.

Denote with $\mathbf{T}(\lambda)$ a 2-tensor of C^1 class along $\mathbf{x}(\lambda)$. If $\bar{T}^{\alpha\beta}(\lambda)$ are the components of $\mathbf{T}(\lambda)$ relative to the base $(\mathbf{a}_\alpha(\lambda))$, then we have that

$$\mathbf{T} = \bar{T}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta. \quad (4.10)$$

The *Fermi-Walker derivative* of $\mathbf{T}(\lambda)$ along the curve $\mathbf{x}(\lambda)$ is

$$\frac{d_F \mathbf{T}}{d\lambda} = \frac{d\bar{T}^{\alpha\beta}}{d\lambda} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta, \quad (4.11)$$

that is the derivative relative to the base $(\mathbf{a}_\alpha)$ which undergoes a F-W transport along the curve $\mathbf{x}(\lambda)$.

Theorem 4.2 *The Fermi-Walker derivative of a 2-tensor $\mathbf{T}(\lambda)$ along the time-like curve $\mathbf{x}(\lambda)$ is*

$$\begin{aligned} \frac{d_F \mathbf{T}}{d\lambda} &= \frac{d\mathbf{T}}{d\lambda} - \boldsymbol{\gamma} \otimes \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda} \cdot \mathbf{T} + \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda} \otimes \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{T} \\ &- \mathbf{T} \cdot \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda} \otimes \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\gamma} \otimes \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Further, if $\mathbf{T}(\lambda) \equiv \tilde{\mathbf{T}}(\lambda) \in \Sigma \otimes \Sigma$, then it results

$$\frac{d_F \mathbf{T}}{d\lambda} = \left(\frac{d_F \mathbf{T}}{d\lambda} \right)_{\Sigma\Sigma} = \left(\frac{d\mathbf{T}}{d\lambda} \right)_{\Sigma\Sigma}. \quad (4.13)$$

Proof. Taking into account (4.10) and (4.11), the absolute derivative of $\mathbf{T}(\lambda)$ is given by

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\lambda} = \frac{d_F \mathbf{T}}{d\lambda} + \bar{T}^{\alpha\beta} \frac{d\mathbf{a}_\alpha}{d\lambda} \otimes \mathbf{a}_\beta + \bar{T}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \frac{d\mathbf{a}_\beta}{d\lambda}, \quad (4.14)$$

Introducing (3.13) in (4.14), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{d\lambda} &= \frac{d_F \mathbf{T}}{d\lambda} + \bar{T}^{\alpha\beta} \left(\mathbf{a}_\alpha \cdot \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda} \right) \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{a}_\beta - \bar{T}^{\alpha\beta} (\mathbf{a}_\alpha \cdot \boldsymbol{\gamma}) \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda} \otimes \mathbf{a}_\beta \\ &+ \bar{T}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \left(\mathbf{a}_\beta \cdot \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda} \right) \boldsymbol{\gamma} - \bar{T}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes (\mathbf{a}_\beta \cdot \boldsymbol{\gamma}) \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda} \\ &= \frac{d_F \mathbf{T}}{d\lambda} + \boldsymbol{\gamma} \otimes \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda} \cdot \bar{T}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta - \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda} \otimes \boldsymbol{\gamma} \cdot \bar{T}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta \\ &+ \bar{T}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta \cdot \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda} \otimes \boldsymbol{\gamma} - \bar{T}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta \cdot \boldsymbol{\gamma} \otimes \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda}. \end{aligned}$$

Recalling (4.11), formula (4.12) is proved. If $\mathbf{T}$ is a 2-tensor belonging to $\Sigma \otimes \Sigma$, then $\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\gamma}$ is orthogonal to Σ and the theorem is proved. ■

Remark 4.1 It is easy to obtain the coordinate form of (4.10) starting from the relation expressing the components $T^{\alpha\beta}$ in general coordinates (x^α) in terms of the components $\bar{T}^{\mu\nu}$ in the geodetic coordinates

$$T^{\alpha\beta} = \bar{T}^{\mu\nu} a_{(\mu)}^\alpha a_{(\nu)}^\beta$$

and noting that the F-W transport has the following coordinate form

$$\frac{d}{d\lambda} a_{(\alpha)}^\nu = a_{(\alpha)\rho} \frac{d\gamma^\rho}{d\lambda} - a_{(\alpha)\rho} \gamma^\rho \frac{d\gamma^\nu}{d\lambda}.$$

5 The Fermi-Walker Covariant Derivative

Let $\mathbf{X}$ be a vector field of class C^∞ in V_4 . Denoting by $\mathfrak{F}(V_4)$ the set of C^∞ functions on V_4 , $\mathbf{x}(\lambda)$ an arbitrary integral curve of the field $\mathbf{X}$, and by $\mathfrak{X}(V_4)$ the $\mathfrak{F}(V_4)$ -module of the vector fields of class C^∞ on V_4 , we call *the Fermi-Walker covariant derivative* (*F-W covariant derivative*) the derivation operator

$$\overset{F}{\nabla} : \mathfrak{X}(V_4) \rightarrow \mathfrak{X}(V_4)$$

which is defined as follows

$$\frac{d_F \mathbf{V}}{d\lambda} = \mathbf{X} \cdot \overset{F}{\nabla} \mathbf{V}. \quad (5.1)$$

By introducing (4.4) into (5.1) and using the arbitrariness of $\mathbf{X}$, we have that

$$\overset{F}{\nabla} \mathbf{V} = \nabla \mathbf{V} - (\nabla \gamma \cdot \mathbf{V}) \otimes \gamma + (\mathbf{V} \cdot \gamma) \nabla \gamma. \quad (5.2)$$

Note that the map

$$\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(V_4) \rightarrow \mathbf{X} \cdot \overset{F}{\nabla} \mathbf{V} \in \mathfrak{X}(V_4), \quad (5.3)$$

is $\mathfrak{F}(V_4)$ -linear in $\mathbf{X}$. Further, if we define the F-W derivative along the integral curve $\mathbf{x}(\lambda)$ of $\mathbf{X}$ of function $f \in \mathfrak{F}(V_4)$ as follows

$$\frac{d_F f}{d\lambda} = \frac{df}{d\lambda}, \quad (5.4)$$

then, the map (5.1) verifies the property

$$\overset{F}{\nabla}_{\mathbf{X}}(f\mathbf{V}) = f\overset{F}{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \overset{F}{\nabla}_{\mathbf{X}}f. \quad (5.5)$$

In conclusion, the F-W covariant derivative is a derivation in the tangent fibre bundles TV_4 of the vector fields on V_4 . Finally, we remark that from (5.2) there follows that the covariant and contravariant components of F-W derivative are related by the metric tensor $\mathbf{g}$ of V_4 as in the ordinary covariant derivative.

In components, (5.2) writes as follows

$$\begin{aligned} \overset{F}{\nabla}_{\beta} V^{\alpha} &= \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} V^{\lambda} + (\gamma_{\lambda} \nabla_{\beta} \gamma^{\alpha} - \nabla_{\beta} \gamma_{\lambda} \gamma^{\alpha}) V^{\lambda} \\ &\equiv \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \overset{F}{\Gamma}_{\beta\lambda}^{\alpha} V^{\lambda}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

where we have introduced the quantities, which we call *F-W symbols*

$$\overset{F}{\Gamma}_{\beta\lambda}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} + (\gamma_{\lambda} \nabla_{\beta} \gamma^{\alpha} - \nabla_{\beta} \gamma_{\lambda} \gamma^{\alpha}). \quad (5.7)$$

The relations (5.7) show that the connection introduced in V_4 by the F-W transport is not symmetric and it depends both on the metrics of V_4 and the frame of reference R .

Let us consider the fibre bundle $\bigcup_{x \in V_4} \Sigma_x$ of *space* vector fields of V_4 corresponding to a given choice of the time-like congruence Γ . Let $f(\mathbf{x})$ be a function of $\mathfrak{F}(V_4)$ and let $\tilde{\mathbf{X}}$ be a space vector field. Then, from (5.4) we obtain the following expression for the *F-W gradient* of f

$$\frac{d_F f}{d\lambda} = \tilde{\mathbf{X}} \cdot \nabla f = \tilde{\mathbf{X}} \cdot P_\Sigma(\nabla f), \quad \forall \tilde{\mathbf{X}} \in \bigcup_{x \in V_4} \Sigma_x, \quad (5.8)$$

which, owing to the arbitrariness of $\tilde{\mathbf{X}}$, leads us to introduce the operator

$$\overset{F}{\nabla} f = P_\Sigma(\nabla f). \quad (5.9)$$

whose components are

$$\overset{F}{\nabla}_\beta f = \gamma_\alpha^\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} + \gamma_\beta^\mu \gamma_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) f \equiv \tilde{\partial}_\beta f. \quad (5.10)$$

Remark 5.1 Equality (5.10) shows that the F-W gradient of the function f coincides with the transverse derivative $\tilde{\partial}_\beta f$ introduced by Cattaneo in [5], [6], [7]. However, (5.10) makes clear its meaning relating the transverse derivative to the F-W derivative.

Theorem 5.1 *Let Γ be a time-like congruence on a region $W \subset V_4$ and consider the fiber bundle $\Sigma V_4 \equiv \bigcup_{x \in V_4} \Sigma_x$ of the all three-dimensional subspaces that, at any point $\mathbf{x} \in V_4$ are orthogonal to $\gamma(\mathbf{x})$. Then, the restriction of $\overset{F}{\nabla}$ to ΣV_4 is a covariant derivation in ΣV_4 such that*

$$\overset{F}{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} = (\nabla \tilde{\mathbf{v}})_{\Sigma \Sigma}. \quad (5.11)$$

Proof. If $\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{v}} \in \bigcup_{x \in V_4} \Sigma_x$, then, from (4.2), (4.3), we have that

$$\frac{d_F \tilde{\mathbf{v}}}{d\lambda} = \frac{d\bar{v}^i}{d\lambda} \mathbf{a}_i = \bar{X}^j \frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \bar{x}^j} \mathbf{a}_i. \quad (5.12)$$

Consequently, not only $d_F \tilde{\mathbf{v}}/d\lambda \in \bigcup_{x \in V_4} \Sigma_x$, but the F-W derivative becomes a *space* operator which in geodesic coordinates has the following components

$$\overset{F}{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \bar{x}^j} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j. \quad (5.13)$$

Owing to the space character of $\tilde{\mathbf{X}}$ and $\tilde{\mathbf{v}}$, from (5.2) we obtain

$$\overset{F}{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} = P_\Sigma(\nabla \tilde{\mathbf{v}} - (\nabla \gamma \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \otimes \gamma) = P_\Sigma(\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}} \cdot \gamma) \otimes \gamma), \quad (5.14)$$

where the space projection refers to the operator ∇ , that is, to the derivation index. The above equality can also be written as follows

$$\overset{F}{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} = P_{\Sigma \Sigma}(\nabla \tilde{\mathbf{v}}) - P_\Sigma((\nabla \tilde{\mathbf{v}} \cdot \gamma) \otimes \gamma) + P_\Sigma((\nabla \tilde{\mathbf{v}} \cdot \gamma) \otimes \gamma)$$

and (5.11) is proved. ■

Remark 5.2 In general coordinates, (5.11) can be written as follows

$$\overset{F}{\nabla}_\beta \tilde{v}^\alpha = \gamma_\mu^\alpha \gamma_\beta^\nu \nabla_\nu \tilde{v}^\mu \quad (5.15)$$

and in [5], [6], and [7] it is shown that the right-hand side of (5.15) can also be put in the form

$$\overset{F}{\nabla}_\beta \tilde{v}^\alpha = \tilde{\partial}_\beta \tilde{v}^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha \tilde{v}^\mu \equiv \tilde{\nabla}_\beta \tilde{v}^\alpha, \quad (5.16)$$

where

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\nu} \left(\tilde{\partial}_\beta \gamma_{\mu\nu} + \tilde{\partial}_\mu \gamma_{\nu\beta} - \tilde{\partial}_\nu \gamma_{\beta\mu} \right). \quad (5.17)$$

Then, the the covariant derivative $\tilde{\nabla}_\beta \tilde{v}^\alpha$ introduced by C. Cattaneo coincides with F-W covariant derivative. In other words, the coefficients of F-W connection are obtained by the metric tensor $\gamma_{\alpha\beta}$ substituting the ordinary spatial derivative with the transverse one.

6 F-W Derivation of 2-Tensors

The results of the above section can easily be extend to any tensor. In particular, the F-W covariant derivative of the 2-tensor $\mathbf{T}$ is given by (see (4.12))

$$\begin{aligned} \overset{F}{\nabla} \mathbf{T} &= \nabla \mathbf{T} - \gamma \otimes \nabla \gamma \cdot \mathbf{T} + \nabla \gamma \otimes \gamma \cdot \mathbf{T} \\ &- \mathbf{T} \cdot \nabla \gamma \otimes \gamma + \mathbf{T} \cdot \gamma \otimes \nabla \gamma, \end{aligned} \quad (6.1)$$

which in components can be written as follows:

$$\begin{aligned} \overset{F}{\nabla} T_\lambda^{\alpha\beta} &= \nabla_\lambda T^{\alpha\beta} - \gamma^\alpha \nabla_\lambda \gamma_\mu T^{\mu\beta} + \nabla_\lambda \gamma^\alpha \gamma_\mu T^{\mu\beta} \\ &- T^{\alpha\mu} \nabla_\lambda \gamma_\mu \gamma^\beta + T^{\alpha\mu} \gamma_\mu \nabla_\lambda \gamma^\beta. \end{aligned} \quad (6.2)$$

When $\tilde{\mathbf{T}}$ is a space tensor, instead of (5.11), we have that

$$\overset{F}{\nabla} \tilde{\mathbf{T}} = \left(\nabla \tilde{\mathbf{T}} \right)_{\Sigma\Sigma\Sigma}. \quad (6.3)$$

Theorem 6.1 *The following results hold*

$$\overset{F}{\nabla}_\lambda g_{\alpha\beta} = 0, \quad \overset{F}{\nabla}_\lambda \gamma_{\alpha\beta} = 0. \quad (6.4)$$

Proof. Since $\nabla_\lambda g_{\alpha\beta} = 0$, from (6.2) we obtain that

$$\begin{aligned} \overset{F}{\nabla} g_{\alpha\beta} &= -\gamma_\alpha \nabla_\lambda \gamma^\mu g_{\mu\beta} + \nabla_\lambda \gamma_\alpha \gamma^\mu g_{\mu\beta} - g_{\alpha\mu} \nabla_\lambda \gamma^\mu \gamma_\beta + g_{\alpha\mu} \gamma^\mu \nabla_\lambda \gamma_\beta \\ &= -\gamma_\alpha \nabla_\lambda \gamma_\beta + \gamma_\beta \nabla_\lambda \gamma_\alpha - \gamma_\beta \nabla_\lambda \gamma_\alpha + \gamma_\alpha \nabla_\lambda \gamma_\beta = 0. \end{aligned}$$

On the other hand, it is (see (2.12)) $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \gamma_\alpha\gamma_\beta$, so that, in view of (6.4) and (6.2), we have

$$\begin{aligned}\stackrel{F}{\nabla}_\lambda \gamma_{\alpha\beta} &= \stackrel{F}{\nabla}_\lambda (\gamma_\alpha \gamma_\beta) \\ &= \nabla_\lambda (\gamma_\alpha \gamma_\beta) - \gamma_\alpha \nabla_\lambda \gamma_\mu \gamma^\mu \gamma_\beta + \nabla_\lambda \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma_\beta \\ &\quad - \gamma_\alpha \gamma^\mu \nabla_\lambda \gamma_\mu \gamma_\beta + \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma_\mu \nabla_\lambda \gamma_\beta.\end{aligned}$$

But $\gamma^\mu \gamma_\mu = -1$ implies $\gamma^\mu \nabla_\lambda \gamma_\mu = \gamma_\mu \nabla_\lambda \gamma^\mu = 0$, and from the above equation there follows (6.4)₂. ■

Remark 6.1 In view of (6.4), both the tensors $g_{\alpha\beta}$ and $\gamma_{\alpha\beta}$ commute with the derivation operator $\stackrel{F}{\nabla}$ applied to a space tensor.

Remark 6.2 In components, (6.3) writes

$$\stackrel{F}{\nabla}_\lambda T_{\alpha\beta} = \gamma_\lambda^\mu \gamma_{\alpha\nu} \gamma_{\beta\rho} \nabla_\mu \tilde{T}^{\nu\rho}.$$

As for (5.15), in [5], [6], and [7] it is proved that

$$\stackrel{F}{\nabla}_\lambda T^{\alpha\beta} = \tilde{\partial}_\lambda \tilde{T}^{\alpha\beta} + \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^\alpha \tilde{T}^{\mu\beta} + \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^\beta \tilde{T}^{\alpha\mu}.$$

7 Frames of Reference.

The general relativity is based on the following assumptions:

- The space-time V_4 is a 4-dimensional Riemannian manifold with hyperbolic signature $(+, +, +, -)$;
- the distribution of matter and energy in the space-time V_4 is described by the momentum-energy $T_{\alpha\beta}$;
- the Riemannian geometry of V_4 , i.e., its metric tensor, is determined by the Einstein field equations;
- the general covariant form of the physical laws is obtained by postulating that, at any point $\mathbf{x} \in V_4$, the laws of special relativity (equation of motion of a particle, Maxwell equations, etc.) hold in any geodesic frame at $\mathbf{x}$.

The above assumptions define the geometric structure of V_4 and supply the covariant form of the physical laws in any system of coordinates of V_4 .

It is important to note that Minkowski's formulation is obtained starting from a *physical* approach to special relativity. In other words, its geometric objects, i.e., space-time V_4 , events, metrics, 4-momentum, electromagnetic tensor, etc., are derived from physical quantities. Consequently, there is no ambiguity about the physical meaning of the geometric objects defined on V_4 . In particular, in V_4 only *rectilinear coordinates* are used as geometric representation of the inertial frames.

A quite different situation occurs in general relativity. For instance, general coordinates in V_4 represent only an arbitrary way to label the events of the space-time, so that they could have no physical meaning. Consequently, there is no correspondence between coordinates of V_4 and physical frames of reference R . Even if this correspondence is introduced, can the observer in R evaluate the space distances and time intervals in R ? More generally, can he deduce the physical quantities from the geometric objects? All these questions ask for an answer, if we wish to come back from the space-time to the observers and their physical description of the world as it is represented by general relativity.

Up to now, we have equipped the space-time V_4 with many geometric structures. From now on, we make clear their physical meaning.

Definition 7.1 A *frame of reference* R is formed by a fluid of reference S every particle p of which is equipped with a local time variable t . A time-like congruence Γ corresponds in V_4 to the frame R . The curves of Γ represent the world-lines of the ∞^3 particles of R .

Definition 7.2 A system of coordinates (y^α) is said to be *adapted* to the frame of reference R if it is adapted to the congruence defining R .

Remark 7.1 A change of coordinates adapted to the same frame R does not modifies the frame R . Therefore, any physical quantity relative to a frame R must behave as a tensor under a change of adapted coordinates.

Let $\mathbf{x} \in \gamma \in \Gamma$ be an event relative to a particle p of the fluid S of the frame of reference R . The event $\mathbf{x}$ is a point of the curve $\gamma \in \Gamma$ representing the world line of p . At $\mathbf{x}$ we consider the unit vector $\gamma(\mathbf{x})$, tangent to Γ at $\mathbf{x}$, and the vector spaces $\Sigma_{\mathbf{x}}(\gamma)$, $\Theta_{\mathbf{x}}(\gamma)$, defined by (2.6) and (2.7).

Definition 7.3 The *geodesic rest frame* $\bar{I}_{\mathbf{x}}$ relative to the event $\mathbf{x}$ is the local geodesic frame (see Theorem 5) around $\mathbf{x}$ having as natural base at $\mathbf{x}$ the Lorentz axes $(\mathbf{a}_i, \gamma)$, where $(\mathbf{a}_i)$, $i = 1, 2, 3$, is an orthogonal base in $\Sigma_{\mathbf{x}}(\gamma)$. This frame has to be identified with the local frame in which the gravitation is absent and the physical laws of special relativity hold.

Remark 7.2 Let R be a frame of reference represented by the congruence Γ and denote by $\mathbf{x}(\lambda)$ the world line of a particle moving relative to R . Then, the above definition, allows us to say that F-W transport along $\mathbf{x}(\lambda)$ of a Lorentz base $(\mathbf{a}_i(\lambda), \gamma(\lambda))$ defines a family of geodesic rest frames along $\mathbf{x}(\lambda)$ with the property that the space axes of $(\mathbf{a}_i(\lambda))$ and $(\mathbf{a}_i(\lambda + d\lambda))$ are related to each other by a Lorentz transformation without rotation.

The first fundamental assumption about the measures in the general frame R can be formulated as it follows:

Assumption 1. - *The measures of physical quantities at an arbitrary event $\mathbf{x} \in W$ are carried out by the observer in the geodesic frame $\bar{I}_{\mathbf{x}}$ and then they are adopted by R , after being expressed in terms of arbitrary coordinates of V_4 .*

The next assumption makes clear how to evaluate the variations of a space vector with respect to a frame R :

Assumption 2.—*The variations of a space vector $\tilde{\mathbf{v}}$ along a curve $\mathbf{x}(\lambda)$ must be evaluated with respect to the family of local frames $(\mathbf{a}_i(\lambda), \gamma(\lambda))$ which are F - W transported along $\mathbf{x}(\lambda)$.*

In view of the first of the above assumptions, the observer R at $\mathbf{x}$ adopts the space and time measures carried out by the observer in the Lorentz frame $I_{\mathbf{x}} \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{a}_i, \gamma(\mathbf{x}))$. Consequently, the space distance $d\sigma$ and the time interval dT between two events $\mathbf{x}$ and $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$, are obtained as follows. In the base $(\mathbf{a}_i, \gamma)$, we have that

$$d\mathbf{x} = \tilde{d\mathbf{x}}^i \mathbf{a}_i + c dT \gamma = P_{\Sigma}(d\mathbf{x}) + P_{\Theta}(d\mathbf{x}) \equiv \tilde{d\mathbf{x}} + P_{\Theta}(d\mathbf{x}). \quad (7.1)$$

Then, from (7.1), (2.10), (2.11), and (2.12), in the coordinates (x^α) , we can write

$$d\sigma^2 = \tilde{d\mathbf{x}} \cdot \tilde{d\mathbf{x}} = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (7.2)$$

$$dT = -\frac{1}{c} \gamma_\alpha dx^\alpha. \quad (7.3)$$

Finally, from (2.12), (7.2), and (7.3) we obtain

$$ds^2 = d\sigma^2 - c^2 dT^2, \quad (7.4)$$

where ds is the space-time distance between $\mathbf{x}$ and $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$.

8 Kinematic Characteristics of a Frame of Reference

Let R be a frame of reference defined by the time-like congruence Γ . We denote by (y^α) coordinates adapted to Γ , by (x^α) general coordinates, and by

$$x^\alpha = x^\alpha(y^\beta), \quad (8.1)$$

the equations of Γ in the coordinates (x^α) . A curve $\sigma \in \Gamma$ is obtained from (8.1) assigning y^1, y^2, y^3 and varying y^4 . In view of (7.3) and (2.1), the elementary time interval dT along σ becomes

$$dT = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{44}} dy^4. \quad (8.2)$$

so that, on σ , we can introduce the variable

$$T = \frac{1}{c} \int_{\sigma} \sqrt{-g_{44}} dy^4, \quad (8.3)$$

whose variations *along* σ coincide with the elementary interval dT . If we adopt this new parameter along the curves of Γ , then we can write (8.1) in the form

$$x^\alpha = x^\alpha(y^i, T). \quad (8.4)$$

Differentiating (8.4)

$$\delta x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \delta y^\mu, \quad (y^4 = T), \quad (8.5)$$

and considering the projection of (8.5) on $\Sigma_{\mathbf{x}}$, we obtain the space vector between the two particles (y^i) and $(y^i + \delta y^i)$ of the frame of reference R

$$\delta \tilde{\mathbf{x}} = P_\Sigma(\delta \mathbf{x}). \quad (8.6)$$

Axiom 22 introduces a criterion to evaluate the variations along the curve $\mathbf{x}(\lambda) \in \Gamma$ of the space vector $d\tilde{\mathbf{x}}$ with respect to the frame R . In fact, we must consider the family of geodesic frames $\bar{I}(T)$ along $\mathbf{x}(\lambda)$, i.e., the proper geodesic frames of the particle of R having $\mathbf{x}(\lambda)$ as world trajectory. Then, after choosing a space base $\mathbf{a}_i(0)$ in the geodesic frame $\bar{I}(0)$, we introduce in any geodesic frame $\bar{I}(T)$ a space base $\mathbf{a}_i(T)$ which is obtained by a Fermi-Walker transport of $\mathbf{a}_i(0)$ along $\mathbf{x}(\lambda)$. Consequently, the space vector $d\tilde{\mathbf{x}}$ is given by

$$\delta \tilde{\mathbf{x}} = \delta \tilde{x}^i \mathbf{a}_i(T). \quad (8.7)$$

We assume that the variations of $\delta \tilde{\mathbf{x}}$ with respect to R are expressed by the F-W derivative (4.3)

$$\frac{d_F}{dT} \delta \tilde{\mathbf{x}} = \frac{\delta \tilde{x}^i}{dT} \mathbf{a}_i(T), \quad (8.8)$$

which, in view of (4.5), can also be written in the equivalent form

$$\frac{d_F}{dT} \delta \tilde{\mathbf{x}} = P_\Sigma \left(\frac{d}{dT} \delta \tilde{\mathbf{x}} \right). \quad (8.9)$$

Since it is possible to prove that

$$P_\Sigma \left(\frac{d}{dT} \delta \tilde{\mathbf{x}} \right) = \delta \tilde{\mathbf{x}} \cdot P_{\Sigma\Sigma}(\nabla \gamma), \quad (8.10)$$

(8.9) assumes the following form

$$\frac{d_F}{dT} d\tilde{\mathbf{x}} = \delta \tilde{\mathbf{x}} \cdot P_{\Sigma\Sigma}(\nabla \gamma). \quad (8.11)$$

If we introduce the space tensors

$$\tilde{\Omega}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\lambda} \gamma^{\beta\mu} (\nabla_\lambda \gamma_\mu - \nabla_\mu \gamma_\lambda), \quad (8.12)$$

$$\tilde{K}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\lambda} \gamma^{\beta\mu} (\nabla_\lambda \gamma_\mu + \nabla_\mu \gamma_\lambda), \quad (8.13)$$

which are, respectively, skew-symmetric and symmetric, then (8.11) becomes

$$\frac{d_F}{dT} d\tilde{\mathbf{x}} = \delta \tilde{\mathbf{x}} \cdot (\tilde{\Omega} + \tilde{K}). \quad (8.14)$$

We can recognize the physical meaning of the above two space tensors by noting that in the proper geodesic frame $\bar{I}(T)$ they have only spatial components given by

$$\bar{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \bar{X}_i} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial \bar{X}_j} \right), \quad (8.15)$$

$$\bar{K}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \bar{X}_i} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial \bar{X}_j} \right), \quad (8.16)$$

so that it is justified to call $\tilde{\Omega}$ the *space curly tensor* and $\tilde{K}$ the *space stretching tensor*.

From (7.2) and (8.14), we obtain the relation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \delta \sigma^2 &= \frac{d}{dT} (\delta \mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{x}) = \delta \tilde{\mathbf{x}} \cdot \frac{d_F}{dT} \delta \tilde{\mathbf{x}} \\ &= \delta \tilde{\mathbf{x}} \cdot (\tilde{\Omega} + \tilde{K}) \cdot \delta \tilde{\mathbf{x}} = \delta \tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{K} \cdot \delta \tilde{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

since $\tilde{\Omega}$ is skew-symmetric and $\tilde{K}$ is symmetric. The above equation allows to state that a frame R is rigid if and only if $\tilde{K} = \mathbf{0}$ (Born's rigidity).

We conclude proving the following theorem:

Theorem 8.1

$$\nabla_\alpha \gamma_\beta = \tilde{\Omega}_{\alpha\beta} + \tilde{K}_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha C_\beta, \quad (8.17)$$

where

$$C^\alpha = \frac{\nabla \gamma^\alpha}{ds}, \quad C^\alpha \gamma_\alpha = 0, \quad (8.18)$$

is the curvature 4-vector of the world-lines of the particle of the frame R .

Proof. First, we note that the tangent space $T_{\mathbf{x}}$ at the point $\mathbf{x} \in V_4$ can be decomposed in the following direct sum of its vector subspaces:

$$T_{\mathbf{x}} = \Sigma_{\mathbf{x}} \otimes \Sigma_{\mathbf{x}} + \Sigma_{\mathbf{x}} \otimes \Theta_{\mathbf{x}} + \Theta_{\mathbf{x}} \otimes \Sigma_{\mathbf{x}} + \Theta_{\mathbf{x}} \otimes \Theta_{\mathbf{x}}. \quad (8.19)$$

Consequently, the components $\nabla_\alpha \gamma_\beta$ are obtained by adding the components of the following tensors belonging to the subspaces appearing in (8.19):

$$\begin{aligned} \gamma^{\alpha\lambda} \gamma^{\beta\mu} \nabla_\lambda \gamma_\mu &= \tilde{\Omega}^{\alpha\beta} + \tilde{K}^{\alpha\beta}; \\ -\gamma^{\alpha\lambda} \gamma^\beta \gamma^\mu \nabla_\lambda \gamma_\mu &= 0 \\ -\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^{\beta\mu} \nabla_\lambda \gamma_\mu &= -\gamma^\alpha C_\beta, \\ \gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\mu \nabla_\lambda \gamma_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Equalities (8.20) can easily be proved. In fact, (8.20)₁, follows from (8.12), (8.13). Further, from the condition

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = -1, \quad (8.21)$$

it follows

$$\gamma^\mu \nabla_\lambda \gamma_\mu = 0, \quad (8.22)$$

and (8.20)₂ is proved. Since

$$C_\alpha = \frac{\nabla \gamma_\alpha}{ds} = \gamma^\mu \nabla_\mu \gamma_\alpha, \quad (8.23)$$

and the condition (8.22) implies that

$$\gamma^\alpha C_\alpha = \gamma^\alpha \frac{\nabla \gamma_\alpha}{ds} = \gamma^\alpha \gamma^\mu \nabla_\mu \gamma_\alpha = 0, \quad (8.24)$$

identities (8.20)₃₋₄ are proved. ■

Definition 8.1 We say that the frame of reference R is *irrotational* if $\tilde{\Omega} = 0$, *rigid* if $\tilde{\mathbf{K}} = 0$, *geodesic* if the curves of Γ are geodesics or, equivalently, if $C_\alpha = 0$.

Remark 8.1 The differential form (7.3) is integrable if and only if

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha \gamma_\beta - \partial_\beta \gamma_\alpha = \nabla_\alpha \gamma_\beta - \nabla_\beta \gamma_\alpha. \quad (8.25)$$

In this case, there exists a function $F(x^\alpha)$ such that $\gamma_\alpha = \partial_\alpha F$. Consequently, the 4-field γ is orthogonal to the surfaces $F(x^\alpha) = \text{const}$ and the curves of the congruence Γ , which define the frame of reference R , are orthogonal to the level surfaces $F(x^\alpha) = \text{const}$. Furthermore, $cdT = dF$, and there exists a global standard time T whose simultaneity surfaces coincide with the surfaces $F(x^\alpha) = \text{const}$. From (8.25) and (8.17), there follows that the integrability condition is satisfied if $\tilde{\Omega} = \mathbf{C} = 0$, i.e., if the frame R is irrotational and geodesic.

9 Relative Momentum Equation

In view of what we said in Section 6, the observer R at $\mathbf{x}$ adopts the space and time measures carried out by the observer in the Lorentz frame $I_{\mathbf{x}} \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{a}_i, \gamma(\mathbf{x}))$. Consequently, the space distance $d\sigma$ and the time interval dT between two events $\mathbf{x}$ and $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$, are given by (7.2) and (7.3) whereas the distance ds in the space-time between the events $\mathbf{x}$ and $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ is given by (7.4).

Let P be a material point moving relative to the frame R defined by the time-congruence Γ . We denote by $\mathbf{x}(\tau)$ the equation of the world-line σ of P , where τ is the proper time. Applying the decomposition (2.8) to the 4-velocity $\mathbf{U}$ of P and taking into account (7.2), (7.3) and (7.4), we obtain

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{dT}{d\tau} \frac{d\mathbf{x}}{dT} = \frac{dT}{d\tau} (\tilde{\mathbf{v}} + c\gamma), \quad (9.1)$$

where the space vector

$$\tilde{\mathbf{v}} = P_\Sigma \left(\frac{d\mathbf{x}}{dT} \right) = \frac{\tilde{d\mathbf{x}}}{dT}, \quad (9.2)$$

is called the *standard velocity relative to R*. In view of (9.2), it is

$$\tilde{v}^2 = \tilde{v}^\alpha \tilde{v}_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} \tilde{v}^\alpha \tilde{v}^\beta = (g_{\alpha\beta} + \gamma_\alpha \gamma_\beta) \tilde{v}^\alpha \tilde{v}^\beta = g_{\alpha\beta} \tilde{v}^\alpha \tilde{v}^\beta. \quad (9.3)$$

The line element ds^2 in the space-time V_4 relative to the events $\mathbf{x}(\tau)$ and $\mathbf{x}(\tau + d\tau)$ is given by

$$ds^2 = d\sigma^2 - c^2 dT^2 = -c^2 d\tau^2, \quad (9.4)$$

so that

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{v}^2}{c^2}}}. \quad (9.5)$$

Let us consider the 4-momentum of P

$$P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{d\tau} = m_0 U^\alpha, \quad (9.6)$$

where m_0 is the proper mass of P . At a point $\mathbf{x}(\tau)$, in view of (2.10) and (2.11), we obtain the space and time projections of P^α

$$P^\alpha = \tilde{p}^\alpha + \frac{E}{c} \gamma^\alpha, \quad \tilde{p}_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} P^\beta, \quad \frac{E}{c} = -\gamma_\alpha P^\alpha. \quad (9.7)$$

so that

$$\tilde{p}_\alpha = m_0 \gamma_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{dT} \frac{dT}{d\tau} = m \tilde{v}_\alpha, \quad (9.8)$$

where

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{v}^2}{c^2}}} \quad (9.9)$$

is the *standard mass*. Finally, from (9.5), (9.6) and (9.7), we have

$$E = -c m_0 \gamma_\alpha \frac{dx^\alpha}{dT} \frac{dT}{d\tau} = mc^2. \quad (9.10)$$

The space vector $\mathbf{p}$ is called the *standard momentum* and the scalar E is called the *standard energy*. All the above quantities $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{p}}$, m , E , ... are evaluated in the proper frame according to the axiom 1, that is, in the absence of gravitation. We underline that the vectors $\tilde{\mathbf{p}}$, $\mathbf{F}$, $\tilde{\mathbf{v}}$ and the scalar E are invariant with respect coordinate changes internal to the frame R .

The equation $\mathbf{x}(\tau)$ of the world-line of a moving particle P is a solution of the equation

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = m_0 \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \Phi, \quad (9.11)$$

where the 4-force Φ acting on P verifies the condition

$$\Phi \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (9.12)$$

Now, we propose to derive from (9.11) the equations describing the dynamics of P relative to an arbitrary frame of reference R , defined by a time-like congruence Γ .

First, we recall that, in view of (8.4), we can use the standard time as parameter on $\mathbf{x}(\lambda)$. Consequently, the equation of this curve can also be written in the form $\mathbf{x}(T)$. As usual, we denote by $T_{\mathbf{x}(T)}$ the tangent space to the space-time V_4 in the different points of $\mathbf{x}(T)$ and we decompose $T_{\mathbf{x}(T)}$ into the direct sum of the subspaces $\Theta_{\mathbf{x}(T)}$ and $\Sigma_{\mathbf{x}(T)}$. In $\Sigma_{\mathbf{x}(T)}$, we choose a triad $(\mathbf{a}_i(T))$ of space vectors, which undergoes a Fermi-Walker transport along $\mathbf{x}(T)$ and we denote by $\bar{I}(T)$ the family of the geodesic frames along $\mathbf{x}(T)$ with Lorentz frames $(\mathbf{a}_i(T), \gamma(T))$. If $\bar{p}_i(T)$ are the components of the standard momentum $\bar{\mathbf{p}}(T)$ in $(\mathbf{a}_i(T))$, we have that

$$\bar{\mathbf{p}} = \bar{p}_i(T) \mathbf{a}_i(T). \quad (9.13)$$

In view of assumptions 1-3, we state that

the momentum and energy equations of P relative to R have the following form

$$\left(\frac{d_F \tilde{\mathbf{p}}}{dT} - \tilde{\Phi} \right) \equiv \tilde{\mathbf{G}}, \quad (9.14)$$

$$\left(\frac{dE}{dT} - \tilde{\Phi} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right) = \tilde{\mathbf{G}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \quad (9.15)$$

where

$$\tilde{\Phi} = \frac{d\tau}{dT} P_{\Sigma}(\Phi), \quad (9.16)$$

and

$$\tilde{\mathbf{G}} = \frac{d_F \tilde{\mathbf{p}}}{dT} - P_{\Sigma} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dT} \right) \quad (9.17)$$

is the gravitational force relative to the observer R .

It is worthwhile to note that in Special Relativity (9.14) and (9.15) supply the momentum equation and the energy equation relative to an inertial frame. In fact, in this case the space and time projections are equivalent to consider the first three components of (9.11) and its fourth component, respectively, the standard time coincides with the coordinate time in an inertial frame and the F-W derivation becomes the ordinary derivation with respect to time.

From the decomposition (9.7) of the 4-momentum $\mathbf{P}$, we get

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dT} &= \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dT} + \frac{d}{dT} \left(\frac{E}{c} \gamma \right) \\ &= \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dT} + \frac{E}{c} \frac{d\gamma}{dT} + \gamma \frac{d}{dT} \left(\frac{E}{c} \right) \\ &= \frac{d\tau}{dT} P_{\Sigma}(\Phi) + \frac{d\tau}{dT} P_{\Theta}(\Phi). \end{aligned} \quad (9.18)$$

The space projection of the above relation on $\Sigma_{\mathbf{x}(T)}$ gives us

$$\begin{aligned}
 P_{\Sigma} \left(\frac{d\mathbf{P}}{dT} \right) &= P_{\Sigma} \left(\frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dT} \right) + \frac{E}{c} P_{\Sigma} \left(\frac{d\gamma}{dT} \right) \\
 &= \frac{d_F \tilde{\mathbf{p}}}{dT} + \frac{E}{c} P_{\Sigma} \left(\frac{d\gamma}{dT} \right) \\
 &= \frac{d\tau}{dT} P_{\Sigma}(\Phi) \equiv \tilde{\Phi}.
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

From this relation, taking into account (9.14)-(9.17), we obtain

$$\frac{d_F \tilde{\mathbf{p}}}{dT} - \tilde{\Phi} = -mc P_{\Sigma} \left(\frac{d\gamma}{dT} \right) \equiv \tilde{\mathbf{G}}. \tag{9.20}$$

On the other hand, owing to (8.17) and (9.1), it is also

$$\begin{aligned}
 \frac{d\gamma_{\alpha}}{dT} &= \frac{dx^{\mu}}{dT} \nabla_{\mu} \gamma_{\alpha} \\
 &= (\tilde{v}^{\mu} + c\gamma^{\mu})(\tilde{K}_{\mu\alpha} + \tilde{\Omega}_{\mu\alpha} - \gamma_{\mu} C_{\alpha}) \\
 &\quad \tilde{v}^{\mu}(\tilde{K}_{\mu\alpha} + \tilde{\Omega}_{\mu\alpha}) + c C_{\alpha}.
 \end{aligned} \tag{9.21}$$

In conclusion, we have that

$$\frac{d\gamma}{dT} = P_{\Sigma} \left(\frac{d\gamma}{dT} \right) = c \mathbf{C} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot (\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{\Omega}}), \tag{9.22}$$

and (9.20) becomes

$$\frac{d_F \tilde{\mathbf{p}}}{dT} = -m(c^2 \mathbf{C} + c \tilde{\mathbf{v}} \cdot (\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{\Omega}})) + \tilde{\Phi} \equiv \tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\Phi}, \tag{9.23}$$

Remark 9.1 The F-W derivative on the left-hand side of (9.23) allows us to regard the right-hand side as the total force. The choice of this operator of derivation leads to (9.23) which differs from the equation proposed by Cattaneo in [5], [6] for the term $mc\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{K}$.

Remark 9.2 The momentum equation relative to the frame R contains only quantities independent of the coordinates adapted to R . The total force acting on the material point P is given by adding the projection on $\Sigma_{\mathbf{x}(T)}$ of the 4-force Φ and the term $\tilde{\mathbf{G}}$. If the 4-force vanishes, i.e., if the point P is freely gravitating, then its world-line is a geodesics. In conclusion, for the observer R there are forces which have the same structure of the fictitious forces of classical mechanics, except for the presence of the term related to a nonrigid frame. In general relativity, these forces, which are due to the existence of the gravitational field produced by the choice of the frame R , are absent if and only if R is an inertial frame.

10 Relative Energy Equation

Now, we want to evaluate the equation of energy relative to R . By the scalar product of (9.11) with γ , i.e., by projecting (9.11) on $\Theta_{\mathbf{x}(T)}$, we get

$$\frac{1}{c} \frac{dE}{dT} = -\gamma \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dT} + \gamma \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dT} + \frac{E}{c} \gamma \cdot \frac{d\gamma}{dT}. \quad (10.1)$$

But, it is

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dT} P_{\Theta}(\Phi) \cdot \gamma &= -\gamma \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dT}, \\ \gamma \cdot \frac{d\gamma}{dT} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dT} (\gamma \cdot \gamma) = 0, \end{aligned}$$

so that (10.1) becomes

$$\frac{dE}{dT} = c \frac{d\tau}{dT} P_{\Theta}(\Phi) \cdot \gamma + c\gamma \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dT}. \quad (10.2)$$

The last term in (10.2) can be written as it follows

$$c\gamma \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dT} = c \frac{d(\tilde{\mathbf{p}} \cdot \gamma)}{dT} - c\tilde{\mathbf{p}} \cdot \frac{d\gamma}{dT}. \quad (10.3)$$

The first term on the right-hand side of the above equation vanishes since γ and $\tilde{\mathbf{p}}$ are orthogonal. Then, we have the relation

$$c\gamma \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dT} = -c\tilde{\mathbf{p}} \cdot \frac{d\gamma}{dT}. \quad (10.4)$$

The above calculations allow us to write (10.2) in the form

$$\frac{dE}{dT} = c \frac{d\tau}{dT} P_{\Theta}(\Phi) \cdot \gamma - c\tilde{\mathbf{p}} \cdot \frac{d\gamma}{dT}. \quad (10.5)$$

Taking into account (8.17) and (9.23), we prove that the second term on the right-hand side of (10.5) is equal to $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{G}$. In fact, to transform the first term, we use (9.12) after decomposing Φ and $\mathbf{U}$ in space and time vectors

$$\Phi \cdot \mathbf{U} = (\tilde{\Phi} - \frac{d\tau}{dT} \gamma \cdot \Phi \gamma) \cdot (\tilde{\mathbf{v}} - c\gamma) = 0 \quad (10.6)$$

so that

$$\frac{d\tau}{dT} \gamma \cdot \Phi \gamma = \frac{1}{c} \tilde{\Phi} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (10.7)$$

and, (10.5) becomes

$$\frac{dE}{dT} = \tilde{\Phi} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{G}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}. \quad (10.8)$$

11 Continuity Equation

Let $\mathbf{V}$ be an arbitrary vector field of V_A such that

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (11.1)$$

Applying to $\mathbf{V}$ the standard decomposition

$$\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{v}} + a\boldsymbol{\gamma}, \quad a = -\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{V}, \quad (11.2)$$

(11.1) can be written as follows

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} + a\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla a = 0. \quad (11.3)$$

In view of (8.17) it is also

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma} = \tilde{\Omega}_\alpha^\alpha + \tilde{K}_\alpha^\alpha - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{C} = \tilde{K}_\alpha^\alpha, \quad (11.4)$$

since $\tilde{\Omega}$ is skew-symmetric and $\mathbf{C}$ is a space vector. Further, it is

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla a = \frac{da}{ds} \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial a}{\partial T}, \quad (11.5)$$

where T is the standard time. Taking into account (11.4) and (11.5), the equation (11.3) can also be written as follows

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{c} \frac{\partial a}{\partial T} + a\tilde{K}_\alpha^\alpha = 0. \quad (11.6)$$

Applying to $\nabla \tilde{\mathbf{v}}$ the standard decomposition, we have

$$\nabla \tilde{\mathbf{v}} = (\nabla \tilde{\mathbf{v}})_{\Sigma\Sigma} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})_{\Sigma\Theta} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})_{\Theta\Sigma} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})_{\Theta\Theta}, \quad (11.7)$$

where

$$((\nabla \tilde{\mathbf{v}})_{\Sigma\Sigma})_{\alpha\beta} = \gamma_\beta^\lambda \gamma_\alpha^\mu \nabla_\lambda \tilde{v}_\mu, \quad (11.8)$$

$$((\nabla \tilde{\mathbf{v}})_{\Sigma\Theta})_{\alpha\beta} = -\gamma_\alpha^\lambda \gamma_\beta^\mu \nabla_\lambda \tilde{v}_\mu \quad (11.9)$$

$$((\nabla \tilde{\mathbf{v}})_{\Theta\Sigma})_{\alpha\beta} = -\gamma_\alpha^\lambda \gamma_\beta^\mu \nabla_\lambda \tilde{v}_\mu \quad (11.10)$$

$$((\nabla \tilde{\mathbf{v}})_{\Theta\Theta})_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha^\lambda \gamma_\beta^\mu \nabla_\lambda \tilde{v}_\mu \quad (11.11)$$

Since $\gamma^{\alpha\beta}$ is a space tensor and γ^α is a time-like vector, the divergence of (11.9) and (11.10) vanishes. On the other hand, the divergence of (11.11), recalling that $\gamma^\mu \tilde{v}_\mu = 0$ and taking into account (8.17), gives

$$-\gamma^\mu \gamma^\lambda \nabla_\lambda \tilde{v}_\mu = \gamma^\lambda \tilde{v}^\mu \nabla_\lambda \gamma_\mu = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{C}. \quad (11.12)$$

Finally, from (5.11) we derive

$$(\overset{F}{\nabla} \tilde{\mathbf{v}})_\alpha^\alpha = ((\nabla \tilde{\mathbf{v}})_{\Sigma\Sigma})_\alpha^\alpha.$$

so that

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \overset{F}{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{C}. \quad (11.13)$$

The obtained results allow us to write (11.6) in the form

$$\overset{F}{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{c} \frac{\partial a}{\partial T} + a \tilde{K}_\alpha^\alpha + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{C} = 0. \quad (11.14)$$

If $\mathbf{V}$ is identified with the 4-current $\mathbf{J}$, $\tilde{\mathbf{v}}$ with the space current density $\tilde{\mathbf{j}} = P_\Sigma(\mathbf{J})$ relative to the observer R and a with $c\rho = -\gamma \cdot \mathbf{J}$, where ρ is the charge density relative to R , then (11.14) becomes

$$\overset{F}{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{j}} + \frac{\partial \rho}{\partial T} + \rho \tilde{K}_\alpha^\alpha + \tilde{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{C} = 0 \quad (11.15)$$

and we can say that the charge conservation relative to the observer R does not keep its classical form since the frame R is not rigid and the current density interacts with the gravitational field.

12 Divergence of a Skew-symmetric Tensor

Let $\tilde{\mathbf{v}}$ be a space vector and denote by $\mathbf{x}(\lambda)$ a curve of the congruence Γ defining the frame R . If we choose the standard time as parameter along this curve, the F-W derivative of $\tilde{\mathbf{v}}$ along the curve $\mathbf{x}(\lambda)$, in view of (4.4), (8.17), and (8.18), can be written as it follows

$$\frac{\partial_F \tilde{\mathbf{v}}}{\partial T} \equiv \frac{d_F \tilde{\mathbf{v}}}{dT} = \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dT} - c\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{C}\gamma, \quad (12.1)$$

since

$$\gamma = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{dT}.$$

In this section we determine the relative form with respect to a frame of reference R of the following absolute equation

$$\nabla_\beta F^{\alpha\beta} = J^\alpha, \quad (12.2)$$

where $\mathbf{F}$ is a skew-symmetric 2-tensor. From the skew-symmetry of $\mathbf{F}$ there follows the following decomposition into the subspaces Σ and Θ :

$$F^{\alpha\beta} = \tilde{F}^{\alpha\beta} + \tilde{F}^{\alpha\gamma} \gamma^\beta - \gamma^\alpha \tilde{F}^{\beta\gamma}, \quad \tilde{F}^{\alpha\beta} = -\tilde{F}^{\beta\alpha}. \quad (12.3)$$

Introducing (12.3) into (12.2), we obtain the equation

$$\nabla_\beta (\tilde{F}^{\alpha\beta} + \tilde{F}^{\alpha\gamma} \gamma^\beta - \gamma^\alpha \tilde{F}^{\beta\gamma}) = J^\alpha. \quad (12.4)$$

Now, we analyze the single terms on the right-hand side of (12.4). First, in view of (12.1), (8.18), and (4.4), we have that

$$\begin{aligned}\nabla_\beta(\tilde{F}^\alpha\gamma^\beta) &= \gamma^\beta\nabla_\beta\tilde{F}^\alpha + \tilde{F}^\alpha\nabla_\beta\gamma^\beta \\ &= \frac{1}{c}\frac{d\tilde{F}^\alpha}{dT} + \tilde{F}^\alpha\tilde{K}_\beta^\beta \\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial_F\tilde{F}^\alpha}{\partial T} + \tilde{F}^\beta C_\beta\gamma^\alpha + \tilde{F}^\alpha\tilde{K}_\beta^\beta.\end{aligned}\quad (12.5)$$

Moreover, from (11.13) we derive the relation

$$\begin{aligned}-\nabla_\beta(\gamma^\alpha\tilde{F}^\beta) &= -\gamma^\alpha\nabla_\beta\tilde{F}^\beta - \tilde{F}^\beta\nabla_\beta\gamma^\alpha \\ &= -\gamma^\alpha(\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{C}) - \tilde{F}^\beta(\tilde{\Omega}_\beta^\alpha + \tilde{K}_\beta^\alpha).\end{aligned}\quad (12.6)$$

Recalling that $\gamma_\mu\tilde{F}^{\mu\beta} = 0$ and $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ is skew-symmetric, we have that

$$\begin{aligned}\nabla_\beta\tilde{F}^{\alpha\beta} &= P_\Sigma(\nabla_\beta\tilde{F}^{\alpha\beta}) - \gamma^\alpha\gamma_\mu\nabla_\beta\tilde{F}^{\mu\beta} \\ &= P_\Sigma(\nabla_\beta\tilde{F}^{\alpha\beta}) + \gamma^\alpha\tilde{F}^{\mu\beta}\nabla_\beta\gamma_\mu \\ &= P_\Sigma(\nabla_\beta\tilde{F}^{\alpha\beta}) + \gamma^\alpha\tilde{F}^{\mu\beta}(\tilde{\Omega}_{\beta\mu} + \tilde{K}_{\beta\mu} - \gamma_\beta C_\mu) \\ &= P_\Sigma(\nabla_\beta\tilde{F}^{\alpha\beta}) - \gamma^\alpha\tilde{F}^{\beta\mu}\tilde{\Omega}_{\beta\mu}.\end{aligned}\quad (12.7)$$

In order to evaluate the term

$$P_\Sigma(\nabla_\beta\tilde{F}^{\alpha\beta}),$$

we start with considering all the projections of the 2-tensor $\nabla_\lambda\tilde{F}^{\alpha\beta}$ over the spaces obtained by the tensor product

$$(\Sigma + \Theta) \otimes (\Sigma + \Theta) \otimes (\Sigma + \Theta)$$

and then evaluating their divergence.

On $\Sigma \otimes \Sigma \otimes \Sigma$

$$\gamma_\lambda^\mu\gamma_\nu^\alpha\gamma_\delta^\beta\nabla_\mu\tilde{F}^{\nu\delta} \Rightarrow \gamma_\delta^\mu\gamma_\nu^\alpha\nabla_\mu\tilde{F}^{\nu\delta}.\quad (12.8)$$

On $\Sigma \otimes \Sigma \otimes \Theta$

$$-\gamma_\lambda^\mu\gamma_\nu^\alpha\gamma_\delta^\beta\nabla_\mu\tilde{F}^{\nu\delta} \Rightarrow -\gamma_\beta^\mu\gamma_\nu^\alpha\gamma_\delta^\beta\nabla_\mu\tilde{F}^{\nu\delta} = 0.\quad (12.9)$$

On $\Sigma \otimes \Theta \otimes \Sigma$

$$-\gamma_\lambda^\mu\gamma_\nu^\alpha\gamma_\delta^\beta\nabla_\mu\tilde{F}^{\nu\delta} \Rightarrow -\gamma_\delta^\mu\gamma_\nu^\alpha\gamma_\nu^\beta\nabla_\mu\tilde{F}^{\nu\delta}.$$

On the other hand, since $\tilde{F}^{\nu\delta}\gamma_\nu = 0$, we obtain

$$\begin{aligned}-\gamma_\delta^\mu\gamma_\nu^\alpha\gamma_\nu^\beta\nabla_\mu\tilde{F}^{\nu\delta} &= \gamma_\delta^\mu\gamma_\nu^\alpha\tilde{F}^{\nu\delta}\nabla_\mu\gamma_\nu \\ &= \gamma_\delta^\mu\gamma_\nu^\alpha\tilde{F}^{\nu\delta}(\tilde{\Omega}_{\mu\nu} + \tilde{K}_{\mu\nu} - \gamma_\mu C_\nu) \\ &= \gamma^\alpha\tilde{F}^{\nu\delta}(\tilde{\Omega}_{\delta\nu} + \tilde{K}_{\delta\nu} - \gamma_\delta C_\nu) \\ &= \gamma^\alpha\tilde{F}^{\nu\delta}\tilde{\Omega}_{\delta\nu}\end{aligned}$$

since $\gamma_\delta^\mu \gamma_\mu = 0$, $\tilde{F}^{\mu\nu}$ is skew-symmetric and $\tilde{K}_{\mu\nu}$ is symmetric. Finally, the divergence of the projection on $\Sigma \otimes \Theta \otimes \Sigma$ is

$$-\gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma_\delta^\beta \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta} = -\gamma^\alpha \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{\Omega}_{\mu\nu}. \quad (12.10)$$

On $\Sigma \otimes \Theta \otimes \Theta$

$$\gamma_\lambda^\mu \gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma_\delta^\beta \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta} \Rightarrow \gamma_\beta^\mu \gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma_\delta^\beta \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta} = 0. \quad (12.11)$$

On $\Theta \otimes \Sigma \otimes \Sigma$

$$-\gamma^\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu^\alpha \gamma_\delta^\beta \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta} \Rightarrow -\gamma_\beta \gamma^\mu \gamma_\nu^\alpha \gamma_\delta^\beta \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta} = 0. \quad (12.12)$$

On $\Theta \otimes \Sigma \otimes \Theta$

$$\gamma^\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu^\alpha \gamma_\delta^\beta \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta} \Rightarrow \gamma_\beta \gamma^\mu \gamma_\nu^\alpha \gamma_\delta^\beta \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta}.$$

Moreover,

$$\begin{aligned} \gamma_\beta \gamma^\mu \gamma_\nu^\alpha \gamma_\delta^\beta \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta} &= -\gamma^\mu \gamma_\nu^\alpha \gamma_\delta^\beta \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta} \\ &= \gamma^\mu \gamma_\nu^\alpha \tilde{F}^{\nu\delta} \nabla_\mu \gamma_\delta = \gamma^\mu \tilde{F}^{\alpha\delta} (\tilde{\Omega}_{\mu\delta} + \tilde{K}_{\mu\delta} - \gamma_\mu C_\delta). \end{aligned}$$

Therefore, from space character of $\tilde{F}^{\nu\delta}$ there follows

$$\gamma_\beta \gamma^\mu \gamma_\nu^\alpha \gamma_\delta^\beta \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta} = \tilde{F}^{\alpha\delta} C_\delta. \quad (12.13)$$

On $\Theta \otimes \Theta \otimes \Sigma$

$$\gamma^\mu \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma_\delta^\beta \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta} \Rightarrow \gamma_\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma_\delta^\beta \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta} = 0. \quad (12.14)$$

On $\Theta \otimes \Theta \otimes \Theta$

$$-\gamma^\mu \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma_\delta^\beta \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta} \Rightarrow \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma^\alpha \gamma_\delta^\beta \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta}.$$

On the other hand, it is

$$\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma^\alpha \gamma_\delta^\beta \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta} = -\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma^\alpha \tilde{F}^{\nu\delta} \nabla_\mu \gamma_\delta = 0. \quad (12.15)$$

Collecting the results (12.8)-(12.15), we obtain the relation

$$\nabla_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} = \gamma_\delta^\mu \gamma_\nu^\alpha \nabla_\mu \tilde{F}^{\nu\delta} + \tilde{F}^{\mu\nu} C_\nu - \gamma^\alpha \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{\Omega}_{\mu\nu} \quad (12.16)$$

which, in view of (5.15) gives

$$\nabla_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{F}{\nabla_\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta} + \tilde{F}^{\mu\nu} C_\nu - \gamma^\alpha \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{\Omega}_{\mu\nu}. \quad (12.17)$$

Finally, (12.5)-(12.8) and (12.17) supply

$$\begin{aligned} \nabla_\beta F^{\alpha\beta} &= \frac{F}{\nabla_\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta} + \frac{1}{c} \frac{\partial F \tilde{F}^\alpha}{\partial T} \\ &+ \tilde{F}^{\alpha\beta} C_\beta + \tilde{F}^\alpha \tilde{K}_\beta^\beta - \tilde{F}^\beta (\tilde{\Omega}_\beta^\alpha + \tilde{K}_\beta^\alpha) \\ &- \gamma^\alpha (\nabla_\beta \tilde{F}^\beta + \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{\Omega}_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (12.18)$$

Applying to J^α the standard decomposition

$$J^\alpha = \tilde{j}^\alpha + a\gamma^\alpha, \quad a = -\gamma_\beta J^\beta, \quad (12.19)$$

and taking into account (12.18), the absolute equation (12.2) is equivalent to the following *relative* equations:

$$\overset{F}{\nabla}_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} + \frac{1}{c} \frac{\partial_F \tilde{F}^\alpha}{\partial T} = -\tilde{F}^\alpha \tilde{K}_\beta^\beta - \tilde{F}^{\alpha\beta} C_\beta + \tilde{F}^\beta (\tilde{\Omega}_\beta^\alpha + \tilde{K}_\beta^\alpha) + \tilde{j}^\alpha, \quad (12.20)$$

$$\overset{F}{\nabla}_\beta \tilde{F}^\beta = -\tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{\Omega}_{\mu\nu} + a. \quad (12.21)$$

To give (12.20) and (12.21) a more expressive equivalent form, we start with proving the following formula

$$\frac{\partial_F \sqrt{\gamma}}{\partial T} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} K^\alpha_\alpha, \quad (12.22)$$

where $\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta})$ and $\partial_F/\partial T$ denotes the F-W derivative along a curve $\mathbf{x}(T)$ of the congruence Γ (see (12.2)).

First, we note that the F-W derivative of a scalar quantity is equal to the ordinary derivative and recall the derivation rule of a determinant. Then, along $\mathbf{x}(T)$ we have that

$$\begin{aligned} \frac{\partial_F \sqrt{\gamma}}{\partial T} &= \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial T} = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{\gamma} \\ &= \frac{\gamma^\mu}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \gamma}{\partial x^\mu} = \frac{\gamma^\mu}{2\sqrt{\gamma}} \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}. \end{aligned}$$

Since in [7] it is shown that $\gamma^\mu \partial \gamma_{\alpha\beta} / \partial x^\mu = 2K_{\alpha\beta}$, formula (12.22) is proved.

Taking into account this result, (12.20) and (12.21) become

$$\overset{F}{\nabla}_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} + \frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \frac{\partial_F}{\partial T} (\sqrt{\gamma} \tilde{F}^\alpha) = -\tilde{F}^{\alpha\beta} C_\beta + \tilde{F}^\beta (\tilde{\Omega}_\beta^\alpha + \tilde{K}_\beta^\alpha) + \tilde{j}^\alpha, \quad (12.23)$$

$$\overset{F}{\nabla}_\beta \tilde{F}^\beta = -\tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{\Omega}_{\mu\nu} + a. \quad (12.24)$$

13 Relative Maxwell's Equations

It is well known that the first two Maxwell's equations can be written in the following absolute form

$$\nabla_\beta F^{\alpha\beta} = J^\alpha, \quad (13.1)$$

where $F^{\alpha\beta}$ is the skew-symmetric electromagnetic 4-tensor and J^α the 4-current. This equation has the form (12.2) we have analyzed in the above section. Then,

the corresponding relative form is just given by (12.23) and (12.24). Referring to the decomposition (12.3), we decompose the electromagnetic tensor as it follows

$$F^{\alpha\beta} = \tilde{\epsilon}^{\alpha\beta\mu} \tilde{\mathcal{H}}_\mu + c \tilde{\mathcal{D}}^\alpha \gamma^\beta - c \tilde{\mathcal{D}}^\beta \gamma^\alpha, \quad (13.2)$$

where $\tilde{\epsilon}^{\alpha\beta\mu}$ is defined in (2.13), $\tilde{\mathcal{H}}_\mu$ is the adjoint space 4-vector of the skew-symmetric space tensor $\tilde{F}^{\alpha\beta}$, and $c \tilde{\mathcal{D}}^\alpha = \tilde{F}^\alpha = \gamma^\alpha_\beta \gamma_\mu F^{\beta\mu}$. It is a simple exercise to verify that the equations (12.23) and (12.24) assume the form

$$\overset{F}{\nabla} \times \tilde{\mathcal{H}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial_F \tilde{\mathcal{D}}}{\partial T} = -\tilde{\mathcal{H}} \times \mathbf{C} + \tilde{\mathcal{D}} \times \tilde{\omega} + \tilde{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{j}, \quad (13.3)$$

$$\overset{F}{\nabla} \cdot \tilde{\mathcal{D}} = -\frac{1}{c} \tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\omega} + \rho, \quad (13.4)$$

where

$$\tilde{\omega}^\alpha = \tilde{\epsilon}^{\alpha\beta\mu} \Omega_{\beta\mu}, \rho = -\frac{1}{c} \gamma_\beta J^\beta. \quad (13.5)$$

Moreover, the second group Maxwell's equations can be written in the following absolute form

$$\nabla_\beta F^{*\alpha\beta} = 0, \quad (13.6)$$

where $F^{*\alpha\beta}$ is a skew-symmetric electromagnetic 4-tensor, which in vacuum is equal to the adjoint tensor of $F^{\alpha\beta}$. Also this equation has the form (12.2). Then, the corresponding relative form is again given by (12.23) and (12.24). Referring to the decomposition (12.3), we decompose the electromagnetic tensor $F^{*\alpha\beta}$ as it follows

$$F^{*\alpha\beta} = \tilde{\epsilon}^{\alpha\beta\mu} \tilde{\mathcal{E}}_\mu + c \tilde{\mathcal{B}}^\alpha \gamma^\beta - c \tilde{\mathcal{B}}^\beta \gamma^\alpha, \quad (13.7)$$

where $\tilde{\mathcal{E}}_\mu$ is the adjoint space 4-vector of the skew-symmetric space tensor $\tilde{F}^{*\alpha\beta}$, and $c \tilde{\mathcal{B}}^\alpha = \tilde{F}^{*\alpha} = \gamma^\alpha_\beta \gamma_\mu F^{*\beta\mu}$. We can easily verify that the equations (12.23) and (12.24) assume the form

$$\overset{F}{\nabla} \times \tilde{\mathcal{E}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial_F \tilde{\mathcal{B}}}{\partial T} = -\tilde{\mathcal{E}} \times \mathbf{C} + \tilde{\mathcal{B}} \times \tilde{\omega} + \tilde{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{K}, \quad (13.8)$$

$$\overset{F}{\nabla} \cdot \tilde{\mathcal{B}} = -\frac{1}{c} \tilde{\mathcal{E}} \times \tilde{\omega}. \quad (13.9)$$

14 Divergence of a Symmetric Tensor

If $\mathbf{T}$ is a symmetric 2-tensor, instead of decomposition (12.3), we have the following other decomposition

$$T^{\alpha\beta} = \tilde{T}^{\alpha\beta} + \tilde{T}^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\alpha \tilde{T}^\beta + h \gamma^\alpha \gamma^\beta, \quad (14.1)$$

where $\tilde{T}^{\alpha\beta}$ is symmetric.

We propose to apply the procedure of the above section to the absolute equation

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0. \quad (14.2)$$

In view of (14.1), equation (14.2) can be written as

$$\nabla_\beta(\tilde{T}^{\alpha\beta} + \tilde{T}^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\alpha\tilde{T}^\beta + h\gamma^\alpha\gamma^\beta) = 0. \quad (14.3)$$

Note that (14.3) differs from (12.4) for the sign of the third term in brackets, for the symmetry of $\tilde{T}^{\alpha\beta}$ as well as for the term $\nabla_\beta(h\gamma^\alpha\gamma^\beta)$. This last one can also be written in the form

$$\begin{aligned} \nabla_\beta(h\gamma^\alpha\gamma^\beta) &= \gamma^\alpha\gamma^\beta\nabla_\beta h + h\gamma^\beta\nabla_\beta\gamma^\alpha + h\gamma^\alpha\nabla_\beta\gamma^\beta \\ &= \frac{1}{c}\gamma^\alpha\frac{\partial h}{\partial T} + h\gamma^\beta(\tilde{\Omega}_\beta^\alpha + \tilde{K}_\beta^\alpha - \gamma_\beta C^\alpha) \\ &+ h\gamma^\alpha(\tilde{\Omega}_\beta^\beta + \tilde{K}_\beta^\beta - \gamma_\beta C^\beta). \end{aligned}$$

Moreover, since γ^α is time-like and C^α is space-like, we have that

$$\nabla_\beta(h\gamma^\alpha\gamma^\beta) = hC^\alpha + \gamma^\alpha\left(\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial T} + h\tilde{K}_\beta^\beta\right). \quad (14.4)$$

The term $\nabla_\beta(\tilde{T}^\alpha\gamma^\beta)$ in (13.4) can be written in the form (12.9); the term $\nabla_\beta(\gamma^\alpha\tilde{T}^\beta)$ can be substituted by the opposite of (12.10); further, owing to the symmetry of $\tilde{T}^{\mu\beta}$, the condition (12.20) is substituted by the following equation

$$\nabla_\beta\tilde{T}^{\alpha\beta} = \gamma_\delta^\mu\gamma_\nu^\alpha\nabla_\mu\tilde{T}^{\nu\delta} + \tilde{T}^{\mu\nu}C_\nu + \gamma^\alpha\tilde{T}^{\mu\nu}\tilde{K}_{\mu\nu} \quad (14.5)$$

so that (12.21) becomes

$$P_\Sigma(\nabla_\beta\tilde{T}^{\alpha\beta}) = \tilde{\nabla}_\beta\tilde{T}^{\alpha\beta} + \tilde{T}^{\alpha\nu}C_\nu. \quad (14.6)$$

Finally, (14.5) can be put in the following form

$$\begin{aligned} \nabla_\beta T^{\alpha\beta} &= \tilde{\nabla}_\beta\tilde{T}^{\alpha\beta} + \frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{T}^\alpha}{\partial T} + hC^\alpha \\ &+ \tilde{T}^{\alpha\beta}C_\beta + \tilde{T}^\alpha\tilde{K}_\beta^\beta - \tilde{T}^\beta(\tilde{\Omega}_\beta^\alpha + \tilde{K}_\beta^\alpha) \\ &+ \gamma^\alpha\left(\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial T} + h\tilde{K}_\beta^\beta\right) \\ &+ \gamma^\alpha(\tilde{\nabla}_\beta\tilde{T}^\beta + \tilde{T}^\beta C_\beta + \tilde{T}^{\mu\nu}\tilde{K}_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (14.7)$$

whose spatial projection supplies the momentum balance

$$\tilde{\nabla}_\beta\tilde{T}^{\alpha\beta} + \frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{T}^\alpha}{\partial T} = -hC^\alpha - \tilde{T}^{\alpha\beta}C_\beta + \tilde{T}^\alpha\tilde{K}_\beta^\beta + \tilde{T}^\beta(\tilde{\Omega}_\beta^\alpha + \tilde{K}_\beta^\alpha), \quad (14.8)$$

whereas the time projection gives the energy balance equation

$$\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial T} + \tilde{\nabla}_\beta\tilde{T}^\beta = -h\tilde{K}_\beta^\beta - \tilde{T}^\beta C_\beta - \tilde{T}^{\mu\nu}\tilde{K}_{\mu\nu}. \quad (14.9)$$

15 Momentum-Energy Tensor of Dust Matter

The momentum-energy tensor of dust matter is

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 U^\alpha U^\beta, \quad (15.1)$$

where (U^α) is the 4-velocity and ρ_0 the proper mass density.

Applying to (U^α) the decomposition

$$U^\alpha = \Gamma(v^\alpha + c\gamma^\alpha), \quad (15.2)$$

we obtain

$$\rho_0 U^\alpha U^\beta = \rho v^\alpha v^\beta + c\rho(v^\alpha \gamma^\beta + v^\beta \gamma^\alpha + c^2 \gamma^\alpha \gamma^\beta). \quad (15.3)$$

where

$$\rho = \rho_0 \Gamma^2.$$

Consequently, we have that

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{\alpha\beta} &= \rho v^\alpha v^\beta, \\ \tilde{T}^\alpha &= c\rho v^\alpha \\ h &= \rho c^2. \end{aligned} \quad (15.4)$$

These relations allow us to write the relative momentum balance (13.7) and the relative balance of energy as it follows

$$\begin{aligned} \nabla_\beta(\rho v^\alpha v^\beta) + \frac{\partial \rho v^\alpha}{\partial T} &= -\rho c^2 C^\alpha - \rho v^\alpha v^\beta C_\beta \\ &+ \rho c v^\beta (\tilde{\Omega}_\beta^\alpha + \tilde{K}_\beta^\alpha), \end{aligned} \quad (15.5)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho c^2}{\partial T} + \nabla_\beta(\rho v^\beta) = -\rho c^2 \tilde{K}_\beta^\beta - c\rho v^\beta C_\beta - \rho v^\mu v^\nu \tilde{K}_{\mu\nu}. \quad (15.6)$$

16 Appendix

In this Appendix we prove theorem 5. Let Γ be a time-like congruence in the region W of V_4 and let $\gamma(\mathbf{x})$ be the unit time-like vector field tangent to the curves of Γ . In W we introduce an arbitrary system of coordinates (x^α) , $\alpha = 1, \dots, 4$. Without lack of generality, we can always suppose that the coordinates of a given point $\overset{0}{\mathbf{x}} \in W$ vanish. Finally, we denote by $(\mathbf{e}_\alpha)$ the fields of the natural bases relative to these coordinates.

We choose at $\overset{0}{\mathbf{x}}$ a triad of orthonormal space-like vectors $\mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, 3$, which are orthogonal to $\overset{0}{\gamma}$. Consequently, $(\overset{0}{\mathbf{x}}, \mathbf{a}_\alpha) \equiv (\overset{0}{\mathbf{x}}, \mathbf{a}_i, \overset{0}{\gamma})$ is a Lorentz frame at $\overset{0}{\mathbf{x}}$. Let A_β^α be the components of the natural base $(\mathbf{e}_\alpha)$ at $\overset{0}{\mathbf{x}}$ with respect to $(\mathbf{a}_\alpha)$:

$$\mathbf{e}_\alpha = A_\alpha^\beta \mathbf{a}_\beta. \quad (16.1)$$

Denoting by $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(0)$ the Christoffel symbols in the coordinates (x^α) evaluated at the point $\overset{0}{\mathbf{x}}$, and introducing the quantities

$$\Lambda_{\beta\mu}^\alpha = A_\nu^\alpha (A^{-1})_\beta^\rho (A^{-1})_\mu^\tau \Gamma_{\rho\tau}^\nu, \quad (16.2)$$

we define new coordinates $(\bar{x}^\alpha)$ in a neighborhood of $\overset{0}{\mathbf{x}}$ by the relations:

$$\bar{x}^\alpha = A_\tau^\alpha \left(x^\tau + \frac{1}{2} \Lambda_{\beta\mu}^\tau x^\beta x^\mu \right), \quad (16.3)$$

which, to within third-order terms, can be inverted as it follows

$$x^\alpha = (A^{-1})_\tau^\alpha \left(\bar{x}^\tau - \frac{1}{2} \Lambda_{\beta\mu}^\tau \bar{x}^\beta \bar{x}^\mu \right). \quad (16.4)$$

Since the natural base at $\overset{0}{\mathbf{x}}$ is $(\mathbf{a}_i, \gamma(\overset{0}{\mathbf{x}}))$, it is also

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(\overset{0}{\mathbf{x}}) = \eta_{\alpha\beta}. \quad (16.5)$$

To evaluate the Christoffel symbols $\bar{\Gamma}_{\beta\lambda}^\alpha$ in $\overset{0}{\mathbf{x}}$, we start noting that

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta}(\overset{0}{\mathbf{x}}) = (A^{-1})_\beta^\alpha, \quad \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta}(\overset{0}{\mathbf{x}}) = A_\beta^\alpha, \quad (16.6)$$

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta \partial \bar{x}^\mu} = -(A^{-1})_\rho^\alpha \bar{\Lambda}_{\beta\mu}^\rho. \quad (16.7)$$

Therefore, recalling the transformation law of the Christoffel symbols

$$\bar{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu} \Gamma_{\rho\lambda}^\nu + \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta \partial \bar{x}^\mu}, \quad (16.8)$$

and the definition (16.2), we get

$$\bar{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha(\overset{0}{\mathbf{x}}) = 0. \quad (16.9)$$

We conclude proving that:

the curves $\bar{x}^4 = \text{var}$ in an infinitesimal neighborhood $\bar{I}$ of $\overset{0}{\mathbf{x}}$ define a time-like congruence $\bar{\Gamma}$. Further, the unit vector $\bar{\gamma}$ tangent to the curves of $\bar{\Gamma}$ verifies the condition

$$\nabla \bar{\gamma}(\overset{0}{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}. \quad (16.10)$$

In other words, the local frame of reference defined by $\bar{\Gamma}$ is irrotational, rigid and geodesic.

First, the coordinates $(\bar{x}^\alpha)$ are adapted to $\bar{\Gamma}$ and the point $\overset{0}{\mathbf{x}}$ has coordinates $x^\alpha = \bar{x}^\alpha = 0$. Further, $\bar{\gamma}(\overset{0}{\mathbf{x}})$ is the tangent vector to the curve $\bar{x}^i = 0$, $\bar{x}^4 \in [-\delta, \delta]$ at the point $\overset{0}{\mathbf{x}}$ (see (16.4) and (16.1)). Since $\bar{\gamma}(\overset{0}{\mathbf{x}}) \cdot \bar{\gamma}(\overset{0}{\mathbf{x}}) = -1$ and $\bar{\gamma}(\mathbf{x})$

is a continuous field, the curves $\bar{x}^i = \text{const}$, $\bar{x}^4 = \text{var}$ are time-like, at least in a small neighborhood of $\overset{0}{\mathbf{x}}$. Therefore, they locally define a *time-like congruence* $\bar{\Gamma}$. Consequently, in view of (16.10), in such a neighborhood it is

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + O((\bar{x}^\lambda)^2), \quad (16.11)$$

where $O((\bar{x}^\lambda)^2)$ denote second-order quantities in the variables $(\bar{x}^\lambda)$. In particular, (16.11) implies that in a neighborhood of $\overset{0}{\mathbf{x}}$ it is $\bar{g}_{44} < 0$. Since the unit vector $\bar{\gamma}$ is tangent to the curves $\bar{x}^4 = \text{var}$ and the coordinates $(\bar{x}^\lambda)$ are adapted to $\bar{\Gamma}$, we have that $\bar{\gamma} = (0, 0, 0, \gamma^4)$ and

$$\bar{\gamma}(\mathbf{x}) \cdot \bar{\gamma}(\mathbf{x}) = \bar{g}_{44}(\bar{\gamma}^4)^2 = -1. \quad (16.12)$$

Further, we obtain the relation

$$\bar{\gamma}^4 = \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}}, \quad (16.13)$$

which, taking into account (16.11), supplies

$$\bar{\gamma}^4(\bar{x}^\lambda) = 1 + O((\bar{x}^\lambda)^2) \quad (16.14)$$

Finally, since (16.9) holds, it is

$$\nabla_\beta \bar{\gamma}^\alpha = \frac{\partial \bar{\gamma}^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} = \delta^{\alpha 4} \frac{\partial \bar{\gamma}^4}{\partial \bar{x}^\beta} = O(\bar{x}^\lambda)$$

and then (16.10) is proved. Then, starting from this Lorentz base, we introduce the *local geodesic coordinates* $(\bar{x}^\alpha)$ in a neighborhood of $\mathbf{x}$.

In these coordinates we have that ²

$$y^\alpha = (A^{-1})^\alpha_\lambda \left(\bar{x}^\lambda - \frac{1}{2} \Lambda^\lambda_{\beta\mu} \bar{x}^\beta \bar{x}^\mu \right), \quad (16.15)$$

where, in adapted coordinates, it is (see (2.13))

$$(A^{-1})^4_4 = \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}}. \quad (16.16)$$

From (16.15), we deduce that the curve $\bar{x}^i = 0$, $\bar{x}^4 = \text{var}$, which contains the point $\mathbf{x}$, has equations

$$y^\alpha = (A^{-1})^\alpha_\lambda \left(\delta^\lambda_4 \bar{x}^4 - \frac{1}{2} \Lambda^\lambda_{44} (\bar{x}^4)^2 \right). \quad (16.17)$$

²See (16.4).

References

- [1] Möller, C., *The Theory of Relativity*. Clarendon Press, Oxford, II ed., 1972.
- [2] Arzeliés, H., *Relativité Généralisée, Gravitation, (Principes généraux; équations d'Einstein. Dynamique et Optique. Repérages non einsteiniens)*. Gauthier-Villars, Paris, vol.I ed., 1961.
- [3] Arzeliés, H., *Relativistic Kinematics*. Pergamon Press, Oxford, I ed., 1966.
- [4] Arzeliés, H., *Relativistic Point Dynamics*. Pergamon Press, Oxford, I ed., 1972.
- [5] Cattaneo, C., Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale, *Annali di Matem. Pura e Appl.*, XLVIII, 1959.
- [6] Cattaneo, C., General Relativity: Relative Standard Mass, Momentum, Energy and Gravitational field in a General System of Reference, *Nuovo Cimento*, 10, 1958.
- [7] Cattaneo, C., *Introduzione alla Teoria Einsteiniana della Gravitazione*. Eredi Virgilio Veschi, Roma, I ed., 1962.
- [8] Cattaneo, C., *Complementi di Relatività*. La Goliardica, Roma, I ed., 1978.
- [9] Ferrarese, G., *Lezioni di Meccanica Relativistica*, vol. I. Pitagora, Bologna, I ed., 1985.
- [10] Ferrarese, G., *Lezioni di Relatività Generale*. Pitagora, Bologna, II ed., 2001.
- [11] Ferrarese, G., *Riferimenti Generalizzati in Relatività e Applicazioni*. Pitagora, Bologna, I ed., 2004.
- [12] Ferrarese, G. e Bini, D., *Introduction to Relativistic Continuum Mechanics*. Springer, Berlin Heidelberg, I ed., 2008.
- [13] Fermi E., Sui fenomeni che accadono in vicinanza di una linea oraria, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fiz. Mat. Nat.*, 31, 184, 1922.
- [14] Manoff S., Fermi derivative and Fermi- Walker transports over (Ln, g) -spaces, *Internat. J. Modern Phys. A*, 13, No.25, 1998.
- [15] Massa E., Space tensor in general relativity I: Spatial tensor algebra and analysis, *Gen. Rel. Grav.*, 5, 555, 1974.
- [16] Massa E., Space tensor in general relativity II: Physical applications, *Gen. Rel. Grav.*, 5, 573, 1974.
- [17] Massa E., Space tensor in general relativity II: The structural equations, *Gen. Rel. Grav.*, 5, 715, 1974.

- [18] Pripoac G.T., Generalized Fermi-Walker transport, *Libertas Math.*, XIX, 1999.
- [19] Estabrook F., Wahlquist H., Dyadic Analysis of space-time congruences, *J. Math. Phys.*, 5, 1629, 1964.
- [20] Sachs R.K., Wu H., *General Relativity for Mathematicians*, Springer Verlag, N.Y., 1977.
- [21] Walker A.G., Relative co-ordinates, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 52, 1932.
- [22] Weinberg S., *Gravitation and Cosmology*, J. Wiley Publ., N.Y., 1972.
- [23] Pripoae, G. T., *Generalized Fermi-Walker Parallelism induced by Generalized Schouten Connections*, Editor Gr.Tsagas Proceedings of The Conference of Applied Differential Geometry - General Relativity and The Workshop on Global Analysis, Differential Geometry and Lie Algebras, 2000, 117-125 c 2002 Balkan Society of Geometers, Geometry Balkan Press.
- [24] Grassini, R., Estensione del Trasporto Misto di Fermi ad un Modello Matematico Generale di Spazio-Tempo. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 56 no. 5(8):720-728, 1974.
- [25] Grassini, R., Riferimenti Fisici e Relative Connessioni Spaziali in un Modello Matematico Generale di Spazio-Tempo. *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat.*, Napoli, 41(4):209-222, 1974.
- [26] Grassini, R., Geometrodinamica Canonica. *Ric. Mat.*, 29(1):153-172, 1980.
- [27] Grassini, R., Sulla Struttura dello Spazio-Tempo. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 123(4):357-375, 1980.
- [28] Synge, J. L., *Relativity: The General Theory*. North Holland Publishing Co., Amsterdam, I ed., 1960.
- [29] Synge, J. L., *Relativity: The Special Theory*. North Holland Publishing Co., Amsterdam, II ed., 1964.
- [30] Born, M., Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips', *Ann. Phys.*, Leipzig, 30, 156, 1909.
- [31] Felice, F. e Clarke, C. J. S., *Relativity on Curved Manifolds*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, I ed., 1990.
- [32] Grön, Hervik, S., *Einstein's General Theory of Relativity. With Modern Applications in Cosmology*. Springer, New York, I ed., 2007.
- [33] Straumann N., *General Relativity and Relativistic Astrophysics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, I ed., 1984.
- [34] Castagnino, M., Sulle congruenze di curve nulle in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale, *Rend. di Mat.*, Roma, vol. XXII, 1959.

- [35] Romano, A., Sul gradiente relativo di deformazione in relatività generale, *Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat.*, Napoli, vol. XXXVI, 1969.
- [36] Sachs, R. K., and Wu, H., *General Relativity for Mathematicians*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [37] Rodrigues, W. A., and de Olivera, E. C., *The many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations*, Springer, New York, 2007.

Sull'origine filogenetica della mente umana

Nota di Antonio Giuditta^{1*}

Presentata dal socio Antonio Giuditta
(Adunanza del 2 dicembre 2011)

Key words: mind, evolution, elementary particles

Abstract. The phylogenetic origin of human mind was examined using logical inferences and elementary criteria of indirect but objective nature. The survey indicates that primitive mental features may be present even in prokaryotes and may be traced back to elementary particles.

Riassunto. L'origine filogenetica della mente umana è stata esaminata sulla base di deduzioni logiche e criteri elementari di natura indiretta ma oggettiva. Questa analisi indica che caratteristiche mentali potrebbero essere presenti sin dai procari ed essere riconosciute anche nelle particelle elementari.

1-INTRODUZIONE

Il problema del rapporto mente-corpo è stato generalmente esaminato tenendo conto soprattutto delle capacità mentali dell'uomo adulto. Questa implicita premessa ha portato alla sostanziale marginalizzazione del problema dell'origine filogenetica della mente umana, pregiudizialmente ricondotta a quella del cervello sulla base di una indimostrata equivalenza tra attività cerebrali e mentali. Noi riteniamo al contrario che una valutazione degli aspetti filogenetici della mente umana debba essere intrapresa in maniera indipendente data la grande rilevanza dell'argomento e l'opportunità di considerare un vecchio quesito da un diverso punto di vista.

La biologia insegna che le caratteristiche materiali di un organismo emergono e si differenziano nelle iniziali fasi ontogenetiche del ciclo vitale durante le quali i caratteri dell'individuo adulto si precisano sulla base di indicazioni fornite da codifiche genomiche e modulazioni citoplasmatiche. Questi incredibili depositi di informazione sono andati strutturandosi nel corso di un processo evolutivo durato 4-5 miliardi di anni, iniziato alla fine di un più lungo periodo di evoluzione prebiologica. E' quindi evidente che se si vuole ripercorrere l'originaria dinamica di sviluppo dei tratti corporei della specie umana non è sufficiente esaminarne le fasi ontogenetiche, ma è necessario inoltrarsi a ritroso nei tempi filogenetici per identificarne gli avvenimenti iniziali e chiarirne i meccanismi. Considerazioni dello stesso tipo non possono non applicarsi al problema dell'origine della mente umana dato il suo legame così stretto con le strutture corporee.

Nel contesto di questo articolo ci si riferirà alla mente come alla capacità di generare ed elaborare immagini soggettive di tipo cosciente e non cosciente che includono anche quelle comunemente attribuite all'anima e allo spirito. Non è nostra intenzione descrivere e tanto meno approfondire le diverse visioni del mondo che religioni, sistemi filosofici e più recentemente le scienze hanno proposto nei riguardi della natura, dell'origine e del ruolo della mente. E' sufficiente ricordare che esse vanno da concetti che assegnano alla mente una natura *sostanzialmente* diversa dalla materia (vedi *res cogitans* e *res extensa* di Cartesiana memoria) ad un approccio riduttivo nel quale gli eventi mentali si identificano alle attività cellulari e molecolari del cervello. Noi riteniamo che nessuna di queste posizioni sia vicina alla realtà, e preferiamo partire dalla premessa che l'universo sia andato strutturandosi da una sola *sostanza*. Questa maniera di

¹ Dipartimento delle Scienze Biologiche, Università Federico II, Napoli, Italia. *giuditta@unina.it

vedere ci impedisce di credere all'esistenza di due diverse *sostanze*. D'altro canto, le evidenti differenze che ognuno di noi percepisce tra eventi soggettivi e oggettivi ci fanno rifiutare la semplicistica riduzione dei primi ai secondi. Ne deduciamo che le straordinarie capacità della mente umana abbiano le loro radici nella filogenesi cosmica e siano andate evolvendosi e differenziandosi in parallelo all'evolversi e al differenziarsi delle caratteristiche materiali dei corpi.

Qualunque sia la maniera di vedere che si dimostrerà più vicina alla realtà, lo studio dell'ontogenesi della mente umana rimarrà necessario e affascinante ma a nostro avviso non in grado di chiarire le ragioni profonde che ne hanno condizionato lo sviluppo. Questi interrogativi potranno eventualmente risolversi solo quando si decifreranno meccanismi e circostanze che hanno condizionato il manifestarsi e il progredire dell'evoluzione prebiologica e biologica. Forse la lezione più importante che può ricavarsi dai sostanziali cambiamenti a cui la mente umana va incontro durante l'ontogenesi riguarda le loro strette associazioni con le concomitanti variazioni dell'assetto corporeo. E' da presumere che un parallelismo dello stesso tipo si sia manifestato nel corso della filogenesi.

2-CONSIDERAZIONI SULL'ORIGINE FILOGENETICA DELLA MENTE UMANA

Esse saranno illustrate sulla falsariga di un cammino a ritroso nel tempo.

Prima considerazione. Si basa sullo stretto connubio che esiste tra mente e cervello, accettato unanimemente e più che confortato da innumerevoli studi. Pur non escludendo una possibile esistenza di menti non associate a corpi, l'unione tra mente e cervello implica che l'origine filogenetica della mente umana è strettamente connessa a quella del cervello. Ne consegue che sono da considerare dotati di caratteristiche mentali tutti gli organismi dotati di cervello, inclusi quelli con sistemi nervosi meno evoluti e più primitivi, costituiti da poche o singole cellule nervose. Appare evidente che tali caratteristiche sono da considerare meno complesse di quelle dell'uomo e degli animali superiori, ed è da presumere che esse siano parzialmente o prevalentemente subcoscienti. La loro natura resta tuttavia mentale e a rigor di logica non può essere sbrigativamente confinata nel mondo del materiale.

Si afferma quindi che la mente è presente in linee filogenetiche estese indietro nel tempo molto al di là di quanto finora è creduto. Ciò sottolinea una qualità della mente di non piccola importanza, quella di essersi evoluta sin da tempi remoti, di molto precedenti la comparsa dell'uomo, dei primati e dei mammiferi superiori. Tale potenzialità è restata finora minimizzata e non ha goduto della dovuta attenzione da parte della comunità scientifica.

Seconda considerazione. Si fonda sulla premessa che anche un elementare evento mentale come la genesi di un'immagine percettiva (qualia) non può essere equiparata alla concomitante attività cerebrale, nonostante la sua stretta associazione con essa. Si prenda ad esempio l'immagine visiva generata da stimoli esterni. Essa è certamente da includere tra gli eventi mentali di base. Forme e colori suscitati da onde elettromagnetiche richiedono l'attivazione del pigmento fotosensibile (rodopsina) presente nei fotorecettori retinici e la successiva attivazione di circuiti nervosi che dall'occhio raggiungono lontane regioni cerebrali. Non può non riconoscersi che si tratta di eventi fisici o chimici la cui natura non è diversa da quella degli stimoli, quindi non paragonabile alla natura soggettiva e immateriale dei qualia.

Non è inutile ricordare che l'attivazione di qualunque circuito nervoso fa parte integrante del linguaggio utilizzato dal cervello per trasferire informazione da una regione all'altra, nel caso in esame dai recettori sensoriali alla neocorteccia. Tale linguaggio rimane del tutto identico a se stesso qualunque sia il tipo di stimolo che impegna i recettori, siano essi acustici, visivi, chimici, o meccanici. C'è quindi una ineludibile uniformità che rende improbabile accettare che la sorprendente specificità dei qualia sia dovuta alla selettiva localizzazione dell'attività nervosa. D'altra parte, non sembra neanche plausibile che la generazione dei qualia possa richiedere l'intervento di un'entità immateriale quale lo spirito, *sostanza* diversa dalla materia, come ritengono religioni e sistemi filosofici. Se fosse così, la stretta associazione dei qualia con l'attività cerebrale richiederebbe una simultaneità di eventi che appartengono a *sostanze* diverse e quindi del tutto indipendenti. A questa necessaria conseguenza manca una base logica.

Quale che sia il meccanismo di generazione dei qualia, la loro stretta associazione con l'attività cerebrale solleva il problema dell'origine filogenetica di questo straordinario legame. Diventa quindi legittimo chiedersi se esso sia riconoscibile lungo tutto il corso dell'evoluzione biologica, o se esso sia comparso a partire da un certo grado di complessità fisica. In questo secondo caso dovrebbe essere possibile

identificare una soglia di complessità biologica al di sotto della quale la presenza di aspetti mentali dovrebbe essere esclusa. Prima di procedere alla ricerca di plausibili risposte, è opportuno tener conto delle seguenti considerazioni.

L'esistenza dei qualia nell'uomo presuppone una caratteristica di base della mente umana che riguarda la distinzione tra soggetto e mondo esterno, tra 'sé' e 'non sé'. Soltanto un'entità capace di percepire uno stimolo (quindi soggetto o 'sé') appare in grado di generare qualia che si producono nel suo 'spazio interno'. Infatti, un secondo soggetto che lo osservi e faccia quindi parte del 'non sé' di quel soggetto (pur essendo un 'sé' per proprio conto) non è in grado di percepirne i qualia in quanto egli resta all'esterno dello 'spazio interno' del primo soggetto. Nonostante questa difficoltà, nel caso che l'entità percepente sia un uomo, è addirittura banale riconoscere che nessun altro uomo dubita della sua capacità di generare qualia. In qualche modo si dà per scontato che ogni uomo possieda questa capacità e che essa sia strettamente collegata alla presenza di recettori sensoriali e di appropriate risposte fisiologiche e/o comportamentali. Ne consegue che questa inferenza può essere estesa a qualunque organismo e che quindi l'individuazione di caratteristiche oggettive di questo tipo costituisce un criterio affidabile per il riconoscimento di capacità mentali in grado di generare qualia.

L'applicazione di questo criterio nell'ambito filogenetico porta alla constatazione che anche organismi estremamente semplici come i procarioti possiedono caratteristiche minime ma tuttavia sufficienti a indicare la loro capacità di generare qualia. Infatti anche i procarioti sono dotati di un ricco repertorio di recettori e di risposte fisiologiche e/o comportamentali conseguenti alla loro stimolazione. Si tratterà naturalmente di immagini mentali notevolmente semplici e primitive, presumibilmente anche meno sofisticate di quelle presenti in organismi dotati di primitivi sistemi nervosi. Quale che sia il loro grado di semplicità, anche i qualia dei procarioti sono congrui alle loro condizioni ambientali e stili di vita, e non possono che essere considerati di natura mentale.

Se si accetta che anche i procarioti siano capaci di immagini mentali, ne consegue che la capacità di generare qualia è diffusa a tutte le specie viventi, sia pure con caratteristiche di sofisticazione e finezza del tutto diverse da quelle dei qualia umani, presumibilmente correlate alla complessità fisiologica e comportamentale delle varie specie. Pertanto, aspetti mentali non si trovano soltanto negli organismi dotati di sistema nervoso come suggerisce la precedente considerazione. Il limite del mentale va piuttosto spostato molto più indietro nei tempi filogenetici fino a raggiungere quelli che hanno preceduto di molto la comparsa delle cellule eucariotiche e il loro differenziamento in cellule nervose.

Ci si può chiedere se i qualia degli organismi primitivi siano coscienti o se essi, come sembra più probabile, siano parzialmente o totalmente non coscienti. Non credo che questa domanda possa ricevere risposte affidabili entro breve tempo. In realtà, la stessa esistenza di qualia non coscienti potrebbe essere messa in dubbio, nonostante che la dinamica dei nostri istinti e pulsioni non coscienti dimostri che rappresentazioni non coscienti esistono e sono elaborate in modo appropriato. Non si dimentichi che nessun uomo è capace di percepire i qualia di altri uomini, e meno che meno di altri organismi, evoluti o primitivi che siano. Ma questa difficoltà non sembra insormontabile: ogni uomo è convinto che ogni altro uomo ha una mente. Sebbene non sia del tutto facile, questa convinzione dovrebbe essere estesa a tutti gli organismi, se non altro che per ragioni di consistenza logica.

Terza considerazione. Riguarda la capacità della mente di memorizzare ed elaborare i dati dell'esperienza sensoriale per risolvere problemi che riguardano l'organismo e i suoi rapporti con l'ambiente. L'elaborazione dei dati sensoriali consente infatti di mettere in luce relazioni e significati non immediatamente evidenti ad una prima analisi. Le informazioni che vengono dall'ambiente e quelli che riflettono le capacità dell'organismo vanno incontro ad operazioni di elaborazione logica di varia complessità (computing biologico) che consentono di risolvere problemi posti dalle interazioni dell'organismo con un ambiente in continuo divenire. Il pervenire ad una soluzione (problem solving) è da considerare una forma di apprendimento assimilabile alla costruzione di un mosaico che rispecchia il nuovo rapporto organismo-ambiente e che utilizza tessere informative in parte esplicite, in parte deducibili dall'elaborazione dei dati sensoriali. Queste ultime operazioni sono classificabili come cibernetiche se viste dalla prospettiva dei loro meccanismi, ma come mentali se considerate dal soggetto che ne percepisce divenire e risultati.

La capacità di apprendere è diffusa a tutti gli organismi, anche a quelli privi di sistema nervoso come procarioti, protisti, e piante. È noto ad esempio che batteri esposti a determinate combinazioni di variabili ambientali possono apprendere ad esprimere alternativamente geni che promuovono il metabolismo anaerobico o quello aerobico a seconda della natura di tali combinazioni (Tagkopoulos et al., 2008). In protisti ciliati il trasferimento di DNA dal micronucleo al macronucleo richiede complesse modifiche di

struttura che vengono attuate da operazioni descrivibili da appropriati algoritmi (Ehrenfeucht et al., 2007). Piante, organismi unicellulari, e organismi multicellulari primitivi sono in grado di acquisire ed elaborare informazioni (Baluška and Mancuso, 2009; Darwin, 2010). Si può quindi concludere che operazioni di elaborazione dei dati sensoriali sono presenti in tutti gli organismi.

Sebbene gli aspetti soggettivi del computing biologico presente in altri organismi non siano direttamente percepibili dall'uomo, la loro associazione con aspetti cibernetici non diversi da quelli che si verificano nell'uomo suggerisce che tali aspetti, sia pure primitivi o molto primitivi, siano presenti anche in organismi privi di sistema nervoso, e siano quindi da considerare presenti sin dall'inizio del processo evolutivo. Poiché è presumibile che si tratti di attività non coscienti, è opportuno notare che considerare soggettive attività non coscienti non implica una contraddizione. E' noto infatti che anche l'attività cosciente dell'uomo è sostenuta da processi mentali non coscienti che superano la soglia della coscienza solo in parte. Anche l'apprendimento richiede operazioni mentali che sono coscienti solo in parte. Ad esempio, sia nell'uomo che negli animali l'apprendimento di compiti complessi richiede operazioni di elaborazione che hanno luogo nel sonno (Ambrosini and Giuditta, 2001). Nell'uomo si è inoltre dimostrato che la soluzione di un problema che richiede la preventiva identificazione di una regola implicita viene raggiunta molto più facilmente dopo un periodo di sonno che dopo un corrispondente periodo di veglia (Wagner et al., 2004). Si deve inoltre notare che attività mentali al di sotto della soglia di coscienza nell'uomo potrebbero risultare coscienti se a percepirle fosse il sotto sistema nel quale esse si manifestano. In altre parole, le condizioni che determinano la soglia di coscienza potrebbero essere diverse o mancare del tutto in organismi più semplici. Pertanto, eventi sotto soglia in organismi evoluti potrebbero superare quella soglia in entità biologiche meno complesse.

Quarta considerazione. Le considerazioni finora discusse lasciano insoluto il problema degli eventuali aspetti mentali degli oggetti inanimati. Dovremmo forse concludere che le entità inanimate siano puramente materiali, mentre quelle biologiche comprendano felicemente mente e materia? Se così non fosse, quali considerazioni sarebbero in grado di estendere il dominio della mente al di là della soglia biologica?

Se si propendesse per la prima alternativa, la presenza della mente negli organismi sarebbe da considerare un fenomeno emergente, definibile come l'apparire di determinate qualità in entità costruite da componenti che ne siano del tutto prive. Gli esempi di proprietà emergenti sono innumerevoli. Tra essi le proprietà dell'acqua che differiscono radicalmente da quelle dei componenti idrogeno e ossigeno. E' tuttavia opportuno notare che le proprietà delle molecole riflettono la distribuzione spazio-temporale degli elettroni e dei nuclei di cui sono fatte, e che la distribuzione di questi ultimi è radicalmente diversa nell'acqua da quella propria dell'idrogeno e dell'ossigeno. Pertanto, le proprietà dell'acqua e più generalmente di tutte le molecole sono solo l'espressione della prodigiosa capacità di elettroni e nuclei di generare innumerevoli architetture.

Un ragionamento dello stesso tipo può essere fatto nei riguardi delle subunità (elettroni e nuclei) di cui sono fatte le molecole. Anche esse sono i prodotti delle capacità combinatorie delle loro subunità di ordine inferiore. Siamo quindi condotti verso il limite ultimo delle particelle elementari comparse subito dopo il big bang, costituenti basilari di ogni corpo materiale e primi responsabili della creatività filogenetica. Può un ragionamento di questo tipo applicarsi alle qualità mentali? In linea di principio e per certi versi sorprendentemente, la risposta sembra affermativa. Le particelle elementari condividono infatti qualità (campi d'energia, identità incerta tra particella e onda) che hanno ben poco in comune con quelle degli oggetti materiali studiati dalla fisica classica (identità definita, confini noti) responsabili del corrente concetto di materia. Le loro qualità si avvicinano piuttosto a quelle delle entità immateriali (Dunne and Jahn, 2005; Jahn, 2007). Queste somiglianze suggeriscono l'ipotesi che caratteristiche immateriali siano presenti anche nei corpi inanimati, non solo negli organismi viventi. Si tratta di una ipotesi che sembra indirizzarci verso la seconda alternativa, sia pure in modo inaspettato. Cerchiamo quindi di addentrarci in questa direzione tentando di adattare le nostre precedenti considerazioni (in particolare la seconda) a livelli di complessità situati al di sotto del livello cellulare. In questi ambiti, l'interazione tra stimolo (non 'sé') ed organismo ('sé'), considerata cruciale per la genesi dell'immagine mentale, dovrà spogliarsi di qualunque attributo che impedisca di renderla compatibile con il comportamento degli oggetti inanimati.

E' quindi di un certo interesse notare che tutti gli oggetti inanimati manifestano una modalità di comportamento che non sembra conoscere eccezioni. Essa riguarda il loro movimento e le loro mutue interazioni che hanno luogo ineludibilmente nello spazio-tempo, e spesso comportano reciproche modificazioni. La natura di tali interazioni non sembra essere sostanzialmente diversa da quella che riguarda l'incontro di uno stimolo con un recettore sensoriale, in particolare se quest'ultimo appartiene ad un

organismo unicellulare. Poiché l'interazione stimolo-recettore rappresenta l'evento cruciale in grado di generare l'immagine mentale, anche la mutua interazione tra oggetti inanimati può essere vista in questa prospettiva e quindi ritenersi capace di generare qualcosa di analogo, sia pure con caratteristiche assolutamente più semplici. L'intera storia dell'universo dimostra che la modifica di qualsivoglia entità presuppone una sua interazione con un partner appropriato, sia che si tratti di particelle elementari o di persone. In altre parole, l'essenza delle esperienze soggettive dell'uomo potrebbe non differire, *mutatis mutandis*, da quella degli oggetti inanimati che interagiscono tra loro. Non sembra ci sia alcuna sostanziale ragione che imponga di considerare i corpi inanimati come oggetti esclusivamente materiali.

Il tentativo di estendere queste considerazioni al di sotto della soglia biologica non può non apparire problematico a coloro che guardano alla realtà nella prospettiva del dualismo Cartesiano. Ma se da essa ci si allontana, diviene opportuno ritornare alla distinzione tra 'sé' e 'non sé' che è stata prima utilizzata nel caso dell'interazione tra stimolo e soggetto. La qualifica 'non sé' attribuita allo stimolo non implica che questa sia la sua natura ma che esso stia interagendo con un'entità molto più complessa. Se si ritiene che anche le particelle elementari presentino aspetti mentali, bisogna ammettere che in qualunque tipo di interazione ciascun partner possa essere definito 'sé' o 'non-sé' a prescindere dal suo grado di complessità ma solo in virtù del punto di vista dal quale lo si osserva.

Quinta considerazione. Può essere ritenuta la più diretta e ovvia. Deriva dal postulato che l'universo sia una sola entità nella quale gli aspetti fisici e mentali possono pensarsi solo come attributi di un'unica sostanza. Se ne deduce che poiché l'universo si è evoluto da un'entità non ben definita, le attuali realtà fisiche e mentali devono considerarsi derivate da quelle presenti in quella entità presumibilmente in potenza, e da essa trasferite alle particelle elementari (entità in atto) in seguito al big bang. Poiché esse sono da considerare i componenti ultimi di ogni cosa animata o inanimata comparsa nel corso dell'evoluzione cosmica, ne consegue che le caratteristiche fisiche e mentali di ogni cosa sono da attribuire alla capacità dei campi d'energia delle particelle elementari di unirsi tra loro (fondersi) e generare entità di ordine superiore, inizialmente corpi e menti di piccole dimensioni, e successivamente corpi e menti di ordine progressivamente più elevato.

Questa bozza ultra semplificata del processo evolutivo si basa sulla natura estremamente indifferenziata dei primi prodotti del big bang e sulla condivisione dei campi energetici di entità tra loro complementari. L'associazione di particelle non complementari viene impedita dalla presenza di proprietà reciprocamente non compatibili (vedi cariche elettriche dello stesso segno o antiparticelle destinate al reciproco annichilimento). La configurazione di entità correttamente assemblate (da atomi ad ecosistemi) non garantisce soltanto la loro sopravvivenza ma anche l'eventuale formazione di entità di ordine superiore dotate di campi energetici più differenziati e maggiori gradi di libertà. Alla fusione dei campi energetici di entità sempre più complesse appare ragionevole attribuire il divenire di capacità mentali sempre più ampie e incisive. La fusione dei campi energetici di entità semplici o complesse è da considerare responsabile anche della formazione di entità incapaci di ulteriori interazioni, vicoli ciechi del processo evolutivo perché ferme al loro livello di complessità. Esempi in proposito sono presenti in gran numero nell'universo.

3-CONCLUSIONI

Le considerazioni di cui sopra consentono le seguenti conclusioni:

- a) se si accetta che caratteristiche mentali siano presenti nei procarioti, diviene ragionevole ipotizzare che la mente dell'uomo si sia evoluta parallelamente al corpo durante l'intera filogenesi biologica;
- b) se si accetta che aspetti mentali siano presenti anche nelle particelle elementari, è concepibile ipotizzare che la mente dell'uomo abbia iniziato ad evolversi sin dalla loro comparsa lungo tutto il periodo prebiologico e biologico dell'evoluzione cosmica. In questo secondo caso i campi energetici delle particelle elementari sono da ritenere responsabili della progressiva generazione delle entità materiali e mentali attualmente presenti nell'universo.

4-RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Ambrosini, M.V. and Giuditta, A. (2001) *Learning and sleep: the sequential hypothesis*. Sleep Med. Rev., 5, 477-490.
2. Baľuška, F. and Mancuso, S. (2009) *Deep evolutionary origins of neurobiology*. Commun. Integrat. Biol., 2, 1-6.
3. Darwin, C. (2010) *Taccuini filosofici* (a cura di A. Attanasio) pp. 233.

4. Dunne, B.J. and Jahn, R.G. (2005) *Consciousness, information, and living systems*. Cell. Mol. Biol. **51**, 703-714.
5. Ehrenfeucht, A. et al. (2007) *A model for the origin of internal eliminated segments (IESs) and gene rearrangement in stichotrichous ciliates*. J. Theor. Biol. **244**, 108-114.
6. Jahn, R.J. (2007) *The complementarity of consciousness*. Explore (NY), **3**, 307-310.
7. Tagkopoulos, I. et al. (2008) *Predictive behavior within microbial genetic networks*. Science **320**, 1313-1317.
8. Wagner, U. et al. (2004) *Sleep inspires insight*. Nature, **427**, 352-355.

L'Osservatorio Meteorologico di *San Marcellino* - Napoli Centro: i dati dell'anno 2011

Nota di A. Mazzearella, R. Di Cristo, R. Viola

Presentata dal Socio C. Sbordone
(Adunanza del 2 dicembre 2011)

Osservatorio Meteorologico
Dipartimento di Scienze della Terra
Largo San Marcellino, 10 – 80138 NAPOLI
Università degli Studi di Napoli *Federico II*
Tel. 081.2538347 Fax 081.5522756
e-mail: adriano.mazzearella@unina.it

INDICE DELLE SEZIONI

	Pag.
<i>L'Osservatorio Meteorologico della Federico II</i>	353
<i>Rapporto Meteorologico per l'anno 2011</i>	354
<i>Legenda</i>	355
<i>Medie orarie</i>	
<i>Gennaio</i>	356
<i>Febbraio</i>	357
<i>Marzo</i>	358
<i>Aprile</i>	359
<i>Maggio</i>	360
<i>Giugno</i>	361
<i>Luglio</i>	362
<i>Agosto</i>	363
<i>Settembre</i>	364
<i>Ottobre</i>	365
<i>Novembre</i>	366
<i>Dicembre</i>	367
<i>Medie giornaliere</i>	
<i>Gennaio</i>	368
<i>Febbraio</i>	370
<i>Marzo</i>	372
<i>Aprile</i>	374
<i>Maggio</i>	376
<i>Giugno</i>	378
<i>Luglio</i>	380
<i>Agosto</i>	382
<i>Settembre</i>	384
<i>Ottobre</i>	386
<i>Novembre</i>	388
<i>Dicembre</i>	390
<i>Medie mensili</i>	392
<i>Distribuzione mensile per soglie delle piogge giornaliere e delle temperature minime e massime</i>	394

**L'Osservatorio Meteorologico di
"San Marcellino"
dell'Università degli Studi di Napoli *Federico II***

I dati meteo sono attualmente rilevati da una centralina automatica sita sulla torretta dell'edificio di S. Marcellino (lat. 40°50' 48" N; long. 14°15'31" E; quota 50 m slm), sede attuale del Dipartimento di Scienze della Terra, a meno di 50 m dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

La stazione gestisce i seguenti sensori SIAP+MICROS :

- temperatura dell'aria (°C)
- pressione atmosferica (hPa)
- umidità relativa (%)
- velocità del vento (m/s)
- direzione del vento (°Nord)
- precipitazione (mm)
- radiazione solare globale (W/m²)
- radiazione UVb (W/m²)

I dati sono acquisiti con cadenza di 10 minuti ed i valori, fatta eccezione per la pioggia che viene registrata come cumulata, sono quelli istantanei; i dati giornalieri di radiazione globale ed UVb sono mediati sull'intero arco delle 24 ore.

Sono stati analizzati anche i dati giornalieri della temperatura del mare (°C) misurati nel golfo di Napoli (lat. 40°50'23"; long. 14° 16'09") presso il molo del Carmine, gentilmente forniti dall'Istituto Superiore per la Protezione e la Ricerca Ambientale (ISPRA).

È possibile accedere via web alla consultazione dei dati rilevati in tempo reale all'indirizzo:

<http://www.meteo.unina.it>

RAPPORTO METEOROLOGICO DELL'ANNO 2011

Il bollettino è così organizzato:

- Una catalogazione dei dati e dei relativi grafici a livello orario, nell'arco delle 24 ore, per ogni mese, con l'indicazione dei valori estremi registrati e, a livello giornaliero e mensile, nell'arco dei 12 mesi.
- Un'analisi mensile di tutti i parametri meteo relativa all'anno in corso.
- La direzione del vento è calcolata come moda sia a scala di 10 minuti per i grafici orari che a scala giornaliera per i grafici mensili. E' considerata variabile (var.) quando la direzione non è stata registrata su uno stesso quadrante per più di 8 ore.

Dall'analisi di tutti i parametri meteo dell'anno 2011 emerge quanto segue:

- La pressione atmosferica media mensile oscilla fra 1007.0 hPa di luglio e 1015.7 hPa di novembre, con una media annua di 1011.1 hPa, con un minimo assoluto di 965.3 hPa registrato il 13 settembre alle ore 14.20 e con un massimo assoluto di 1028.8 hPa registrato il 27 dicembre alle ore 10.00.
- La temperatura dell'aria media mensile oscilla fra 11.1°C di gennaio e i 26.2°C di agosto, con una media annua di 18.2°C, con un minimo assoluto di 3.1°C registrato il 9 marzo alle ore 5.10 e con un massimo assoluto di 35.4°C registrato il 22 agosto alle ore 3.40.
- L'umidità relativa media mensile oscilla fra 61.5% di aprile ed il 71.4% di gennaio, con una media annua di 66.3%, con un minimo assoluto di 14.5% registrato il 25 febbraio alle ore 15.30 e con un massimo assoluto di 92.5% registrato il 27 ottobre alle ore 7.00.
- La radiazione solare globale media mensile oscilla fra 87.6 W/m² di gennaio e 303.8 W/m² di luglio, con una media annua di 201.8 W/m² e con un massimo assoluto di 1117.2 W/m² registrato il 13 giugno alle ore 13.00.
- La radiazione solare UVb media mensile oscilla fra 0.087 W/m² di dicembre e 0.563 W/m² di luglio, con una media annua di 0.312 W/m² e con un massimo assoluto di 2.620 W/m² registrato il 13 giugno alle ore 12.40.
- L'intensità media mensile del vento oscilla tra 1.8 m/s di gennaio e 2.9 m/s di marzo, con una media annua di 2.3 m/s e con la raffica più intensa di 21.1 m/s registrata il 16 marzo alle ore 18.20.
- La direzione del vento presenta una moda di 0° (da Nord) nei mesi di gennaio, febbraio, ottobre, novembre, dicembre e di 180° (da Sud) nei mesi di marzo, aprile, maggio, giugno, luglio, agosto, settembre.
- La pioggia presenta un valore cumulato annuale di 731.6 mm, con un massimo mensile di 130.4 mm a marzo e con il giorno più piovoso registrato il 6 novembre con 76.0 mm.
- La temperatura del mare media mensile oscilla fra 14.4°C di marzo e 24.6°C di settembre con una media annua di 19.1°C.

Legenda:

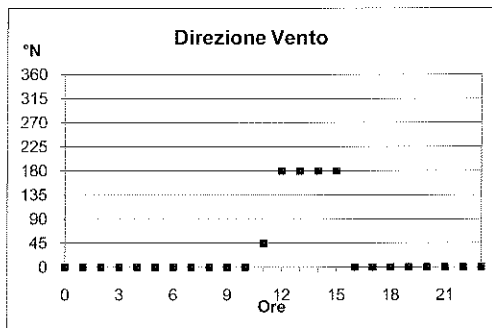
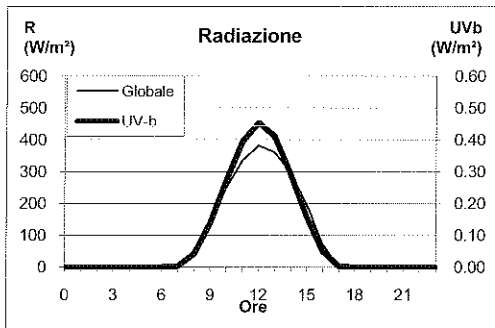
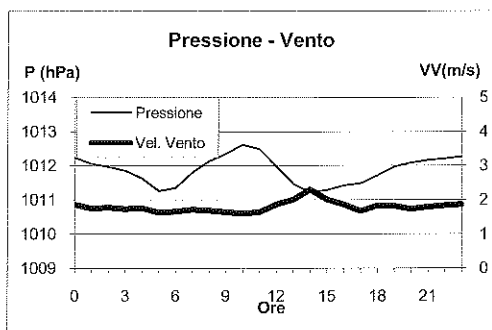
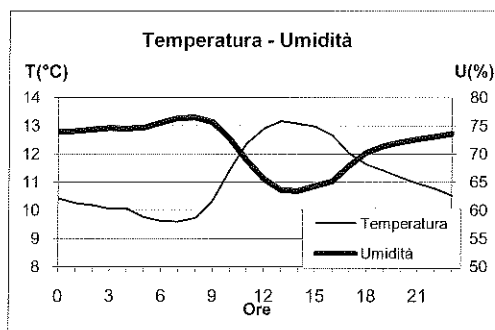
VV	= velocità del vento (m/s)
DV	= direzione di provenienza del vento (°N)
T	= temperatura (°C)
P	= pressione atmosferica (hPa)
U	= umidità relativa (%)
R	= radiazione solare totale (W/m^2)
Pg	= pioggia giornaliera (mm)
UVb	= radiazione ultravioletta (W/m^2)
Tmax	= temperatura massima (°C)
Tmin	= temperatura minima (°C)
Pmax	= pressione atmosferica massima (hPa)
Pmin	= pressione atmosferica minima (hPa)
Rmax	= radiazione solare totale massima (W/m^2)
Umax	= umidità relativa massima (%)
Umin	= umidità relativa minima (%)
VVmax	= velocità massima del vento (m/s)
UVb max	= radiazione ultravioletta massima (W/m^2)
T _{mare}	= temperatura del mare (°C)
var.	= direzione variabile del vento

N.B. L'assenza del dato indica sensore fuori uso

GENNAIO 2011

(medie orarie)

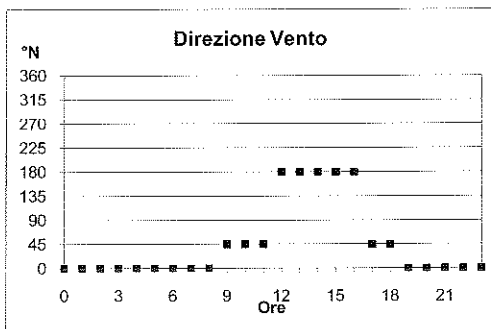
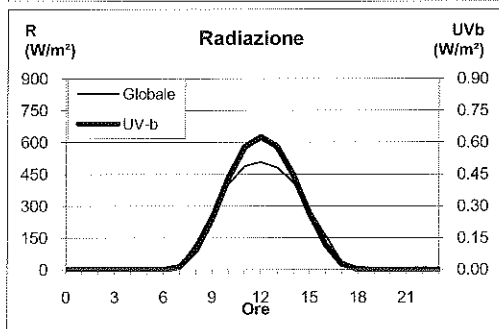
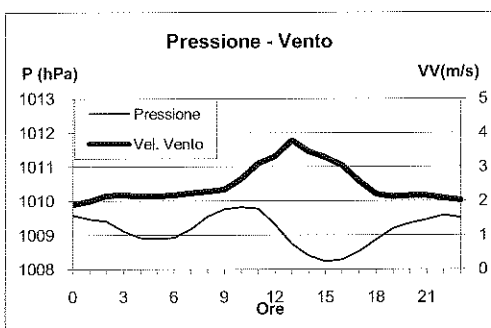
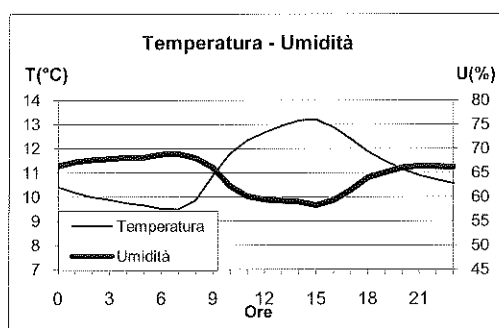
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m ²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m ²)	P(hPa)
0	10.4	73.8	0.0	0.0	1.9	0.000	1012.2
1	10.3	74.1	0.0	0.0	1.7	0.000	1012.1
2	10.2	74.3	0.0	0.0	1.8	0.000	1012.0
3	10.1	74.6	0.0	0.0	1.7	0.000	1011.9
4	10.1	74.5	0.0	0.0	1.8	0.000	1011.6
5	9.8	74.6	0.0	0.0	1.6	0.000	1011.3
6	9.6	75.6	0.0	0.0	1.7	0.000	1011.4
7	9.6	76.4	0.5	0.0	1.7	0.003	1011.8
8	9.7	76.4	48.6	0.0	1.7	0.042	1012.1
9	10.3	75.6	142.2	0.0	1.6	0.140	1012.4
10	11.4	72.8	251.3	0.0	1.6	0.273	1012.6
11	12.4	69.0	336.8	45.0	1.6	0.395	1012.5
12	12.9	65.5	382.9	180.0	1.9	0.454	1012.0
13	13.2	63.6	360.3	180.0	2.0	0.411	1011.5
14	13.1	63.4	297.4	180.0	2.3	0.292	1011.2
15	13.0	64.3	197.6	180.0	2.0	0.160	1011.3
16	12.7	65.1	73.1	0.0	1.9	0.051	1011.4
17	12.0	67.9	2.4	0.0	1.7	0.005	1011.5
18	11.6	70.2	0.0	0.0	1.8	0.000	1011.7
19	11.4	71.4	0.0	0.0	1.8	0.000	1012.0
20	11.2	72.1	0.0	0.0	1.7	0.000	1012.1
21	10.9	72.6	0.0	0.0	1.8	0.000	1012.2
22	10.8	73.0	0.0	0.0	1.8	0.000	1012.2
23	10.5	73.6	0.0	0.0	1.9	0.000	1012.3



FEBBRAIO 2011

(medie orarie)

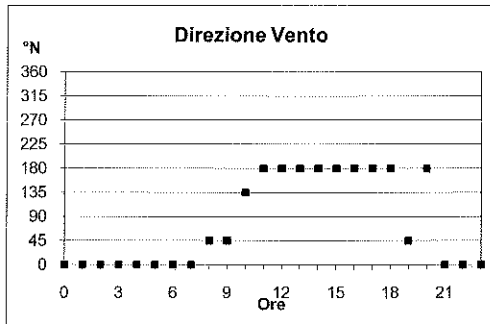
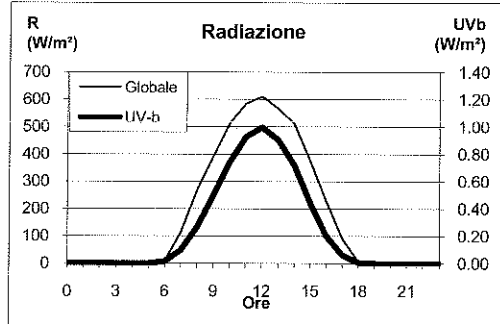
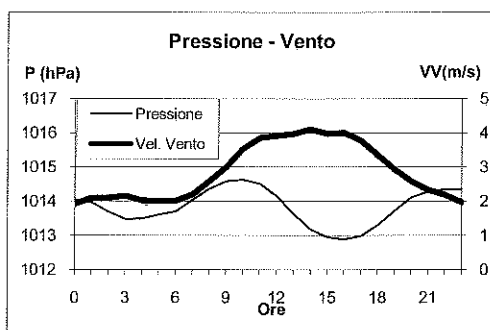
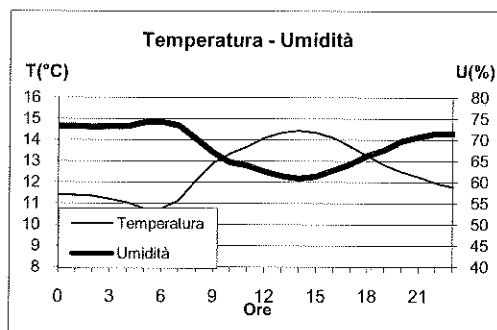
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m ²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m ²)	P(hPa)
0	10.4	66.4	0.0	0.0	1.9	0.000	1009.6
1	10.2	67.2	0.0	0.0	2.0	0.000	1009.5
2	10.0	67.6	0.0	0.0	2.2	0.000	1009.4
3	9.9	67.8	0.0	0.0	2.2	0.000	1009.1
4	9.7	68.1	0.0	0.0	2.1	0.000	1008.9
5	9.7	68.1	0.0	0.0	2.1	0.000	1008.9
6	9.5	68.8	0.0	0.0	2.2	0.000	1008.9
7	9.5	68.9	12.9	0.0	2.2	0.014	1009.2
8	9.9	68.0	122.4	0.0	2.3	0.092	1009.5
9	10.9	66.1	265.0	45.0	2.3	0.242	1009.8
10	11.8	62.2	402.8	45.0	2.7	0.434	1009.8
11	12.3	60.1	489.1	45.0	3.1	0.579	1009.8
12	12.7	59.4	506.6	180.0	3.3	0.626	1009.3
13	13.0	59.2	481.2	180.0	3.8	0.581	1008.7
14	13.2	58.9	412.8	180.0	3.5	0.449	1008.4
15	13.2	58.3	287.3	180.0	3.3	0.269	1008.2
16	12.9	59.3	162.9	180.0	3.0	0.119	1008.3
17	12.4	61.4	38.3	45.0	2.6	0.027	1008.5
18	11.9	63.9	0.1	45.0	2.2	0.001	1008.9
19	11.5	65.0	0.0	0.0	2.1	0.000	1009.2
20	11.1	66.1	0.0	0.0	2.2	0.000	1009.4
21	10.9	66.3	0.0	0.0	2.2	0.000	1009.5
22	10.7	66.3	0.0	0.0	2.1	0.000	1009.6
23	10.5	66.1	0.0	0.0	2.0	0.000	1009.5



MARZO 2011

(medie orarie)

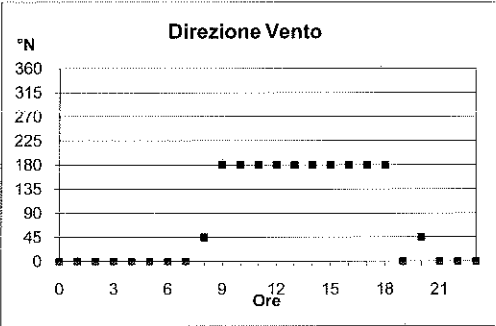
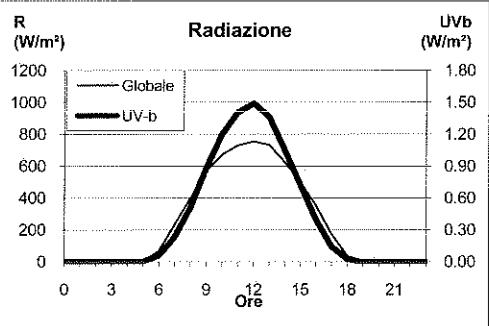
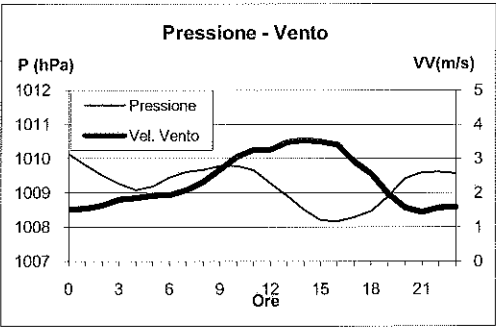
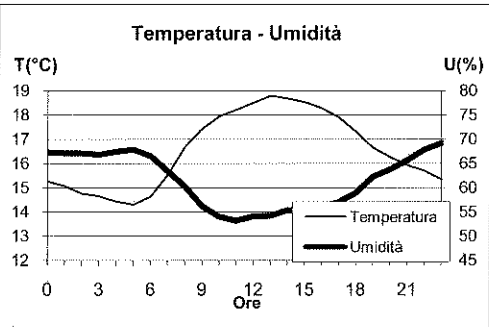
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m ²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m ²)	P(hPa)
0	11.4	73.2	0.0	0.0	1.9	0.000	1014.0
1	11.4	73.2	0.0	0.0	2.1	0.000	1014.0
2	11.3	73.1	0.0	0.0	2.1	0.000	1013.7
3	11.2	73.1	0.0	0.0	2.2	0.000	1013.5
4	11.0	73.2	0.0	0.0	2.0	0.000	1013.5
5	10.7	74.1	0.0	0.0	2.0	0.000	1013.6
6	10.7	74.2	7.5	0.0	2.0	0.012	1013.7
7	11.1	73.4	111.0	0.0	2.2	0.093	1014.0
8	12.1	70.3	270.5	45.0	2.6	0.267	1014.4
9	12.9	67.0	394.0	45.0	3.0	0.500	1014.6
10	13.3	64.7	512.7	135.0	3.5	0.743	1014.6
11	13.7	63.9	585.3	180.0	3.8	0.927	1014.5
12	14.1	62.5	609.9	180.0	3.9	0.995	1014.2
13	14.3	61.5	567.0	180.0	4.0	0.904	1013.6
14	14.4	60.8	510.5	180.0	4.1	0.719	1013.2
15	14.3	61.4	373.5	180.0	4.0	0.441	1012.9
16	14.1	62.7	227.5	180.0	4.0	0.204	1012.9
17	13.7	64.2	91.7	180.0	3.8	0.062	1013.0
18	13.2	66.3	5.0	180.0	3.4	0.005	1013.3
19	12.8	67.5	0.0	45.0	2.9	0.000	1013.7
20	12.5	69.7	0.0	180.0	2.6	0.000	1014.1
21	12.2	70.6	0.0	0.0	2.3	0.000	1014.3
22	12.0	71.4	0.0	0.0	2.2	0.000	1014.4
23	11.8	71.5	0.0	0.0	2.0	0.000	1014.4



APRILE 2011

(medie orarie)

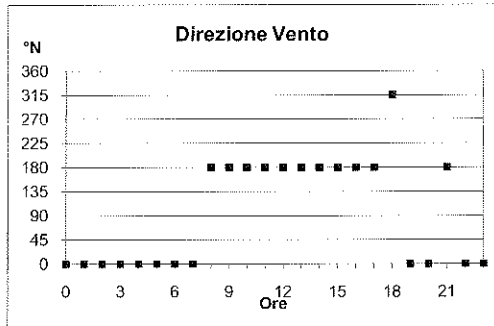
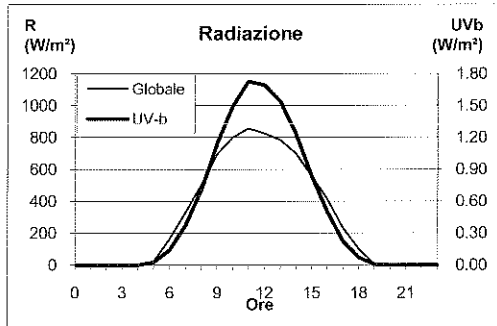
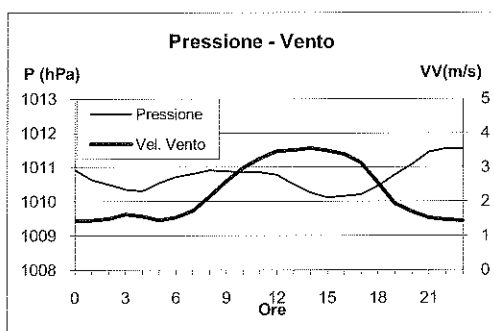
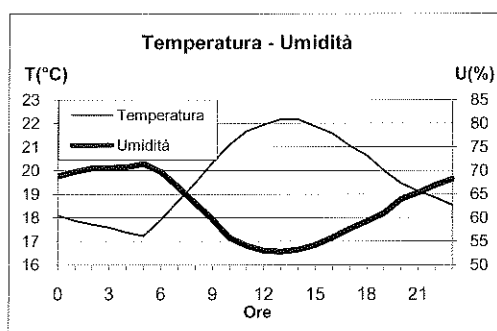
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	15.3	67.3	0.0	0.0	1.5	0.000	1010.1
1	15.1	67.1	0.0	0.0	1.5	0.000	1009.8
2	14.8	67.1	0.0	0.0	1.6	0.000	1009.5
3	14.6	66.8	0.0	0.0	1.8	0.000	1009.3
4	14.4	67.4	0.0	0.0	1.9	0.000	1009.1
5	14.3	67.8	1.4	0.0	1.9	0.005	1009.2
6	14.6	66.5	67.6	0.0	1.9	0.060	1009.4
7	15.5	63.4	233.3	0.0	2.1	0.229	1009.6
8	16.7	60.2	401.8	45.0	2.3	0.518	1009.7
9	17.4	56.2	569.3	180.0	2.7	0.886	1009.8
10	17.9	54.0	674.5	180.0	3.1	1.199	1009.8
11	18.2	53.2	728.7	180.0	3.3	1.404	1009.7
12	18.5	54.1	756.7	180.0	3.3	1.491	1009.3
13	18.8	54.2	732.8	180.0	3.5	1.364	1008.9
14	18.7	55.3	625.3	180.0	3.5	1.055	1008.5
15	18.5	55.1	499.7	180.0	3.5	0.719	1008.2
16	18.3	56.0	353.1	180.0	3.4	0.396	1008.2
17	17.9	57.1	175.6	180.0	2.9	0.147	1008.3
18	17.3	58.9	35.3	180.0	2.6	0.027	1008.5
19	16.6	62.3	0.0	0.0	2.0	0.000	1008.9
20	16.3	63.8	0.0	45.0	1.6	0.000	1009.4
21	15.9	65.7	0.0	0.0	1.4	0.000	1009.6
22	15.7	67.8	0.0	0.0	1.6	0.000	1009.6
23	15.3	69.2	0.0	0.0	1.6	0.000	1009.6



MAGGIO 2011

(medie orarie)

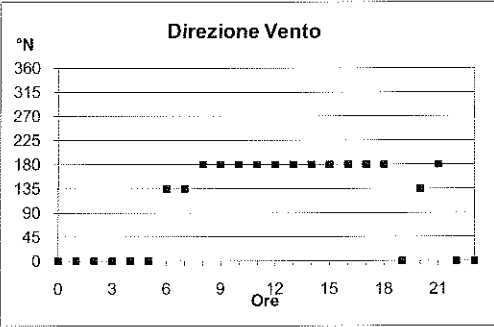
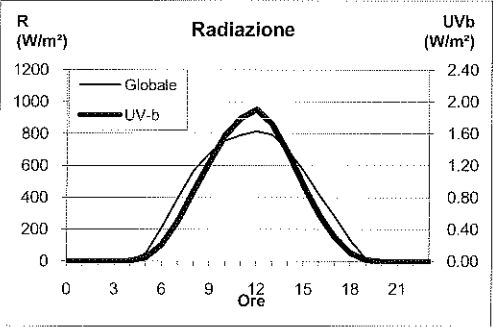
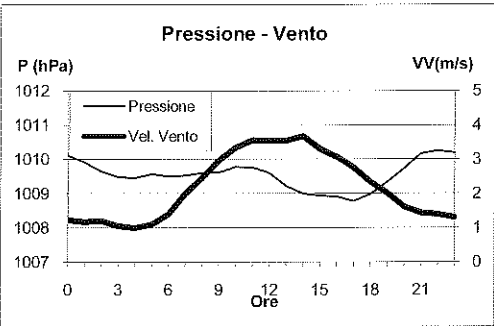
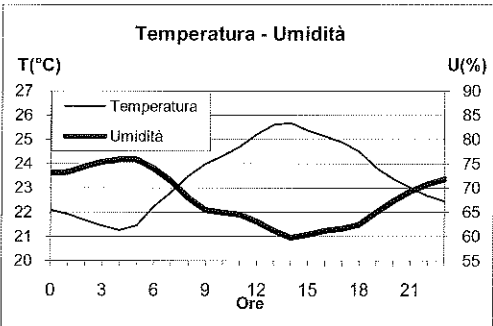
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m ²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m ²)	P(hPa)
0	18.1	68.8	0.0	0.0	1.4	0.000	1010.9
1	17.9	69.7	0.0	0.0	1.4	0.000	1010.6
2	17.7	70.5	0.0	0.0	1.5	0.000	1010.5
3	17.6	70.6	0.0	0.0	1.6	0.000	1010.4
4	17.4	70.7	0.0	0.0	1.6	0.000	1010.3
5	17.2	71.4	23.0	0.0	1.4	0.026	1010.5
6	17.9	69.7	162.8	0.0	1.5	0.138	1010.7
7	18.7	66.5	328.8	0.0	1.7	0.368	1010.8
8	19.5	63.0	506.1	180.0	2.2	0.709	1010.9
9	20.3	59.7	696.3	180.0	2.6	1.142	1010.9
10	21.1	55.8	801.1	180.0	3.0	1.495	1010.8
11	21.7	54.1	856.8	180.0	3.3	1.725	1010.8
12	22.0	53.0	823.9	180.0	3.5	1.694	1010.8
13	22.2	52.8	784.0	180.0	3.5	1.541	1010.5
14	22.2	53.2	701.3	180.0	3.6	1.242	1010.3
15	21.9	54.2	559.5	180.0	3.5	0.841	1010.1
16	21.6	55.8	413.0	180.0	3.4	0.499	1010.2
17	21.1	57.6	233.0	180.0	3.1	0.228	1010.2
18	20.6	59.2	101.0	315.0	2.5	0.071	1010.5
19	20.0	61.0	6.4	0.0	1.9	0.007	1010.8
20	19.5	63.9	0.0	0.0	1.7	0.000	1011.1
21	19.1	65.4	0.0	180.0	1.5	0.000	1011.4
22	18.9	66.9	0.0	0.0	1.5	0.000	1011.6
23	18.5	68.2	0.0	0.0	1.4	0.000	1011.5



GIUGNO 2011

(medie orarie)

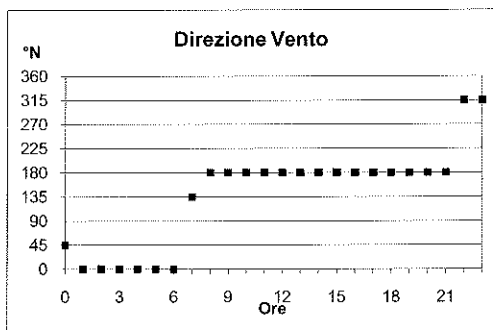
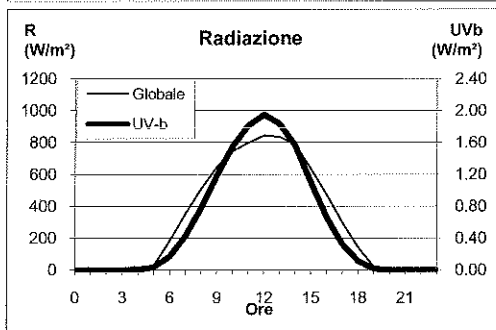
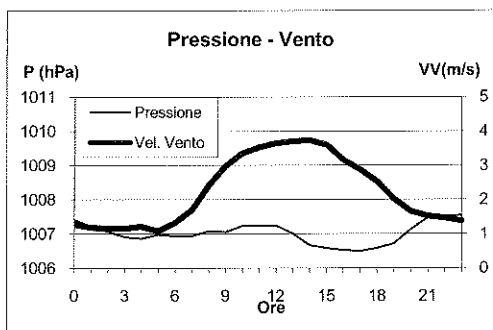
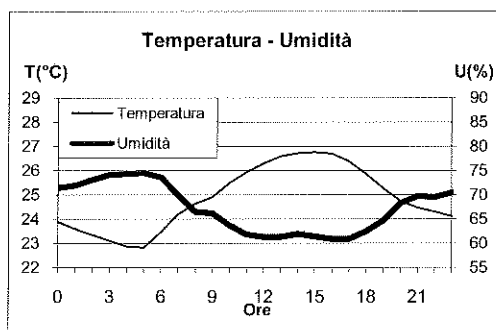
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	22.1	73.1	0.0	0.0	1.2	0.000	1010.1
1	21.9	73.3	0.0	0.0	1.2	0.000	1009.9
2	21.7	74.4	0.0	0.0	1.2	0.000	1009.6
3	21.4	75.3	0.0	0.0	1.1	0.000	1009.5
4	21.3	75.9	0.0	0.0	1.0	0.003	1009.5
5	21.5	75.8	48.8	0.0	1.1	0.050	1009.6
6	22.2	74.0	209.6	135.0	1.4	0.203	1009.5
7	22.8	71.4	391.6	135.0	2.0	0.494	1009.5
8	23.5	68.0	568.9	180.0	2.5	0.875	1009.6
9	24.0	65.5	674.9	180.0	3.0	1.238	1009.6
10	24.3	64.9	755.7	180.0	3.3	1.577	1009.8
11	24.7	64.6	789.4	180.0	3.6	1.790	1009.8
12	25.2	63.1	814.6	180.0	3.5	1.904	1009.6
13	25.6	61.2	793.2	180.0	3.5	1.719	1009.2
14	25.7	59.7	700.7	180.0	3.7	1.381	1009.0
15	25.4	60.3	568.7	180.0	3.3	0.963	1008.9
16	25.1	61.2	419.2	180.0	3.1	0.596	1008.9
17	24.9	61.6	284.8	180.0	2.8	0.309	1008.8
18	24.5	62.4	131.0	180.0	2.3	0.108	1009.0
19	23.8	64.9	18.5	0.0	2.0	0.016	1009.3
20	23.4	67.3	0.0	135.0	1.6	0.000	1009.7
21	23.0	69.3	0.0	180.0	1.4	0.000	1010.2
22	22.7	70.7	0.0	0.0	1.4	0.000	1010.2
23	22.5	71.8	0.0	0.0	1.3	0.000	1010.2



LUGLIO 2011

(medie orarie)

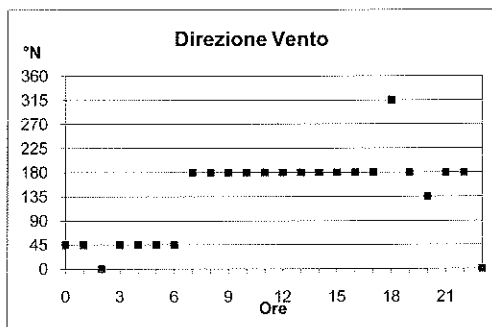
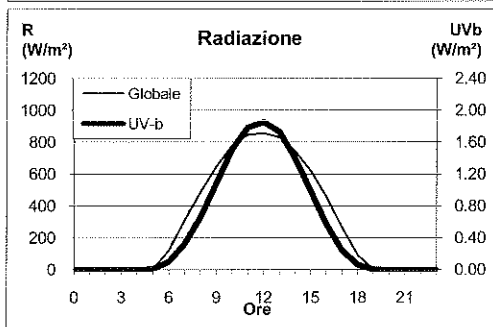
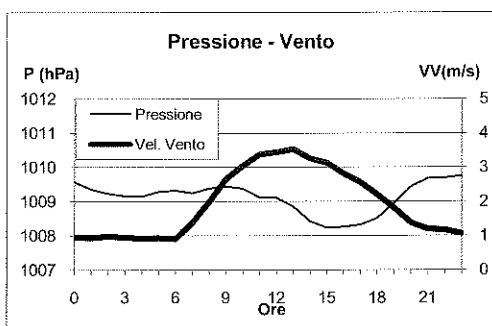
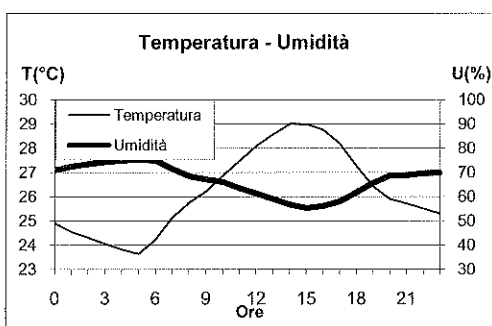
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m ²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m ²)	P(hPa)
0	23.9	71.4	0.0	45.0	1.3	0.000	1007.4
1	23.6	71.9	0.0	0.0	1.2	0.000	1007.2
2	23.3	73.1	0.0	0.0	1.2	0.000	1007.1
3	23.1	74.0	0.0	0.0	1.2	0.000	1006.9
4	22.9	74.3	0.0	0.0	1.2	0.001	1006.9
5	22.8	74.5	26.6	0.0	1.1	0.035	1007.0
6	23.5	73.5	182.8	0.0	1.3	0.169	1006.9
7	24.2	69.9	349.2	135.0	1.7	0.422	1006.9
8	24.6	66.5	511.7	180.0	2.4	0.781	1007.1
9	24.9	66.2	647.4	180.0	3.0	1.186	1007.1
10	25.5	63.7	747.3	180.0	3.4	1.548	1007.2
11	25.9	61.8	798.0	180.0	3.5	1.807	1007.2
12	26.3	61.3	842.8	180.0	3.7	1.950	1007.2
13	26.6	61.3	833.4	180.0	3.7	1.837	1007.0
14	26.7	61.9	786.7	180.0	3.7	1.563	1006.7
15	26.8	61.4	632.8	180.0	3.6	1.093	1006.6
16	26.7	60.8	474.0	180.0	3.2	0.665	1006.5
17	26.4	60.9	300.2	180.0	2.9	0.326	1006.5
18	25.9	62.5	140.6	180.0	2.5	0.112	1006.6
19	25.3	64.7	19.9	180.0	2.0	0.016	1006.7
20	24.7	68.3	0.0	180.0	1.7	0.000	1007.1
21	24.5	69.7	0.0	180.0	1.5	0.000	1007.5
22	24.3	69.5	0.0	315.0	1.5	0.000	1007.5
23	24.1	70.5	0.0	315.0	1.4	0.000	1007.5



AGOSTO 2011

(medie orarie)

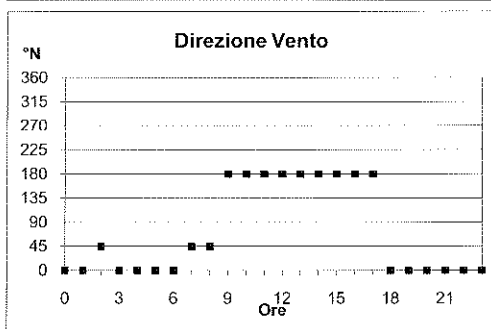
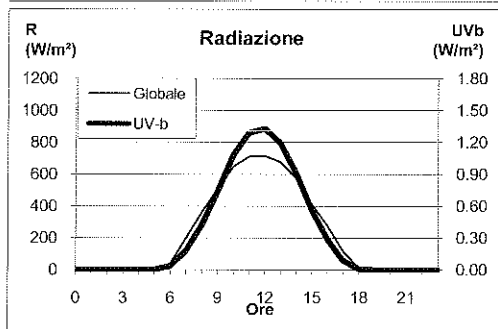
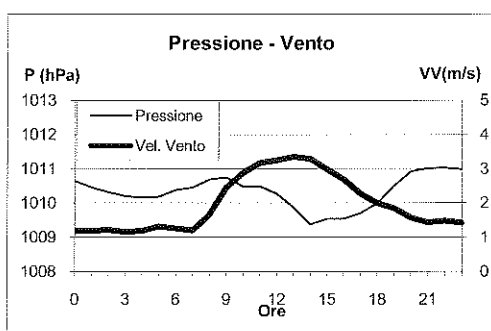
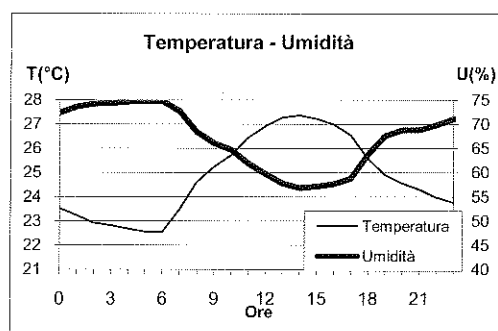
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	24.9	70.9	0.0	45.0	1.0	0.000	1009.6
1	24.6	72.3	0.0	45.0	0.9	0.000	1009.3
2	24.3	73.4	0.0	0.0	1.0	0.000	1009.2
3	24.1	74.3	0.0	45.0	1.0	0.000	1009.2
4	23.8	74.8	0.0	45.0	0.9	0.000	1009.1
5	23.6	75.3	4.7	45.0	0.9	0.010	1009.3
6	24.2	74.9	120.2	45.0	0.9	0.098	1009.3
7	25.1	71.6	308.5	180.0	1.4	0.320	1009.2
8	25.8	68.3	489.6	180.0	2.0	0.665	1009.4
9	26.2	67.3	646.9	180.0	2.7	1.085	1009.4
10	26.9	66.0	780.7	180.0	3.0	1.511	1009.4
11	27.5	63.3	846.5	180.0	3.4	1.784	1009.1
12	28.1	61.4	856.6	180.0	3.4	1.854	1009.1
13	28.6	59.1	832.2	180.0	3.5	1.730	1008.8
14	29.0	56.7	745.8	180.0	3.3	1.404	1008.4
15	29.0	55.3	619.7	180.0	3.1	0.985	1008.2
16	28.7	56.1	459.1	180.0	2.8	0.575	1008.3
17	28.2	58.1	266.6	180.0	2.6	0.247	1008.3
18	27.3	61.6	91.9	315.0	2.2	0.062	1008.5
19	26.4	65.6	2.3	180.0	1.8	0.004	1009.0
20	25.9	68.7	0.0	135.0	1.4	0.000	1009.4
21	25.7	68.9	0.0	180.0	1.2	0.000	1009.7
22	25.5	69.6	0.0	180.0	1.2	0.000	1009.7
23	25.3	69.8	0.0	0.0	1.1	0.000	1009.8



SETTEMBRE 2011

(medie orarie)

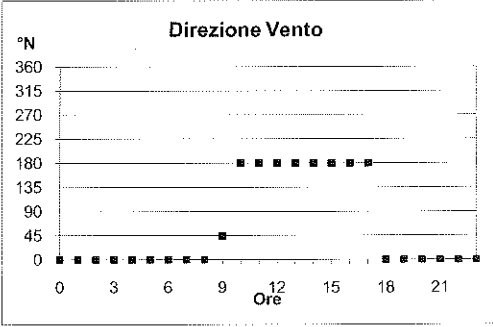
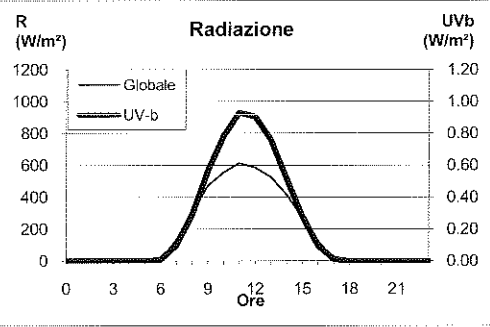
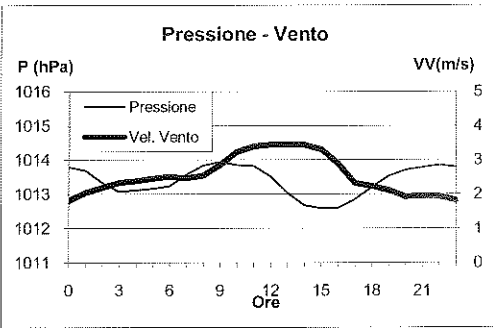
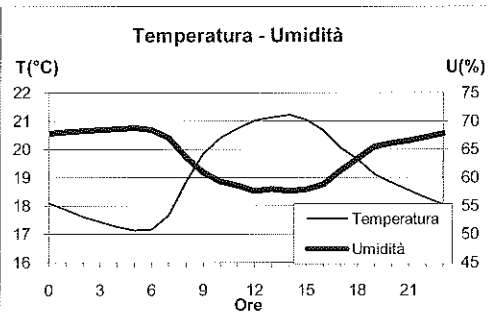
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m ²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m ²)	P(hPa)
0	23.5	72.4	0.0	0.0	1.2	0.000	1010.6
1	23.2	73.5	0.0	0.0	1.2	0.000	1010.5
2	22.9	74.2	0.3	45.0	1.2	0.000	1010.3
3	22.8	74.2	0.0	0.0	1.2	0.000	1010.2
4	22.7	74.6	0.0	0.0	1.2	0.000	1010.2
5	22.5	74.8	0.0	0.0	1.3	0.001	1010.2
6	22.6	74.7	37.7	0.0	1.3	0.036	1010.4
7	23.5	72.7	197.1	45.0	1.2	0.180	1010.5
8	24.6	68.4	363.3	45.0	1.7	0.424	1010.7
9	25.2	66.1	509.1	180.0	2.5	0.738	1010.7
10	25.7	64.7	646.6	180.0	2.9	1.081	1010.5
11	26.4	61.9	711.5	180.0	3.2	1.289	1010.5
12	26.9	59.8	713.9	180.0	3.2	1.325	1010.3
13	27.3	57.8	675.4	180.0	3.4	1.191	1009.9
14	27.4	56.8	575.3	180.0	3.3	0.911	1009.4
15	27.2	57.1	409.0	180.0	3.0	0.560	1009.5
16	27.0	57.7	274.7	180.0	2.7	0.283	1009.5
17	26.5	58.8	116.8	180.0	2.3	0.088	1009.7
18	25.6	63.6	11.2	0.0	2.0	0.009	1010.0
19	24.9	67.5	0.0	0.0	1.8	0.000	1010.5
20	24.5	68.7	0.0	0.0	1.6	0.000	1010.9
21	24.3	68.8	0.0	0.0	1.4	0.000	1011.0
22	24.0	69.8	0.0	0.0	1.5	0.000	1011.0
23	23.8	71.0	0.0	0.0	1.4	0.000	1011.0



OTTOBRE 2011

(medie orarie)

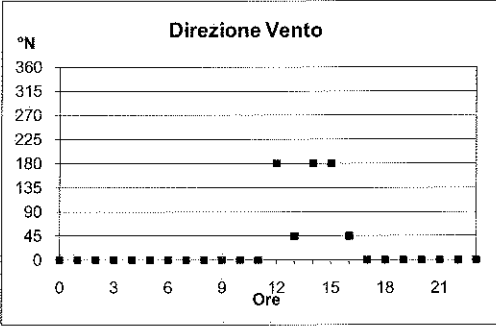
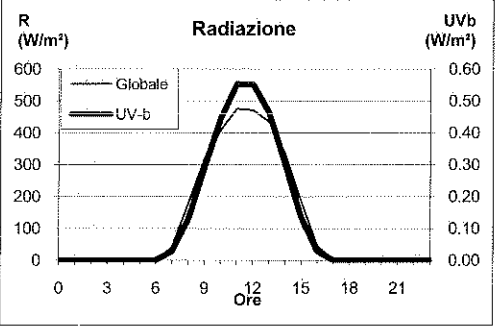
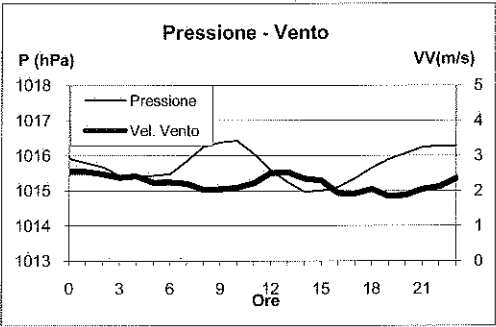
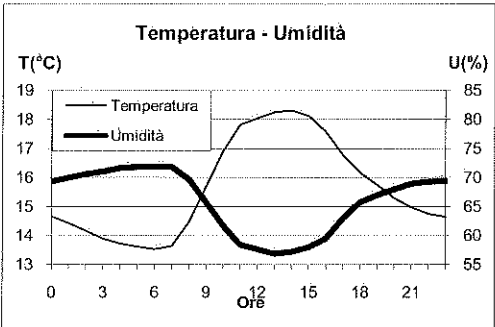
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	18.1	67.8	0.1	0.0	1.8	0.000	1013.8
1	17.9	68.1	0.0	0.0	2.0	0.000	1013.7
2	17.6	68.2	0.0	0.0	2.2	0.000	1013.3
3	17.4	68.5	0.0	0.0	2.3	0.000	1013.1
4	17.3	68.6	0.0	0.0	2.4	0.000	1013.1
5	17.1	68.8	0.0	0.0	2.5	0.000	1013.2
6	17.2	68.4	7.5	0.0	2.5	0.010	1013.2
7	17.7	67.0	131.3	0.0	2.5	0.097	1013.6
8	18.8	63.6	305.7	0.0	2.5	0.294	1013.8
9	19.9	60.9	474.0	45.0	2.8	0.569	1013.9
10	20.4	59.3	554.4	180.0	3.2	0.783	1013.9
11	20.7	58.6	613.0	180.0	3.4	0.929	1013.8
12	21.0	57.6	583.2	180.0	3.4	0.904	1013.5
13	21.1	58.0	523.9	180.0	3.5	0.760	1013.0
14	21.2	57.6	415.3	180.0	3.4	0.519	1012.7
15	21.0	57.9	266.8	180.0	3.3	0.277	1012.6
16	20.7	58.7	126.1	180.0	2.9	0.095	1012.6
17	20.1	61.2	12.1	180.0	2.3	0.011	1012.9
18	19.6	63.3	0.1	0.0	2.2	0.000	1013.2
19	19.1	65.5	0.3	0.0	2.1	0.000	1013.5
20	18.8	66.1	0.0	0.0	1.9	0.000	1013.7
21	18.5	66.5	0.0	0.0	2.0	0.000	1013.8
22	18.3	67.1	0.2	0.0	1.9	0.000	1013.8
23	18.0	67.8	0.0	0.0	1.8	0.000	1013.8



NOVEMBRE 2011

(medie orarie)

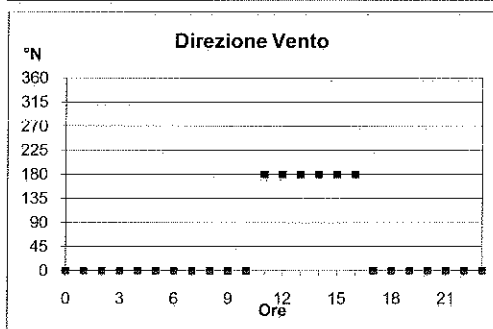
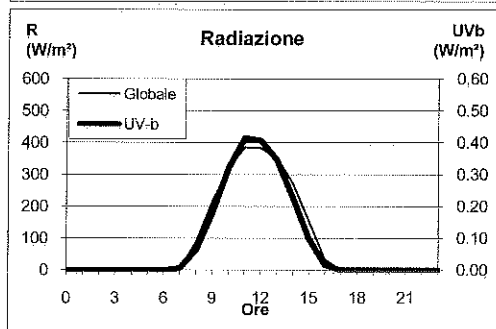
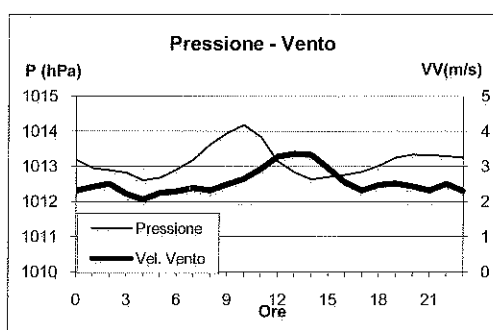
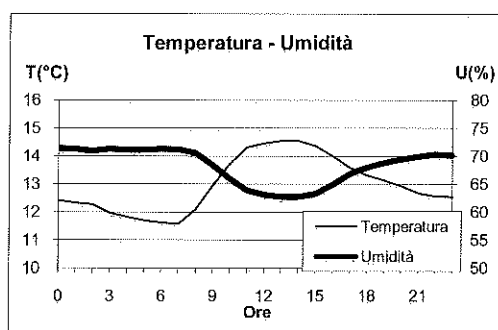
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	14.7	69.3	0.0	0.0	2.5	0.000	1015.9
1	14.4	70.0	0.0	0.0	2.6	0.000	1015.8
2	14.2	70.6	0.0	0.0	2.5	0.000	1015.7
3	13.9	71.1	0.4	0.0	2.4	0.000	1015.4
4	13.7	71.6	0.0	0.0	2.4	0.000	1015.4
5	13.6	71.9	0.0	0.0	2.2	0.000	1015.4
6	13.5	71.9	0.2	0.0	2.2	0.000	1015.5
7	13.6	71.8	39.9	0.0	2.2	0.029	1015.9
8	14.5	69.6	181.3	0.0	2.0	0.133	1016.3
9	15.7	65.8	320.7	0.0	2.0	0.294	1016.4
10	16.9	61.7	409.6	0.0	2.1	0.446	1016.4
11	17.8	58.4	475.8	0.0	2.2	0.553	1016.1
12	18.0	57.6	470.4	180.0	2.5	0.551	1015.6
13	18.3	56.9	435.1	45.0	2.5	0.463	1015.2
14	18.3	57.2	334.6	180.0	2.4	0.304	1015.0
15	18.1	58.0	186.1	180.0	2.3	0.137	1015.0
16	17.6	59.5	46.9	45.0	1.9	0.029	1015.1
17	16.8	63.0	0.1	0.0	1.9	0.000	1015.4
18	16.2	65.7	0.0	0.0	2.0	0.000	1015.6
19	15.8	67.0	0.1	0.0	1.8	0.000	1015.9
20	15.3	68.0	0.0	0.0	1.9	0.000	1016.1
21	15.0	68.9	0.0	0.0	2.0	0.000	1016.2
22	14.8	69.3	0.0	0.0	2.1	0.000	1016.3
23	14.6	69.4	0.0	0.0	2.3	0.000	1016.3



DICEMBRE 2011

(medie orarie)

Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m ²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m ²)	P(hPa)
0	12.4	71.4	0.0	0.0	2.3	0.000	1013.2
1	12.3	71.3	0.0	0.0	2.4	0.000	1013.0
2	12.3	70.9	0.2	0.0	2.5	0.000	1012.9
3	12.0	71.3	0.0	0.0	2.2	0.000	1012.8
4	11.8	71.1	0.0	0.0	2.1	0.000	1012.6
5	11.7	71.1	0.0	0.0	2.2	0.000	1012.7
6	11.6	71.3	0.0	0.0	2.3	0.000	1012.9
7	11.6	71.2	2.6	0.0	2.4	0.006	1013.2
8	12.1	70.5	90.1	0.0	2.3	0.064	1013.6
9	12.9	68.4	216.5	0.0	2.5	0.179	1014.0
10	13.7	65.9	318.4	0.0	2.6	0.320	1014.2
11	14.3	63.9	385.6	180.0	2.9	0.414	1013.8
12	14.5	63.1	382.2	180.0	3.3	0.406	1013.1
13	14.5	62.7	352.9	180.0	3.4	0.346	1012.8
14	14.6	62.7	271.3	180.0	3.3	0.227	1012.6
15	14.4	63.2	154.3	180.0	3.0	0.099	1012.7
16	14.0	64.9	33.7	180.0	2.6	0.017	1012.8
17	13.6	66.8	0.0	0.0	2.3	0.000	1012.9
18	13.3	68.0	0.0	0.0	2.5	0.000	1013.0
19	13.1	68.8	0.0	0.0	2.5	0.000	1013.3
20	12.9	69.4	0.1	0.0	2.4	0.000	1013.3
21	12.7	70.0	0.0	0.0	2.3	0.000	1013.3
22	12.6	70.3	0.0	0.0	2.5	0.000	1013.3
23	12.6	70.1	0.0	0.0	2.3	0.000	1013.3



GENNAIO 2011

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)	Tmare (°C)
1/1/11	11.4	68.0	0.0	9.8	14.9	52.5	74.1	15.7
2/1/11	11.8	62.7	0.0	9.4	15.6	46.6	74.4	15.6
3/1/11	10.1	60.5	0.0	7.6	11.5	50.0	74.3	15.5
4/1/11	8.2	54.3	0.0	6.5	10.8	45.4	66.6	15.4
5/1/11	9.3	75.0	3.6	7.8	11.8	62.6	85.4	15.4
6/1/11	11.3	79.3	0.2	8.8	13.5	73.6	85.7	15.3
7/1/11	13.5	79.6	0.0	10.8	15.5	69.8	85.3	15.3
8/1/11	13.2	73.8	0.0	11.0	17.0	55.4	84.7	15.4
9/1/11	13.6	71.6	0.0	10.8	17.7	55.4	79.6	15.4
10/1/11	14.4	74.9	0.0	12.0	17.0	55.6	86.2	15.4
11/1/11	13.0	80.0	11.2	10.5	14.5	73.5	86.8	15.4
12/1/11	11.9	71.2	1.8	9.7	15.5	53.3	85.6	15.4
13/1/11	11.3	65.4	0.0	8.9	15.1	47.2	76.0	15.4
14/1/11	12.0	76.4	0.0	9.1	15.2	62.0	83.6	15.3
15/1/11	13.3	77.4	0.0	12.0	16.0	65.5	82.8	15.3
16/1/11	13.9	61.1	0.0	9.3	18.4	37.8	83.7	15.3
17/1/11	13.6	57.2	0.0	10.2	17.5	40.9	74.6	15.3
18/1/11	12.2	77.6	0.0	9.4	14.0	70.3	87.0	15.3
19/1/11	12.7	67.8	0.0	11.9	14.2	53.8	76.5	15.3
20/1/11	12.0	78.2	9.6	11.0	13.2	67.3	85.6	15.2
21/1/11	10.4	80.2	9.2	8.5	13.1	69.7	85.2	15.1
22/1/11	7.6	81.9	24.4	6.3	8.7	74.8	85.4	15.1
23/1/11	6.8	81.8	6.4	6.1	8.1	77.5	86.6	15.0
24/1/11	7.4	68.7	0.0	5.9	10.3	48.1	86.3	15.1
25/1/11	7.6	59.0	0.0	4.7	10.9	35.8	70.4	15.1
26/1/11	7.8	78.2	5.4	4.9	10.1	70.0	84.9	15.1
27/1/11	10.0	64.4	0.0	7.1	14.6	42.4	77.1	15.0
28/1/11	11.6	65.5	0.2	9.7	14.8	49.9	75.2	15.0
29/1/11	11.1	67.9	0.4	9.6	13.4	58.3	76.2	14.9
30/1/11	10.9	80.3	12.2	9.2	12.8	68.1	87.5	14.9
31/1/11	11.2	74.6	3.0	8.6	15.7	56.7	86.3	14.7

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**Temperatura**

Min: 4.7 °C il 25/1 alle ore 7.20

Max: 18.4 °C il 16/1 alle ore 15.20

Umidità

Min: 35.8 % il 25/1 alle ore 12.30

Max: 87.5 % il 30/1 alle ore 11.00

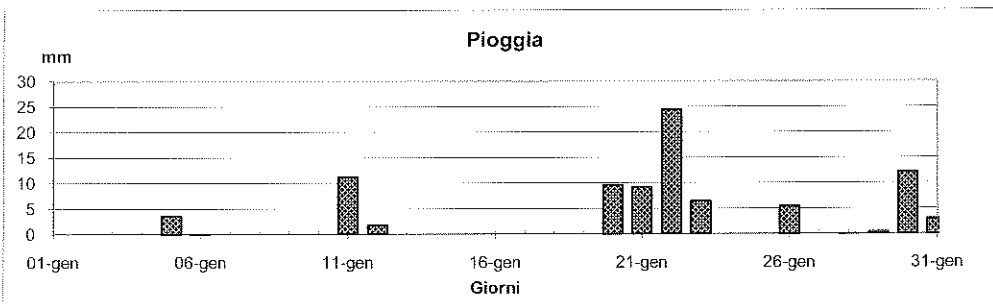
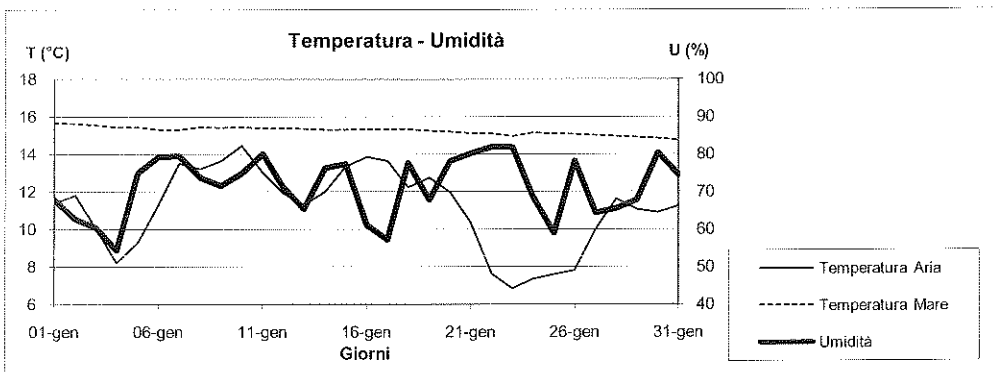
Pressione

Min: 997.2 hPa il 28/1 alle ore 3.10

Max: 1023.4 hPa il 16/1 alle ore 10.50

Velocità del vento

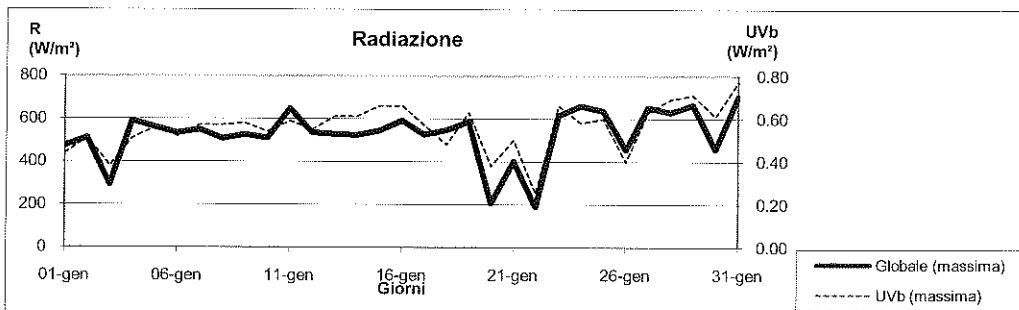
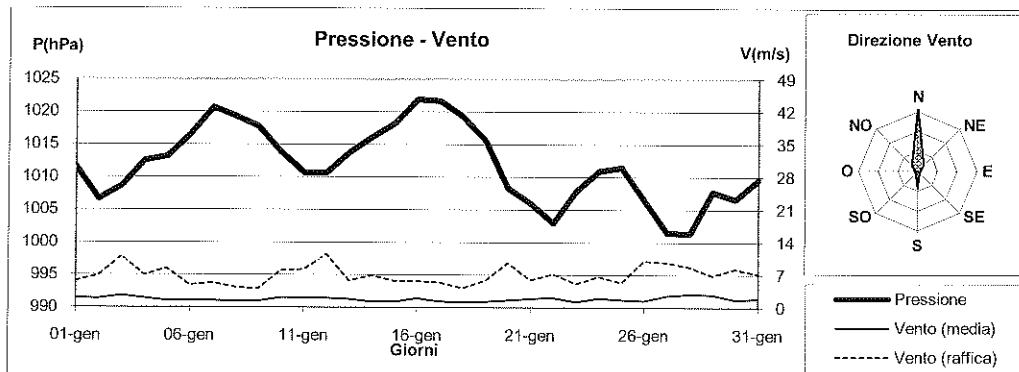
Max: 11.4 m/s il 12/1 alle ore 14.50

Radiazione totaleMax: 702.4 W/m² il 31/1 alle ore 12.50**Radiazione UVb**Max: 0.770 W/m² il 31/1 alle ore 12.50

GENNAIO 2011

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m ²)	UVb(W/m ²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m ²)	UVbmax(W/m ²)
1/1/11	1011.5	0.0	2.0	78.5	0.079	1008.9	1013.8	5.7	474.6	0.440
2/1/11	1006.7	0.0	1.9	120.2	0.099	1005.2	1008.8	6.9	512.2	0.510
3/1/11	1008.6	45.0	2.6	44.4	0.063	1005.8	1012.5	11.0	293.2	0.380
4/1/11	1012.5	0.0	2.0	75.7	0.076	1012.0	1013.8	7.0	591.3	0.510
5/1/11	1013.1	0.0	1.4	42.0	0.058	1012.0	1015.0	8.4	560.8	0.560
6/1/11	1016.5	180.0	1.5	62.1	0.077	1014.4	1019.2	4.8	532.0	0.520
7/1/11	1020.7	180.0	1.5	103.3	0.107	1018.6	1021.7	5.2	549.4	0.570
8/1/11	1019.3	0.0	1.4	107.4	0.111	1018.0	1021.1	4.3	507.9	0.570
9/1/11	1017.7	0.0	1.4	115.5	0.113	1016.2	1019.2	3.9	526.0	0.580
10/1/11	1013.8	180.0	2.1	99.7	0.101	1012.6	1015.9	7.9	510.2	0.540
11/1/11	1010.7	180.0	2.1	109.0	0.092	1008.9	1012.6	8.2	648.2	0.590
12/1/11	1010.6	0.0	2.0	119.3	0.110	1008.2	1014.4	11.4	535.1	0.550
13/1/11	1013.7	0.0	1.7	120.6	0.120	1012.6	1014.4	5.8	528.0	0.610
14/1/11	1016.1	315.0	1.2	119.0	0.121	1013.8	1018.0	6.9	523.3	0.610
15/1/11	1018.3	315.0	1.3	81.0	0.095	1016.8	1020.5	5.7	545.0	0.660
16/1/11	1021.9	0.0	2.0	127.6	0.125	1020.4	1023.4	5.7	591.7	0.660
17/1/11	1021.7	0.0	1.4	115.1	0.111	1020.5	1022.9	5.3	526.8	0.570
18/1/11	1019.2	0.0	1.1	88.5	0.090	1018.0	1020.5	4.2	548.2	0.480
19/1/11	1015.6	0.0	1.2	46.9	0.067	1012.3	1018.1	5.8	586.1	0.630
20/1/11	1008.3	180.0	1.5	28.8	0.054	1005.3	1012.1	9.6	206.6	0.380
21/1/11	1006.0	0.0	1.9	44.4	0.064	1005.1	1007.0	5.9	400.7	0.500
22/1/11	1003.0	0.0	2.1	23.1	0.037	1000.9	1005.8	7.2	190.4	0.250
23/1/11	1007.9	0.0	1.3	27.3	0.046	1004.5	1010.7	5.1	614.6	0.660
24/1/11	1010.9	0.0	2.0	120.0	0.109	1009.5	1012.6	6.6	659.3	0.580
25/1/11	1011.5	0.0	1.7	148.8	0.126	1009.4	1013.2	5.3	636.4	0.600
26/1/11	1006.5	0.0	1.5	60.7	0.081	1004.5	1010.1	10.0	455.7	0.400
27/1/11	1001.4	0.0	2.5	127.5	0.129	997.8	1005.8	9.7	653.8	0.630
28/1/11	1001.3	45.0	2.8	122.1	0.127	997.2	1006.4	8.7	628.5	0.690
29/1/11	1007.7	0.0	2.7	71.9	0.094	1006.4	1008.9	6.9	665.6	0.710
30/1/11	1006.6	0.0	1.7	40.8	0.059	1005.3	1008.3	8.3	456.9	0.610
31/1/11	1009.6	0.0	1.9	132.2	0.142	1008.3	1010.7	7.2	702.4	0.770



FEBBRAIO 2011

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)	Tmare (°C)
1/2/11	11.7	64.2	0.2	9.7	14.1	54.4	72.3	14.8
2/2/11	11.5	56.2	0.0	9.5	14.1	45.1	62.9	14.7
3/2/11	9.9	46.8	0.0	8.4	11.6	39.9	60.5	14.5
4/2/11	11.8	40.9	0.0	8.4	16.0	27.9	50.8	14.5
5/2/11	12.5	48.6	0.0	8.6	17.6	28.5	65.7	14.6
6/2/11	11.9	74.4	0.0	9.2	14.9	59.3	80.1	14.7
7/2/11	12.1	78.5	0.0	8.8	15.8	65.3	85.0	14.7
8/2/11	10.9	83.8	0.0	8.7	13.2	78.0	87.6	14.6
9/2/11	11.0	80.5	0.0	9.3	13.3	71.9	85.6	14.6
10/2/11	11.5	76.5	0.0	9.3	14.0	65.0	82.0	14.7
11/2/11	12.0	71.1	0.0	11.0	13.2	60.0	80.6	14.6
12/2/11	12.1	62.5	0.0	10.6	13.6	50.9	70.6	14.6
13/2/11	12.3	70.1	0.0	10.7	14.4	51.3	76.3	14.6
14/2/11	11.9	71.3	0.0	9.3	15.6	47.8	81.6	14.7
15/2/11	11.6	70.8	0.0	8.4	14.6	55.7	78.3	14.8
16/2/11	12.8	80.2	11.4	11.4	14.0	69.1	89.7	14.6
17/2/11	14.3	67.5	0.0	12.7	17.6	46.9	79.7	14.4
18/2/11	13.5	63.7	3.8	12.5	15.5	53.8	75.6	14.4
19/2/11	13.7	64.4	0.0	11.3	17.8	43.3	75.7	14.6
20/2/11	12.4	61.6	1.8	9.8	15.0	42.6	78.0	14.7
21/2/11	11.4	73.9	3.2	9.5	14.4	59.5	86.0	14.7
22/2/11	10.9	59.8	0.2	8.7	13.4	47.4	70.0	14.7
23/2/11	8.5	52.5	0.0	5.8	10.6	45.4	58.4	14.7
24/2/11	6.8	46.0	0.0	5.0	9.6	36.8	53.5	14.4
25/2/11	7.8	37.3	0.0	5.5	12.5	14.5	51.6	14.3
26/2/11	6.3	59.7	0.0	3.8	9.6	41.4	70.9	14.3
27/2/11	9.0	66.1	0.0	5.7	11.1	57.4	74.3	14.2
28/2/11	10.1	78.7	17.8	7.4	11.4	63.4	88.0	13.9

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**Temperatura**

Min: 3.8 °C il 26/2 alle ore 5.20

Max: 17.8 °C il 19/2 alle ore 12.30

Umidità

Min: 14.5 % il 25/2 alle ore 15.30

Max: 89.7 % il 16/2 alle ore 12.50

Pressione

Min: 991.6 hPa il 18/2 alle ore 14.40

Max: 1022.8 hPa il 5/2 alle ore 11.20

Velocità del vento

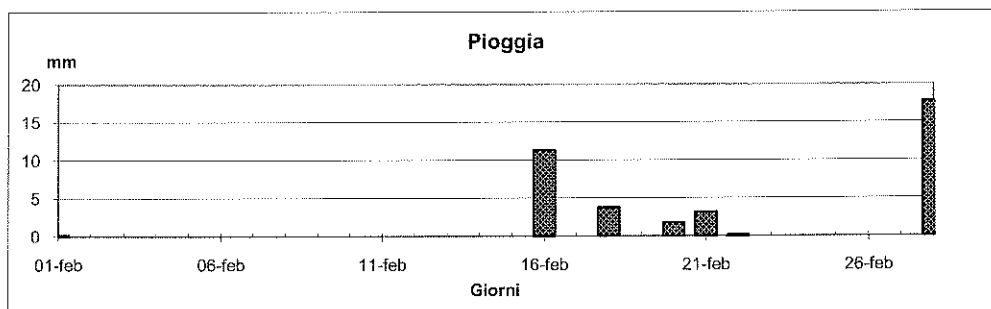
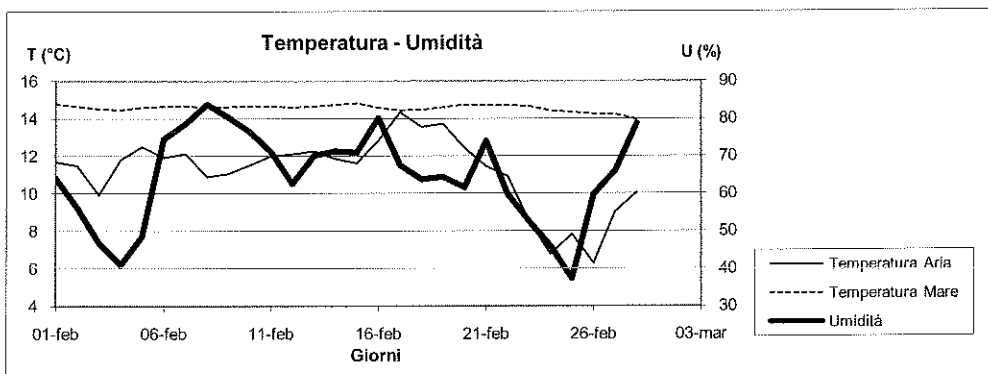
Max: 20.3 m/s il 16/2 alle ore 11.30

Radiazione totale

Max: 866.9 W/m² il 26/2 alle ore 13.00

Radiazione UVb

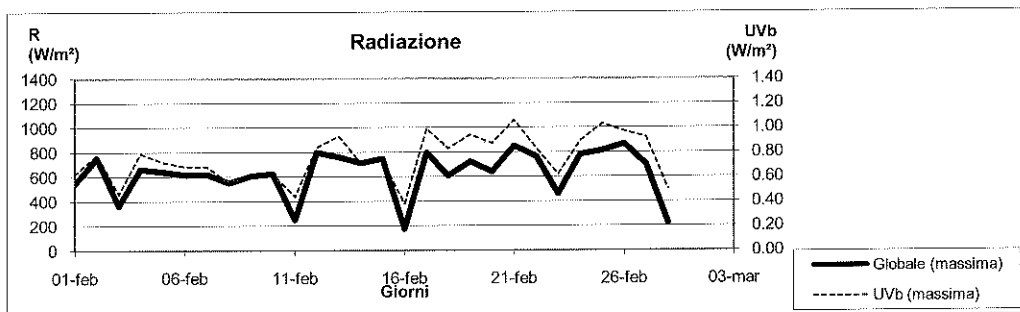
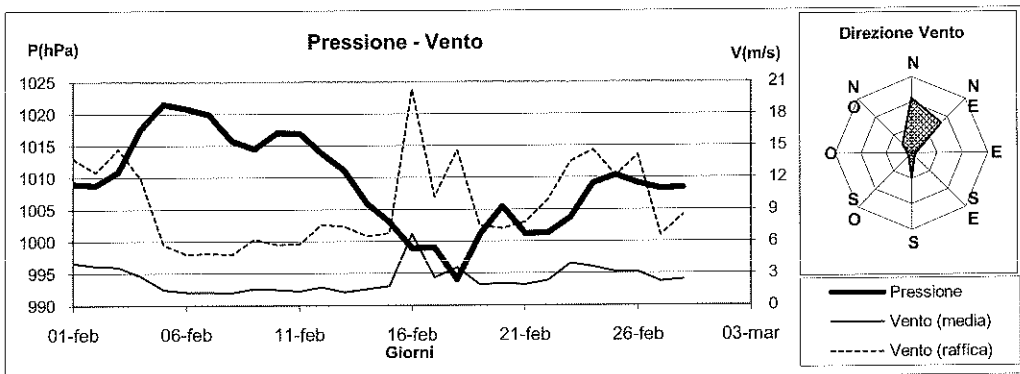
Max: 1.060 W/m² il 21/2 alle ore 13.10



FEBBRAIO 2011

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
1/2/11	1009.1	45.0	4.0	97.3	0.118	1007.5	1010.7	13.8	542.3	0.620
2/2/11	1008.8	45.0	3.7	103.5	0.126	1007.4	1010.1	12.5	751.8	0.780
3/2/11	1010.9	45.0	3.6	50.9	0.073	1009.5	1013.8	14.7	365.5	0.460
4/2/11	1017.6	45.0	2.7	189.1	0.167	1013.8	1021.1	11.9	660.9	0.790
5/2/11	1021.5	0.0	1.5	168.7	0.159	1020.5	1022.8	5.7	642.3	0.720
6/2/11	1020.8	0.0	1.2	160.2	0.150	1019.8	1022.0	4.8	613.8	0.680
7/2/11	1019.8	0.0	1.2	160.8	0.150	1018.0	1021.1	4.9	620.9	0.680
8/2/11	1015.7	0.0	1.2	97.1	0.091	1013.2	1018.0	4.8	551.4	0.550
9/2/11	1014.5	45.0	1.6	134.8	0.122	1013.8	1016.2	6.2	606.7	0.610
10/2/11	1017.0	0.0	1.5	149.3	0.129	1016.2	1018.0	5.7	624.5	0.620
11/2/11	1016.9	315.0	1.3	44.3	0.068	1015.6	1018.0	5.8	248.1	0.440
12/2/11	1013.8	315.0	1.7	100.2	0.134	1012.6	1015.6	7.6	798.5	0.840
13/2/11	1011.1	0.0	1.2	119.9	0.132	1009.0	1013.2	7.4	757.7	0.930
14/2/11	1005.9	0.0	1.5	177.0	0.162	1003.3	1009.3	6.5	711.9	0.710
15/2/11	1003.0	180.0	1.8	184.2	0.157	1002.1	1004.5	6.8	745.5	0.730
16/2/11	999.0	180.0	6.7	14.9	0.034	995.5	1002.6	20.3	174.5	0.380
17/2/11	999.0	180.0	2.6	160.0	0.185	997.2	1000.4	10.2	796.1	0.990
18/2/11	994.1	0.0	3.6	71.3	0.107	991.6	997.2	14.6	607.9	0.830
19/2/11	1001.1	0.0	1.9	193.0	0.212	997.2	1005.8	7.5	723.0	0.940
20/2/11	1005.5	180.0	2.0	117.3	0.165	1002.5	1007.4	7.2	639.9	0.870
21/2/11	1001.2	0.0	1.9	151.4	0.187	999.7	1002.8	7.8	851.5	1.060
22/2/11	1001.3	0.0	2.3	184.4	0.186	999.7	1002.3	9.9	765.3	0.830
23/2/11	1003.7	45.0	3.9	105.6	0.125	1000.3	1007.6	13.5	459.2	0.620
24/2/11	1009.1	45.0	3.6	214.0	0.201	1007.6	1011.3	14.6	782.3	0.890
25/2/11	1010.4	45.0	3.1	226.6	0.237	1008.9	1011.4	12.2	812.7	1.030
26/2/11	1009.1	45.0	3.2	180.6	0.185	1007.7	1010.4	14.1	866.9	0.970
27/2/11	1008.2	180.0	2.2	142.5	0.172	1007.0	1009.5	6.6	698.4	0.920
28/2/11	1008.4	0.0	2.4	32.5	0.071	1006.7	1010.2	8.5	225.2	0.500



MARZO 2011

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)	Tmare (°C)
1/3/11	11.7	76.0	4.0	9.9	15.0	60.1	85.1	14.0
2/3/11	11.8	70.7	15.8	9.0	14.1	52.8	83.2	13.9
3/3/11	11.9	78.8	10.6	10.5	13.3	70.9	86.0	13.7
4/3/11	11.5	72.5	16.0	9.4	13.9	60.0	85.9	13.9
5/3/11	9.2	82.5	22.6	8.6	10.7	74.6	87.6	14.0
6/3/11	10.4	74.9	0.0	8.8	12.5	65.7	80.5	14.0
7/3/11	8.0	47.1	0.2	4.8	9.7	27.5	74.3	14.1
8/3/11	6.2	44.8	0.0	4.2	9.3	35.5	51.3	14.1
9/3/11	7.3	53.4	0.0	3.2	11.2	33.6	70.4	14.0
10/3/11	9.2	61.0	0.0	5.7	12.7	43.2	74.1	14.1
11/3/11	10.3	68.2	0.0	7.1	13.2	60.4	74.6	14.1
12/3/11	11.7	69.5	0.0	8.3	14.3	53.9	77.5	14.2
13/3/11	13.8	75.0	1.2	12.0	14.9	58.6	89.7	14.1
14/3/11	16.3	69.8	0.0	14.4	18.5	54.4	84.7	14.1
15/3/11	17.1	62.0	0.0	14.1	19.5	52.4	73.7	14.3
16/3/11	16.6	74.5	17.0	13.5	19.4	53.3	87.5	14.4
17/3/11	14.2	82.8	17.2	12.6	15.4	71.9	88.8	14.6
18/3/11	13.0	85.8	17.8	11.5	14.1	77.2	89.2	14.7
19/3/11	14.3	63.8	0.0	11.9	18.5	42.0	85.9	14.7
20/3/11	12.0	51.5	0.0	9.8	14.6	40.6	59.5	14.5
21/3/11	11.5	52.0	0.0	9.2	14.8	41.0	61.7	14.5
22/3/11	12.6	56.3	0.0	9.7	16.9	41.2	68.4	14.6
23/3/11	13.1	54.5	0.0	9.4	17.4	32.5	74.3	14.6
24/3/11	14.8	49.7	0.0	9.8	20.2	31.5	75.3	14.7
25/3/11	13.3	74.2	0.0	11.5	15.0	60.9	78.5	14.8
26/3/11	13.6	80.2	0.0	12.3	14.7	69.8	85.6	14.8
27/3/11	14.4	82.6	0.0	13.3	16.2	76.0	86.9	14.8
28/3/11	13.9	86.2	6.6	12.4	15.2	73.1	92.1	14.9
29/3/11	14.0	83.2	1.4	12.5	16.3	74.1	91.2	14.9
30/3/11	14.3	80.6	0.0	12.7	16.4	73.1	87.6	15.1
31/3/11	16.1	58.7	0.0	11.9	21.3	35.0	81.1	15.1

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**Temperatura**

Min: 3.2 °C il 9/3 alle ore 5.10

Max: 21.3 °C il 31/3 alle ore 15.00

Umidità

Min: 27.5 % il 7/3 alle ore 15.50

Max: 92.1 % il 28/3 alle ore 21.40

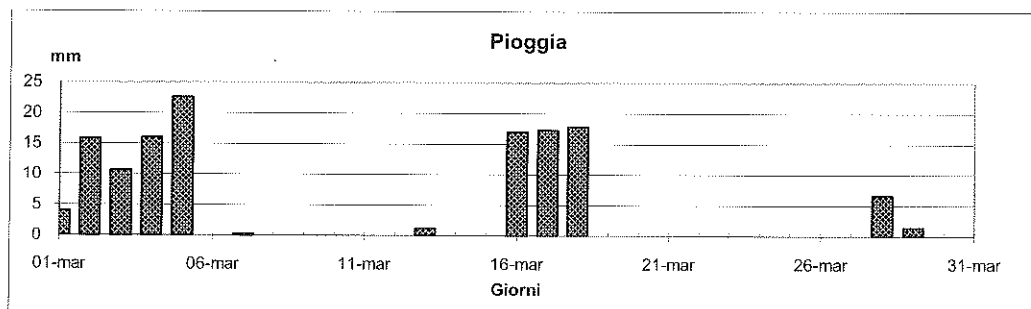
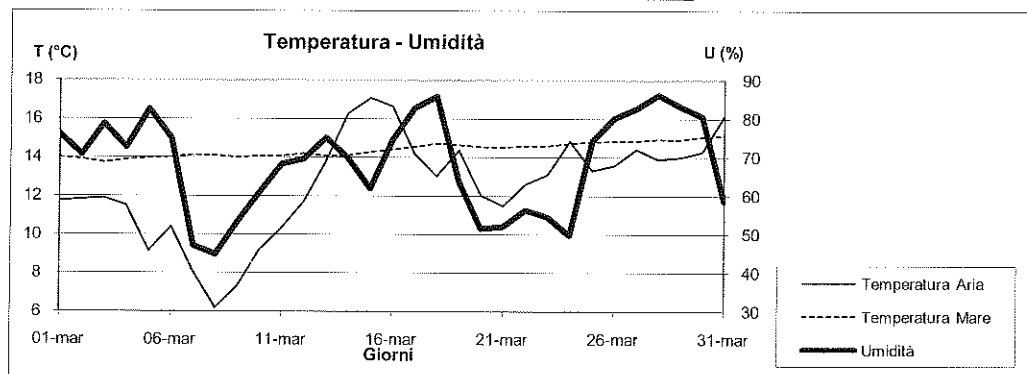
Pressione

Min: 996.0 hPa il 16/3 alle ore 18.30

Max: 1026.6 hPa il 24/3 alle ore 8.40

Velocità del vento

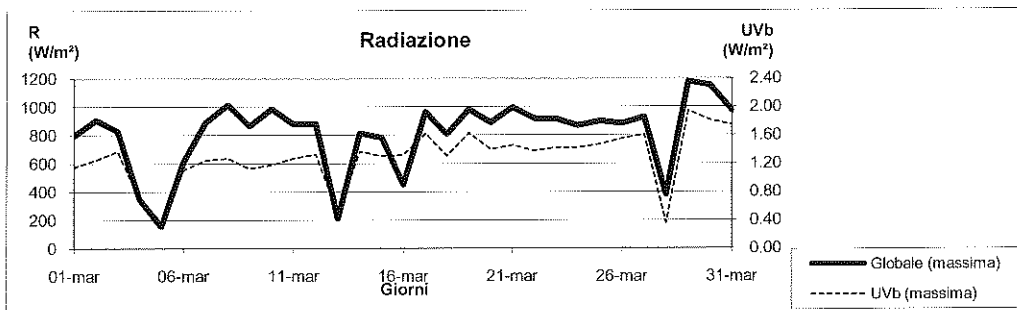
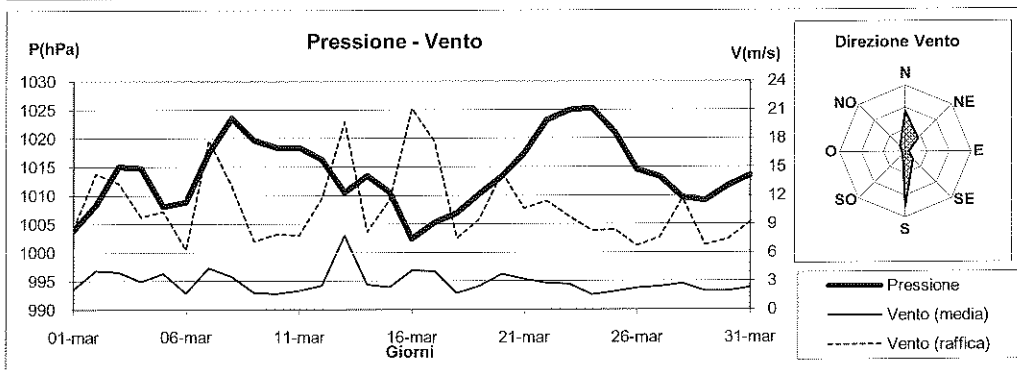
Max: 21.1 m/s il 16/3 alle ore 18.20

Radiazione totaleMax: 1176.9 W/m² il 29/3 alle ore 12.20**Radiazione UVb**Max: 1.940 W/m² il 29/3 alle ore 12.00

MARZO 2011

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin(hPa)	Pmax(hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
1/3/11	1003.9	0.0	2.1	62.2	0.104	1001.5	1007.1	8.5	794.5	1.150
2/3/11	1008.3	135.0	4.1	121.3	0.171	1005.1	1012.6	14.3	907.2	1.250
3/3/11	1015.0	180.0	3.9	83.0	0.131	1011.4	1018.1	13.3	829.7	1.370
4/3/11	1014.8	0.0	2.9	56.3	0.103	1011.9	1017.4	9.7	346.9	0.700
5/3/11	1008.0	0.0	3.8	31.0	0.070	1005.4	1012.1	10.3	154.0	0.380
6/3/11	1008.9	0.0	1.7	88.1	0.134	1007.1	1012.0	6.3	613.0	1.110
7/3/11	1017.4	45.0	4.4	255.9	0.292	1012.0	1023.5	17.8	887.8	1.240
8/3/11	1023.5	45.0	3.5	230.7	0.281	1021.7	1025.3	13.0	1012.4	1.270
9/3/11	1019.7	0.0	1.8	258.1	0.280	1017.9	1022.3	7.2	862.9	1.130
10/3/11	1018.4	0.0	1.7	201.7	0.232	1017.5	1019.5	7.9	984.3	1.180
11/3/11	1018.4	180.0	2.0	252.5	0.296	1016.9	1019.9	7.8	876.4	1.270
12/3/11	1016.3	180.0	2.5	256.0	0.313	1013.2	1018.7	11.7	880.7	1.330
13/3/11	1010.5	135.0	7.7	30.1	0.057	1008.8	1013.2	19.7	213.3	0.490
14/3/11	1013.5	180.0	2.6	181.3	0.270	1012.6	1015.0	8.2	815.1	1.370
15/3/11	1010.5	180.0	2.4	221.5	0.301	1007.0	1012.6	11.6	783.1	1.300
16/3/11	1002.4	180.0	4.1	42.0	0.098	996.0	1006.9	21.1	450.5	1.320
17/3/11	1005.2	180.0	4.0	167.4	0.254	1001.1	1007.0	17.7	965.3	1.620
18/3/11	1006.9	180.0	1.7	100.2	0.172	1004.6	1009.8	7.5	805.4	1.310
19/3/11	1010.3	0.0	2.5	172.3	0.264	1009.2	1011.4	9.5	982.3	1.630
20/3/11	1013.4	45.0	3.7	241.8	0.325	1011.4	1016.2	14.4	890.2	1.400
21/3/11	1017.3	45.0	3.2	259.4	0.332	1015.0	1021.7	10.6	995.4	1.460
22/3/11	1023.1	0.0	2.8	189.9	0.273	1021.7	1024.8	11.4	918.3	1.380
23/3/11	1024.9	0.0	2.7	265.5	0.341	1023.5	1026.0	9.8	915.5	1.420
24/3/11	1025.3	315.0	1.6	265.9	0.350	1024.1	1026.6	8.3	866.5	1.420
25/3/11	1021.0	180.0	1.9	261.8	0.354	1017.5	1024.2	8.4	900.9	1.470
26/3/11	1014.5	180.0	2.2	167.6	0.266	1012.6	1017.5	6.7	880.7	1.550
27/3/11	1013.3	180.0	2.4	247.7	0.357	1012.6	1014.4	7.6	927.0	1.610
28/3/11	1009.7	180.0	2.7	33.1	0.067	1007.7	1012.8	11.7	379.4	0.360
29/3/11	1009.2	180.0	1.9	212.3	0.304	1007.1	1011.6	6.8	1176.9	1.940
30/3/11	1011.7	180.0	2.0	282.1	0.394	1010.6	1013.2	7.4	1153.9	1.810
31/3/11	1013.6	0.0	2.3	272.0	0.397	1012.0	1015.6	9.2	975.6	1.740



APRILE 2011

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	T _{min} (°C)	T _{max} (°C)	U _{min} (%)	U _{max} (%)	T _{mare} (°C)
1/4/11	17.5	41.4	0.0	13.5	22.9	26.4	64.1	15.0
2/4/11	18.8	42.0	0.0	13.6	24.3	28.6	68.5	15.1
3/4/11	15.7	75.1	0.0	14.0	17.5	62.6	86.6	15.2
4/4/11	15.5	81.6	0.0	14.4	17.2	70.2	88.0	15.5
5/4/11	15.1	75.2	5.8	12.1	18.8	54.7	86.1	15.7
6/4/11	17.2	41.2	0.0	13.5	20.6	28.7	55.4	15.4
7/4/11	19.2	47.9	0.0	15.2	24.8	34.9	75.8	15.3
8/4/11	16.3	78.8	0.0	14.9	17.8	71.1	83.4	15.4
9/4/11	16.4	81.3	0.0	14.0	20.1	69.0	88.8	15.5
10/4/11	16.5	85.0	0.0	14.9	19.4	67.2	90.4	15.7
11/4/11	19.6	37.7	0.0	16.7	24.3	25.1	62.8	15.8
12/4/11	16.5	71.8	0.0	14.4	18.9	52.3	86.6	15.8
13/4/11	14.0	69.6	6.6	10.9	16.5	42.6	85.9	15.9
14/4/11	13.5	49.2	0.2	9.9	16.7	35.4	64.3	15.9
15/4/11	13.4	59.1	0.8	11.1	16.2	39.0	70.4	15.8
16/4/11	14.5	50.0	0.0	12.2	17.7	36.3	62.6	15.8
17/4/11	15.0	51.6	0.0	11.4	18.6	41.6	66.5	15.8
18/4/11	16.2	46.4	0.0	12.1	21.2	28.5	66.2	16.0
19/4/11	15.9	55.8	0.0	12.4	19.4	39.2	73.8	16.1
20/4/11	17.4	45.6	0.0	13.7	21.3	27.9	72.4	16.1
21/4/11	17.2	56.7	0.0	14.0	21.2	34.0	75.6	16.1
22/4/11	17.1	61.0	0.0	13.6	20.5	35.3	77.8	16.4
23/4/11	17.4	63.7	0.0	14.3	20.8	31.3	79.2	16.5
24/4/11	18.8	52.1	0.0	16.5	21.3	32.7	70.7	16.5
25/4/11	19.0	57.3	3.4	15.5	22.1	38.6	76.7	16.4
26/4/11	15.3	76.3	3.4	13.7	17.3	66.7	83.7	16.2
27/4/11	18.2	60.9	0.0	14.9	21.9	45.7	72.8	16.2
28/4/11	17.2	68.8	0.8	15.5	20.0	57.9	78.2	16.4
29/4/11	16.3	78.0	0.0	14.2	18.4	71.1	83.8	16.6
30/4/11	15.1	84.6	48.8	14.3	16.8	77.5	90.9	16.9

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**Temperatura**

Min: 9.9 °C il 14/4 alle ore 4.20

Max: 24.8 °C il 7/4 alle ore 13.20

Umidità

Min: 25.1 % il 11/4 alle ore 14.40

Max: 90.9 % il 30/4 alle ore 23.40

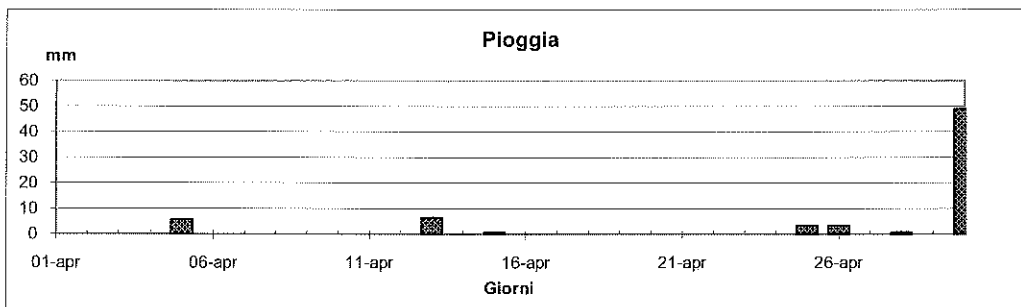
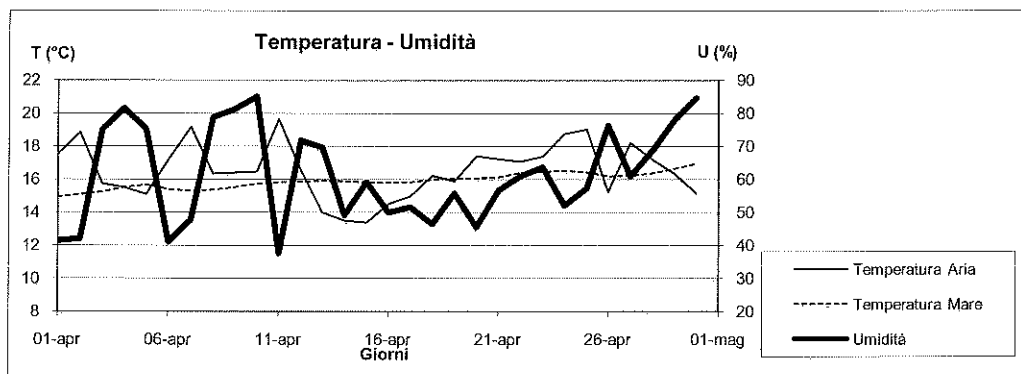
Pressione

Min: 994.2 hPa il 30/4 alle ore 17.30

Max: 1019.1 hPa il 7/4 alle ore 9.20

Velocità del vento

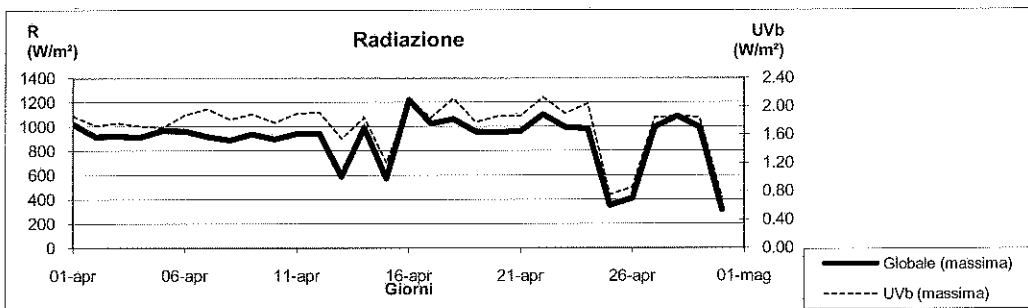
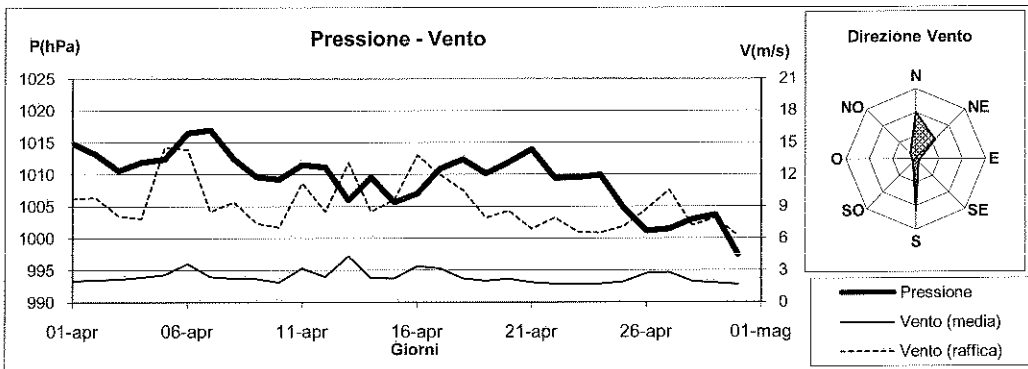
Max: 14.5 m/s il 5/4 alle ore 18.30

Radiazione totaleMax: 1218.4 W/m² il 16/4 alle ore 10.50**Radiazione UVb**Max: 2.130 W/m² il 22/4 alle ore 12.40

APRILE 2011

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
1/4/11	1014.9	0.0	2.0	241.8	0.365	1013.2	1016.2	9.7	1021.9	1.860
2/4/11	1013.1	315.0	2.1	278.2	0.432	1011.3	1015.1	9.8	916.7	1.730
3/4/11	1010.5	180.0	2.1	290.2	0.446	1008.9	1012.1	8.1	918.7	1.760
4/4/11	1011.9	180.0	2.3	252.7	0.402	1010.8	1012.8	7.8	912.7	1.720
5/4/11	1012.3	45.0	2.6	220.8	0.334	1010.1	1014.4	14.5	965.3	1.700
6/4/11	1016.5	45.0	3.6	309.6	0.480	1013.8	1018.7	14.3	962.6	1.880
7/4/11	1016.9	0.0	2.4	291.4	0.499	1014.4	1019.1	8.5	915.9	1.960
8/4/11	1012.4	180.0	2.2	265.1	0.444	1010.8	1014.4	9.4	888.6	1.810
9/4/11	1009.6	180.0	2.2	300.1	0.479	1007.7	1012.0	7.4	936.5	1.890
10/4/11	1009.2	180.0	1.9	186.6	0.306	1007.7	1010.7	7.0	896.9	1.770
11/4/11	1011.5	45.0	3.2	302.8	0.491	1010.2	1012.9	11.2	940.4	1.900
12/4/11	1011.1	180.0	2.4	299.7	0.494	1008.3	1012.6	8.5	942.0	1.910
13/4/11	1005.9	45.0	4.3	88.7	0.180	1002.6	1010.8	13.1	585.8	1.540
14/4/11	1009.5	180.0	2.3	319.0	0.495	1007.1	1011.4	8.5	990.6	1.840
15/4/11	1005.6	0.0	2.2	131.0	0.251	1004.6	1007.5	9.6	571.5	1.200
16/4/11	1007.0	45.0	3.4	202.0	0.355	1005.7	1009.5	13.8	1218.4	2.060
17/4/11	1010.8	45.0	3.2	299.9	0.466	1008.9	1013.8	12.0	1026.2	1.840
18/4/11	1012.4	0.0	2.2	300.1	0.503	1010.7	1013.8	10.5	1062.6	2.110
19/4/11	1010.2	0.0	2.0	319.2	0.487	1008.0	1012.6	7.9	957.4	1.780
20/4/11	1011.9	0.0	2.2	317.1	0.496	1009.6	1015.1	8.6	954.3	1.860
21/4/11	1013.9	180.0	1.8	313.6	0.480	1011.4	1015.6	6.9	961.0	1.860
22/4/11	1009.4	180.0	1.7	290.5	0.478	1008.3	1011.4	7.9	1099.4	2.130
23/4/11	1009.5	180.0	1.7	251.0	0.438	1008.9	1010.8	6.6	995.4	1.900
24/4/11	1009.9	180.0	1.7	252.0	0.457	1008.6	1011.4	6.5	983.1	2.040
25/4/11	1004.8	0.0	1.9	75.4	0.148	1001.5	1008.9	7.1	351.7	0.750
26/4/11	1001.2	0.0	2.7	70.7	0.131	999.7	1003.1	8.7	411.0	0.860
27/4/11	1001.5	0.0	2.8	280.2	0.435	1000.5	1002.7	10.5	997.4	1.840
28/4/11	1003.0	0.0	2.0	239.5	0.361	1001.9	1004.6	7.2	1088.7	1.860
29/4/11	1003.7	180.0	1.8	295.5	0.458	1002.5	1005.0	7.9	997.0	1.840
30/4/11	997.5	0.0	1.7	34.5	0.087	994.2	1002.4	6.2	312.9	0.710



MAGGIO 2011

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)	Tmare (°C)
1/5/11	17.1	80.3	4.4	14.4	21.4	52.0	92.2	16.7
2/5/11	17.3	76.4	4.4	15.2	19.8	64.1	86.3	16.7
3/5/11	18.1	78.9	0.4	15.3	21.0	67.2	88.8	16.8
4/5/11	18.0	76.7	11.0	15.3	21.2	58.1	89.5	17.0
5/5/11	18.1	45.7	0.0	15.3	21.9	26.9	77.5	17.1
6/5/11	17.3	40.0	0.0	13.5	20.6	26.5	53.1	17.3
7/5/11	17.5	61.8	0.0	14.1	21.2	46.1	71.9	17.4
8/5/11	17.9	62.8	0.0	15.2	21.6	39.3	78.6	17.7
9/5/11	15.9	56.8	2.8	13.3	18.8	36.7	74.6	17.8
10/5/11	19.0	43.4	0.0	14.8	22.9	31.8	54.8	17.5
11/5/11	20.6	41.8	0.0	16.3	25.5	28.5	71.4	17.5
12/5/11	21.5	48.1	0.0	16.2	26.8	23.2	73.0	17.5
13/5/11	18.9	75.1	0.0	17.3	20.3	53.7	88.4	17.5
14/5/11	18.8	77.4	0.0	16.3	21.5	57.2	89.7	17.8
15/5/11	19.1	65.9	0.0	16.5	22.4	39.5	82.1	18.4
16/5/11	17.3	55.5	0.0	15.0	20.4	36.6	78.3	18.2
17/5/11	16.6	52.9	0.0	14.5	19.1	43.7	57.8	17.7
18/5/11	19.0	50.7	0.0	14.6	23.6	36.5	68.3	17.8
19/5/11	20.2	55.5	0.0	16.4	23.9	40.6	71.1	18.0
20/5/11	20.7	61.3	0.0	17.2	25.2	40.2	76.5	18.1
21/5/11	21.4	63.0	0.0	18.9	25.0	43.4	77.1	18.5
22/5/11	21.6	58.4	0.0	19.1	26.2	37.6	80.4	18.6
23/5/11	22.0	62.7	0.0	18.5	26.7	39.6	78.9	18.4
24/5/11	22.2	60.9	3.2	19.3	25.7	46.2	81.3	18.5
25/5/11	23.4	61.4	0.0	18.4	29.1	38.5	81.5	18.8
26/5/11	23.5	60.3	22.8	20.4	30.0	37.6	83.4	18.8
27/5/11	21.0	83.8	0.0	19.5	22.7	76.3	89.0	19.2
28/5/11	21.3	76.8	0.0	20.0	22.8	47.5	89.2	20.2
29/5/11	21.8	65.8	0.0	18.4	25.0	52.7	79.9	20.5
30/5/11	21.8	63.1	0.0	20.3	23.8	47.1	81.3	20.6
31/5/11	21.4	76.9	0.0	19.6	23.1	64.7	84.6	20.8

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**Temperatura**

Min: 13.3 °C il 9/5 alle ore 20.30

Max: 30.0 °C il 26/5 alle ore 14.30

Umidità

Min: 23.2 % il 12/5 alle ore 13.10

Max: 92.2 % il 1/5 alle ore 7.00

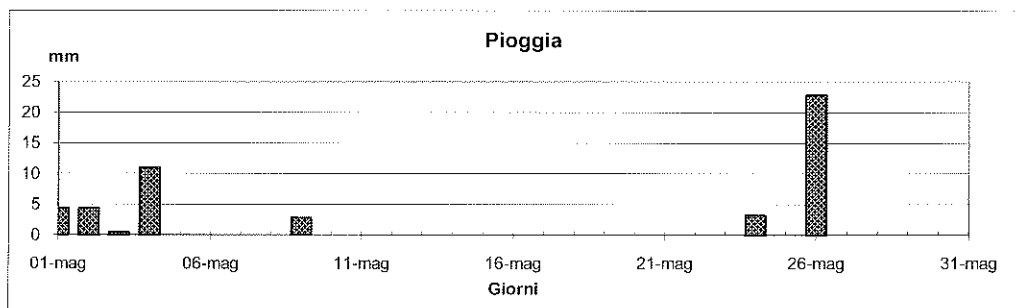
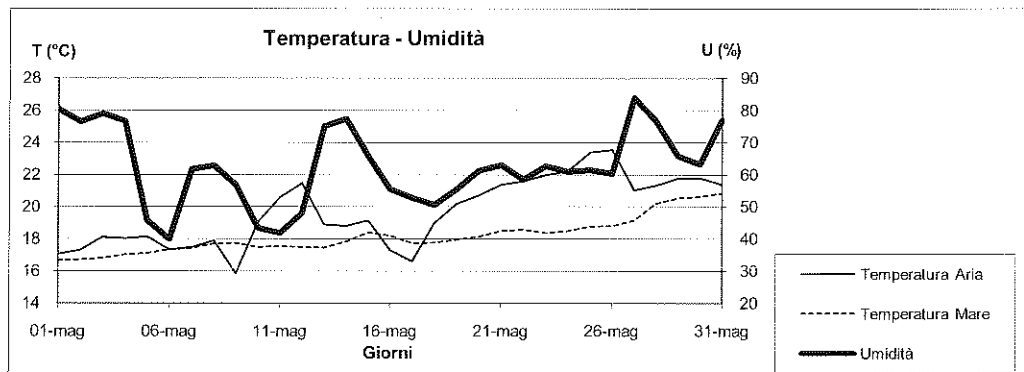
Pressione

Min: 993.5 hPa il 1/5 alle ore 5.00

Max: 1019.9 hPa il 6/5 alle ore 21.00

Velocità del vento

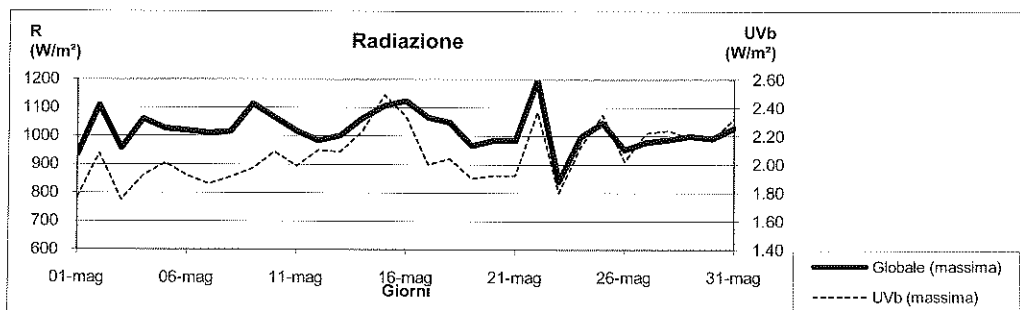
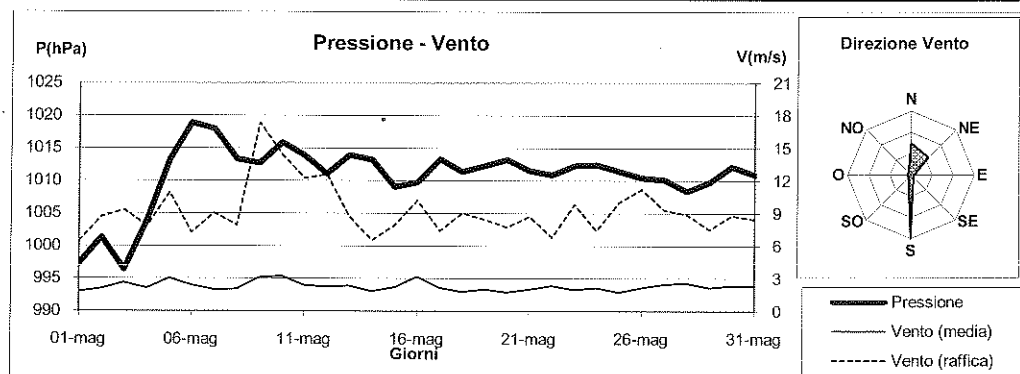
Max: 17.3 m/s il 9/5 alle ore 17.00

Radiazione totaleMax: 1198.2 W/m² il 22/5 alle ore 11.40**Radiazione UVb**Max: 2.490 W/m² il 15/5 alle ore 11.40

MAGGIO 2011

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	P _{min} (hPa)	P _{max} (hPa)	VV _{max} (m/s)	R _{max} (W/m²)	UVb _{max} (W/m²)
1/5/11	997.2	0.0	1.8	237.4	0.387	993.5	1003.3	6.4	935.3	1.770
2/5/11	1001.3	180.0	2.0	181.5	0.309	995.4	1004.8	8.7	1107.7	2.080
3/5/11	996.3	180.0	2.6	235.5	0.356	993.7	1000.3	9.3	957.0	1.750
4/5/11	1003.9	180.0	2.1	296.9	0.471	1000.2	1008.9	7.8	1060.2	1.920
5/5/11	1013.2	45.0	3.0	358.0	0.551	1008.9	1018.0	10.9	1027.4	2.010
6/5/11	1018.9	0.0	2.4	361.5	0.533	1018.0	1019.9	7.2	1019.1	1.920
7/5/11	1017.9	180.0	2.0	351.2	0.513	1015.9	1019.9	9.0	1010.8	1.860
8/5/11	1013.3	180.0	2.0	344.5	0.525	1011.4	1016.2	7.9	1015.9	1.910
9/5/11	1012.7	45.0	3.1	244.8	0.390	1011.4	1014.8	17.3	1113.2	1.970
10/5/11	1015.8	45.0	3.2	337.4	0.536	1014.4	1017.5	14.4	1066.2	2.090
11/5/11	1013.9	0.0	2.4	342.6	0.552	1011.0	1017.5	12.2	1017.9	1.990
12/5/11	1011.0	45.0	2.3	346.5	0.577	1009.5	1012.6	12.6	983.1	2.100
13/5/11	1013.9	180.0	2.3	343.3	0.568	1012.0	1015.0	8.7	1002.1	2.090
14/5/11	1013.2	180.0	1.8	335.8	0.564	1011.4	1015.0	6.5	1061.8	2.230
15/5/11	1009.0	180.0	2.2	265.0	0.509	1006.4	1012.0	7.9	1106.1	2.490
16/5/11	1009.8	0.0	3.2	222.8	0.398	1005.8	1013.8	10.2	1124.7	2.340
17/5/11	1013.3	0.0	2.1	156.4	0.256	1012.6	1013.8	7.4	1065.8	2.000
18/5/11	1011.4	0.0	1.8	280.2	0.455	1010.0	1012.7	9.0	1048.8	2.040
19/5/11	1012.3	0.0	2.0	341.9	0.536	1011.4	1013.8	8.4	965.3	1.900
20/5/11	1013.2	180.0	1.8	307.6	0.480	1012.0	1014.4	7.7	984.7	1.920
21/5/11	1011.5	180.0	2.0	293.2	0.506	1010.1	1012.6	8.7	983.1	1.920
22/5/11	1010.9	180.0	2.4	173.7	0.341	1009.4	1013.8	6.8	1198.2	2.370
23/5/11	1012.3	0.0	2.0	159.9	0.308	1011.3	1013.8	9.8	838.8	1.800
24/5/11	1012.5	180.0	2.1	286.0	0.498	1011.4	1013.8	7.4	998.9	2.130
25/5/11	1011.4	45.0	1.7	263.0	0.476	1009.9	1012.6	10.0	1046.0	2.350
26/5/11	1010.5	45.0	2.2	260.3	0.480	1008.2	1011.8	11.2	951.1	2.020
27/5/11	1010.1	180.0	2.5	337.9	0.624	1008.9	1010.7	9.3	977.6	2.220
28/5/11	1008.4	180.0	2.6	331.6	0.615	1007.3	1009.5	8.9	987.9	2.240
29/5/11	1009.7	180.0	2.1	359.1	0.631	1008.8	1012.0	7.5	1000.5	2.190
30/5/11	1012.2	180.0	2.3	346.9	0.614	1011.4	1013.2	8.8	990.6	2.170
31/5/11	1010.9	180.0	2.3	335.2	0.587	1009.7	1012.0	8.4	1029.0	2.320



GIUGNO 2011

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin(°C)	Tmax(°C)	Umin(%)	Umax(%)	Tmare(°C)
1/6/11	20.3	79.2	25.8	17.5	21.6	70.6	86.6	21.0
2/6/11	22.1	73.2	0.0	19.6	26.0	58.6	82.1	20.9
3/6/11	23.4	65.5	9.6	20.2	26.8	47.6	79.7	21.0
4/6/11	24.6	58.3	0.0	21.4	27.9	44.1	75.7	21.2
5/6/11	23.1	67.5	1.8	21.5	23.9	59.4	78.9	21.4
6/6/11	23.2	72.0	0.0	20.8	26.0	55.4	87.3	21.1
7/6/11	23.5	76.9	0.8	21.8	26.5	57.1	86.8	22.0
8/6/11	22.6	74.2	0.0	21.2	25.1	59.7	86.2	22.5
9/6/11	21.6	71.1	0.4	20.4	24.1	56.4	79.6	22.1
10/6/11	21.2	69.1	0.0	19.6	23.0	61.1	76.2	21.7
11/6/11	20.9	75.0	13.4	18.8	22.8	65.2	81.2	21.7
12/6/11	21.5	70.2	0.0	18.0	25.3	55.2	83.0	21.9
13/6/11	21.2	74.4	0.0	20.0	23.1	63.1	82.5	21.7
14/6/11	21.5	73.1	0.0	19.7	25.7	57.1	78.5	21.4
15/6/11	22.1	70.9	5.6	19.5	27.0	51.0	80.5	21.6
16/6/11	23.1	68.9	0.0	19.0	26.8	46.5	82.0	21.2
17/6/11	23.2	72.6	0.0	20.9	25.8	56.5	79.9	21.3
18/6/11	23.0	75.6	0.0	20.7	25.2	57.7	85.6	21.9
19/6/11	23.0	74.0	0.0	21.2	24.9	58.8	82.3	22.3
20/6/11	23.8	71.9	0.0	20.6	27.3	61.4	79.9	22.6
21/6/11	25.4	65.4	0.0	22.2	29.7	42.4	80.2	22.5
22/6/11	26.0	59.1	0.0	22.6	31.3	33.8	76.8	22.3
23/6/11	26.1	54.7	0.0	22.5	30.3	36.5	72.2	21.9
24/6/11	25.1	67.4	0.0	23.1	27.7	55.7	75.0	22.1
25/6/11	25.9	54.0	0.0	22.4	30.1	33.9	79.1	22.3
26/6/11	25.8	39.5	0.0	22.0	30.1	26.2	50.7	22.0
27/6/11	26.5	43.2	0.0	23.0	31.5	29.6	71.0	20.9
28/6/11	24.6	70.0	0.0	22.3	27.2	47.5	83.0	20.4
29/6/11	25.0	70.9	0.0	22.4	29.1	38.1	88.1	20.9
30/6/11	24.6	79.3	0.0	22.9	26.8	59.2	89.7	21.4

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**Temperatura**

Min: 17.5 °C il 1/6 alle ore 12.20

Max: 31.5 °C il 27/6 alle ore 12.40

Umidità

Min: 26.2 % il 26/6 alle ore 14.50

Max: 89.7 % il 30/6 alle ore 2.20

Pressione

Min: 998.6 hPa il 7/6 alle ore 4.50

Max: 1015.6 hPa il 26/6 alle ore 21.10

Velocità del vento

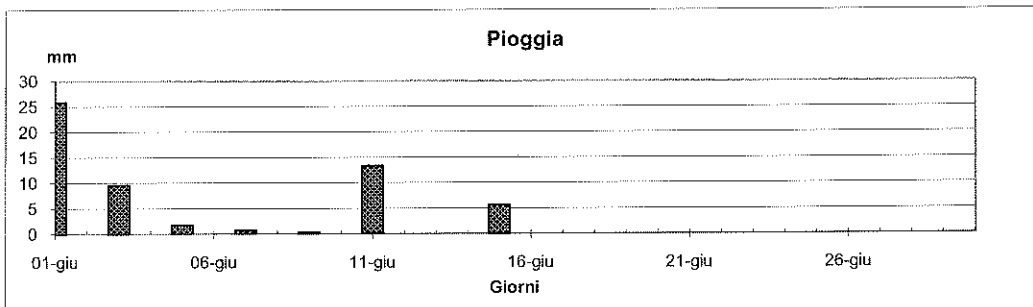
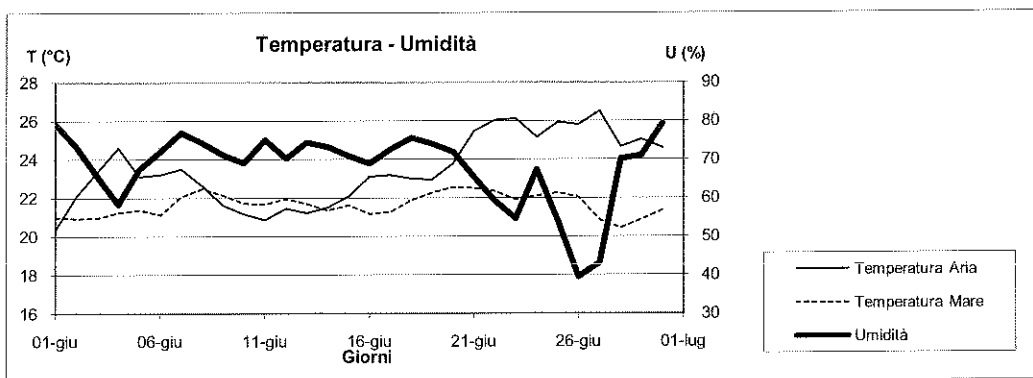
Max: 13.7 m/s il 1/6 alle ore 14.10

Radiazione totale

Max: 1117.2 W/m² il 13/6 alle ore 13.00

Radiazione UVb

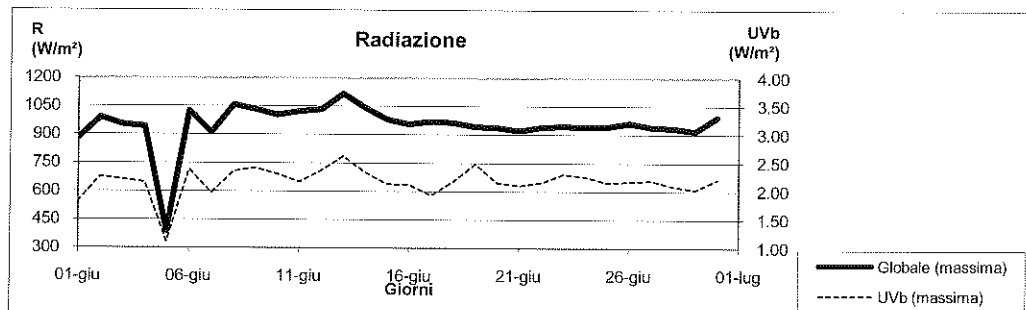
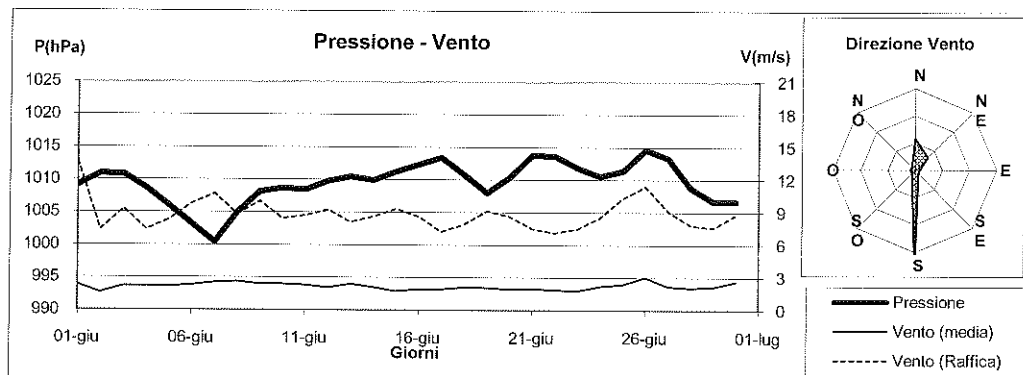
Max: 2.620 W/m² il 13/6 alle ore 12.40



GIUGNO 2011

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
1/6/11	1009.1	180.0	2.4	67.7	0.142	1007.7	1010.7	13.7	879.9	1.810
2/6/11	1010.9	0.0	1.6	256.8	0.519	1009.5	1012.6	7.4	990.6	2.260
3/6/11	1010.8	0.0	2.2	339.3	0.639	1009.5	1012.0	9.3	951.9	2.210
4/6/11	1008.7	0.0	2.2	317.6	0.596	1007.0	1010.7	7.4	941.6	2.150
5/6/11	1006.0	0.0	2.2	70.8	0.175	1003.9	1008.3	8.3	388.8	1.110
6/6/11	1003.2	180.0	2.3	304.3	0.573	1002.1	1004.0	9.8	1025.4	2.380
7/6/11	1000.4	180.0	2.5	266.9	0.468	998.6	1003.3	10.7	911.2	1.970
8/6/11	1005.0	180.0	2.6	337.7	0.614	1003.2	1008.2	8.8	1058.6	2.350
9/6/11	1008.1	180.0	2.4	277.7	0.532	1007.0	1009.8	10.0	1034.5	2.410
10/6/11	1008.6	180.0	2.4	361.9	0.659	1007.6	1009.5	8.4	1003.3	2.300
11/6/11	1008.4	180.0	2.3	182.8	0.358	1007.6	1009.5	8.7	1022.7	2.160
12/6/11	1009.7	180.0	2.1	357.2	0.648	1008.8	1011.3	9.2	1034.1	2.370
13/6/11	1010.4	180.0	2.4	286.6	0.568	1009.5	1011.3	8.1	1117.2	2.620
14/6/11	1009.9	180.0	2.1	283.2	0.533	1008.3	1011.4	8.6	1040.5	2.330
15/6/11	1011.2	45.0	1.7	261.3	0.497	1009.5	1012.8	9.3	978.8	2.130
16/6/11	1012.3	180.0	1.9	351.4	0.582	1011.3	1013.8	8.6	957.0	2.120
17/6/11	1013.3	180.0	1.9	357.1	0.555	1012.5	1014.3	7.2	989.7	1.930
18/6/11	1010.7	180.0	2.1	357.5	0.635	1008.8	1012.6	7.9	984.5	2.170
19/6/11	1007.9	180.0	2.0	253.4	0.482	1007.0	1009.5	9.1	943.6	2.480
20/6/11	1010.3	180.0	1.9	343.3	0.632	1008.9	1012.6	8.6	936.9	2.150
21/6/11	1013.8	180.0	1.9	342.5	0.614	1012.5	1015.0	7.5	921.0	2.100
22/6/11	1013.6	0.0	1.9	349.1	0.641	1012.0	1015.0	7.1	940.8	2.150
23/6/11	1011.8	180.0	1.8	349.9	0.665	1010.7	1013.1	7.5	944.4	2.300
24/6/11	1010.6	180.0	2.2	346.9	0.648	1009.5	1012.0	8.5	941.2	2.260
25/6/11	1011.4	45.0	2.4	242.9	0.480	1010.0	1014.5	10.3	942.4	2.150
26/6/11	1014.6	45.0	3.0	357.7	0.646	1013.3	1015.6	11.4	961.8	2.170
27/6/11	1013.3	0.0	2.2	350.1	0.633	1011.3	1015.6	9.1	940.8	2.190
28/6/11	1008.7	180.0	2.1	322.2	0.587	1006.4	1011.9	7.8	935.3	2.090
29/6/11	1006.7	180.0	2.2	341.2	0.599	1005.8	1007.7	7.6	919.1	2.030
30/6/11	1006.7	180.0	2.6	325.3	0.610	1005.8	1007.7	8.8	994.2	2.210



LUGLIO 2011

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)	Tmare (°C)
1/7/11	24.8	72.8	0.0	22.6	27.1	61.6	81.1	21.6
2/7/11	24.1	67.6	0.0	22.8	25.9	58.3	77.9	21.8
3/7/11	23.9	65.9	0.0	21.2	25.6	57.9	73.0	22.0
4/7/11	24.1	75.3	0.0	22.1	26.6	62.5	82.0	22.7
5/7/11	23.6	78.0	6.8	21.1	25.3	66.9	84.5	23.4
6/7/11	25.6	68.3	0.8	21.9	29.2	53.0	82.3	23.6
7/7/11	26.1	69.5	0.0	23.6	29.7	46.1	83.1	23.3
8/7/11	26.4	68.4	0.0	23.6	29.9	52.1	78.9	23.5
9/7/11	27.4	60.5	0.0	23.7	30.7	45.1	78.6	23.7
10/7/11	27.6	56.6	0.0	24.2	31.6	35.7	76.6	24.0
11/7/11	27.6	62.7	0.0	24.0	33.1	34.0	80.7	24.3
12/7/11	27.9	63.3	0.0	24.8	33.1	45.0	72.8	24.6
13/7/11	29.1	60.4	0.0	26.2	32.4	40.5	82.3	25.2
14/7/11	27.5	69.2	0.0	25.6	29.4	44.6	84.3	24.9
15/7/11	25.7	53.6	0.0	23.8	28.6	34.4	67.3	24.3
16/7/11	25.0	59.1	0.0	22.3	28.2	43.4	74.7	23.9
17/7/11	24.9	62.6	0.0	22.0	28.4	43.3	75.3	24.1
18/7/11	26.1	64.5	0.0	23.0	29.6	46.1	77.0	24.9
19/7/11	25.5	71.1	0.0	23.4	27.5	50.4	82.9	25.1
20/7/11	24.0	64.8	0.0	22.1	25.7	52.6	82.6	24.6
21/7/11	23.1	66.2	0.0	21.2	25.5	53.3	76.5	23.2
22/7/11	24.1	71.6	0.0	22.2	25.4	61.9	79.0	23.6
23/7/11	22.6	71.3	8.8	20.0	26.2	50.6	84.5	23.7
24/7/11	22.2	62.6	0.0	20.4	24.5	48.3	72.4	22.4
25/7/11	21.6	65.9	0.0	19.2	24.6	47.6	74.4	20.6
26/7/11	22.4	70.0	0.0	19.9	25.4	52.5	77.0	21.6
27/7/11	23.6	69.6	0.0	20.4	25.6	59.6	75.8	21.8
28/7/11	23.9	74.6	20.8	20.2	26.2	64.4	84.7	22.1
29/7/11	23.0	73.4	0.0	20.9	25.6	60.6	82.9	22.4
30/7/11	23.3	74.2	0.0	20.4	25.4	62.8	83.1	22.0
31/7/11	23.6	70.5	0.0	21.4	27.8	46.5	84.9	22.3

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**Temperatura**

Min: 19.2 °C il 25/7 alle ore 5.30

Max: 33.1 °C il 11/7 alle ore 17.40

Umidità

Min: 34.0 % il 11/7 alle ore 17.00

Max: 84.9 % il 31/7 alle ore 6.40

Pressione

Min: 991.9 hPa il 29/7 alle ore 14.40

Max: 1013.1 hPa il 9/7 alle ore 5.40

Velocità del vento

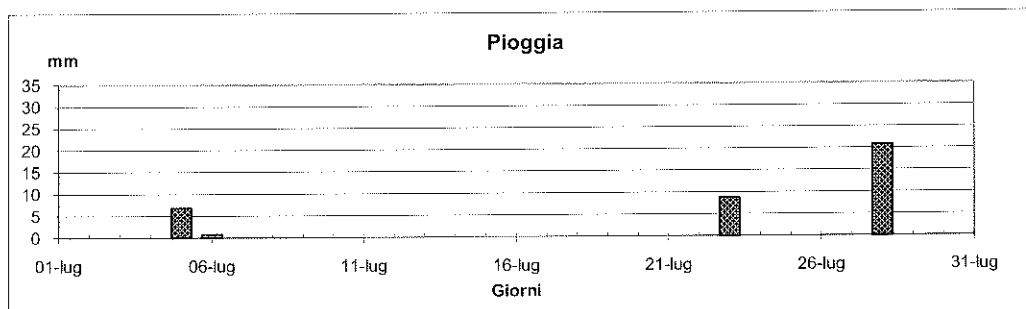
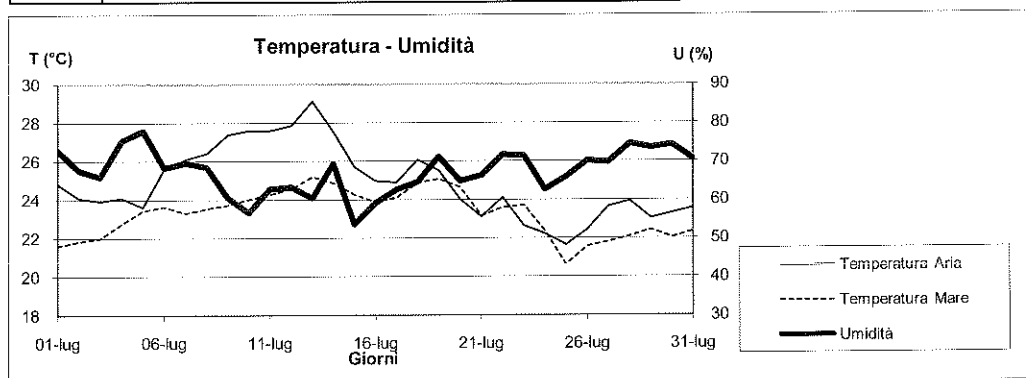
Max: 12.5 m/s il 20/7 alle ore 4.20

Radiazione totale

Max: 1113.6 W/m² il 25/7 alle ore 12.30

Radiazione UVb

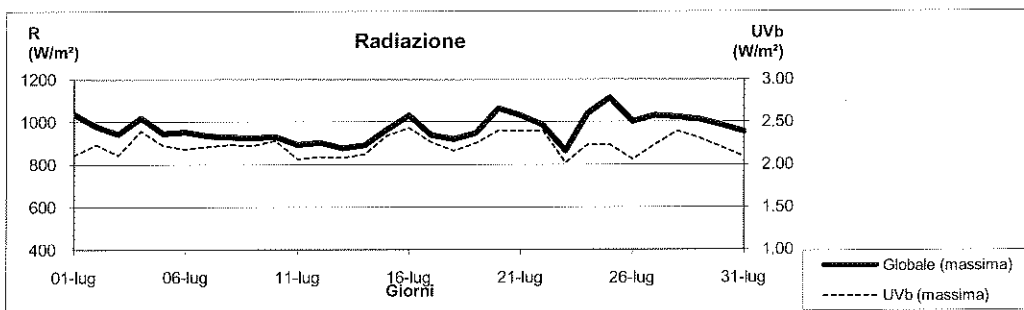
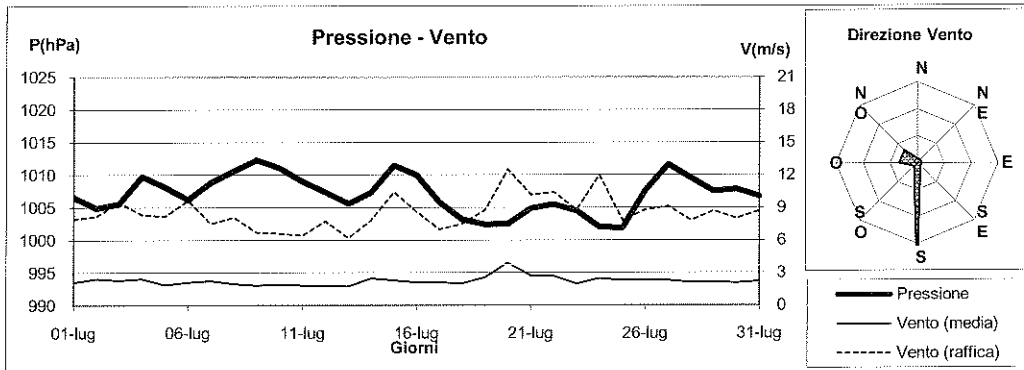
Max: 2.430 W/m² il 16/7 alle ore 12.00



LUGLIO 2011

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
1/7/11	1006.6	180.0	2.1	323.6	0.575	1005.3	1007.1	7.9	1038.1	2.110
2/7/11	1004.9	180.0	2.4	302.4	0.603	1003.9	1006.3	8.2	979.2	2.230
3/7/11	1005.6	180.0	2.3	335.1	0.601	1003.9	1008.3	9.5	942.4	2.110
4/7/11	1009.7	180.0	2.4	287.7	0.554	1007.5	1011.4	8.3	1019.5	2.390
5/7/11	1008.1	180.0	1.9	128.7	0.260	1005.8	1010.7	8.2	945.6	2.220
6/7/11	1006.2	180.0	2.1	342.0	0.628	1005.1	1008.3	9.6	951.1	2.180
7/7/11	1008.8	180.0	2.3	343.1	0.642	1008.2	1009.5	7.5	933.7	2.210
8/7/11	1010.6	180.0	2.0	342.2	0.638	1009.4	1012.0	8.1	929.3	2.230
9/7/11	1012.3	180.0	1.8	342.6	0.650	1011.4	1013.1	6.7	924.6	2.220
10/7/11	1011.1	180.0	1.9	341.7	0.663	1009.5	1012.0	6.6	931.3	2.280
11/7/11	1009.0	180.0	1.8	321.9	0.595	1007.6	1010.8	6.4	891.8	2.060
12/7/11	1007.3	180.0	1.8	325.5	0.605	1005.7	1008.9	7.7	903.3	2.090
13/7/11	1005.6	180.0	1.7	312.4	0.590	1003.9	1007.0	6.2	875.2	2.080
14/7/11	1007.3	180.0	2.5	317.5	0.604	1005.7	1010.5	7.8	889.4	2.120
15/7/11	1011.4	270.0	2.3	348.1	0.673	1010.3	1012.6	10.4	963.7	2.340
16/7/11	1010.0	315.0	2.1	318.8	0.620	1007.8	1012.3	8.6	1031.0	2.430
17/7/11	1005.8	180.0	2.1	342.3	0.648	1003.3	1008.3	7.0	938.8	2.260
18/7/11	1003.2	180.0	2.0	333.7	0.620	1002.6	1004.1	7.5	919.5	2.160
19/7/11	1002.4	180.0	2.6	330.1	0.637	1000.9	1003.3	8.8	947.1	2.250
20/7/11	1002.5	270.0	3.9	319.3	0.583	1000.2	1005.2	12.5	1064.2	2.400
21/7/11	1004.8	180.0	2.7	335.8	0.624	1003.8	1006.3	10.2	1031.4	2.390
22/7/11	1005.5	180.0	2.7	283.7	0.543	1004.4	1006.5	10.4	986.3	2.400
23/7/11	1004.5	315.0	2.0	125.5	0.225	1003.1	1006.3	8.8	864.5	2.020
24/7/11	1002.0	270.0	2.5	259.0	0.461	1000.8	1004.5	12.0	1041.2	2.230
25/7/11	1001.9	180.0	2.3	305.8	0.488	1000.8	1004.5	7.8	1113.6	2.230
26/7/11	1007.5	180.0	2.4	302.9	0.512	1003.9	1011.4	8.8	1000.9	2.060
27/7/11	1011.6	180.0	2.3	318.6	0.565	1010.1	1013.0	9.1	1031.0	2.230
28/7/11	1009.5	180.0	2.1	178.3	0.318	1008.0	1010.7	7.8	1022.7	2.390
29/7/11	1007.5	315.0	2.1	308.6	0.569	991.9	1008.9	8.7	1012.4	2.310
30/7/11	1007.8	180.0	2.0	333.1	0.606	1006.9	1008.9	8.0	985.5	2.200
31/7/11	1006.7	180.0	2.2	307.9	0.549	1005.7	1007.6	8.7	954.3	2.090



AGOSTO 2011

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)	Tmare (°C)
1/8/11	24.1	64.7	0.0	21.1	27.8	45.4	79.2	22.7
2/8/11	25.3	65.7	0.0	21.5	29.7	43.7	81.3	22.0
3/8/11	25.4	71.7	0.0	22.7	29.4	49.7	81.4	22.4
4/8/11	25.8	67.8	0.0	23.8	29.0	49.7	80.2	23.0
5/8/11	25.6	70.0	0.0	22.3	29.2	48.8	82.5	23.3
6/8/11	25.3	74.2	0.0	23.5	27.8	55.2	84.3	23.3
7/8/11	24.9	75.6	0.0	22.8	27.2	58.6	85.2	23.3
8/8/11	25.1	79.4	0.0	22.5	27.7	71.1	85.7	23.4
9/8/11	25.5	73.8	0.0	23.9	28.6	54.2	87.1	23.6
10/8/11	25.9	49.2	0.0	22.2	30.3	29.2	78.5	23.9
11/8/11	24.8	47.4	0.0	21.5	29.0	28.5	68.4	23.1
12/8/11	24.7	62.3	0.0	21.5	28.9	40.4	76.2	22.8
13/8/11	24.4	68.0	0.0	22.6	28.1	42.0	80.6	23.0
14/8/11	24.9	69.7	0.0	22.1	29.1	53.9	77.2	23.0
15/8/11	25.6	68.5	0.0	22.2	30.6	32.4	83.3	23.3
16/8/11	26.7	68.3	0.0	23.7	31.8	42.9	80.6	23.3
17/8/11	26.6	75.6	0.0	23.5	32.0	49.2	89.0	23.7
18/8/11	27.1	66.4	0.0	23.7	32.7	37.2	80.2	23.8
19/8/11	27.1	63.8	0.0	23.9	32.5	30.8	81.2	23.8
20/8/11	27.2	69.2	0.0	24.6	30.8	55.2	79.4	24.4
21/8/11	28.5	66.6	0.0	25.5	32.7	47.1	80.3	24.7
22/8/11	30.8	39.3	0.0	26.0	35.4	29.2	56.3	24.7
23/8/11	28.8	57.0	0.0	26.3	32.2	32.0	87.6	24.8
24/8/11	27.7	72.3	0.0	24.6	30.7	48.9	86.6	24.9
25/8/11	27.8	77.3	0.0	24.8	33.4	53.0	88.1	24.9
26/8/11	28.6	73.4	0.0	25.0	32.5	51.6	89.0	25.4
27/8/11	27.7	67.1	0.0	25.0	30.7	49.1	77.5	25.5
28/8/11	25.5	67.8	0.0	23.9	27.6	52.0	80.4	25.3
29/8/11	24.9	63.4	0.0	22.7	27.3	54.4	70.9	25.3
30/8/11	24.6	68.2	0.0	22.8	27.1	54.9	72.8	25.3
31/8/11	25.5	67.9	0.0	22.7	28.8	47.2	77.6	25.4

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**Temperatura**

Min: 21.1 °C il 1/8 alle ore 3.40

Max: 35.4 °C il 22/8 alle ore 14.30

Umidità

Min: 28.5 % il 11/8 alle ore 12.10

Max: 89.0 % il 17/8 alle ore 5.0

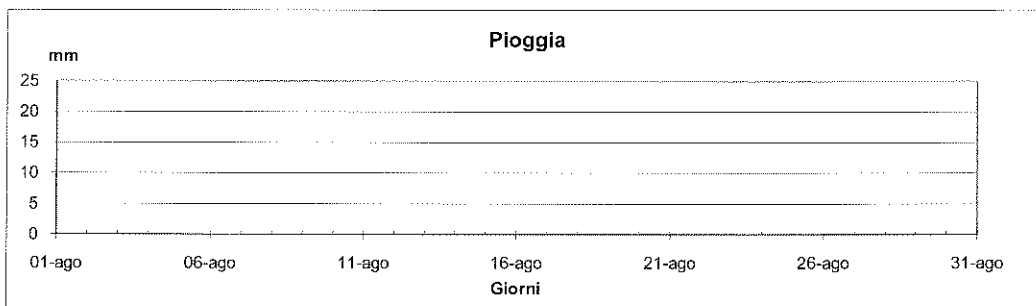
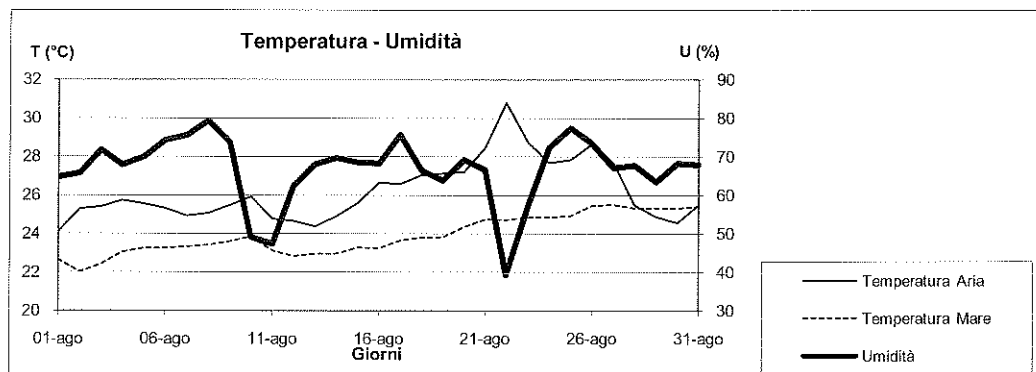
Pressione

Min: 1005.1 hPa il 14/8 alle ore 17.50

Max: 1013.7 hPa il 3/8 alle ore 7.20

Velocità del vento

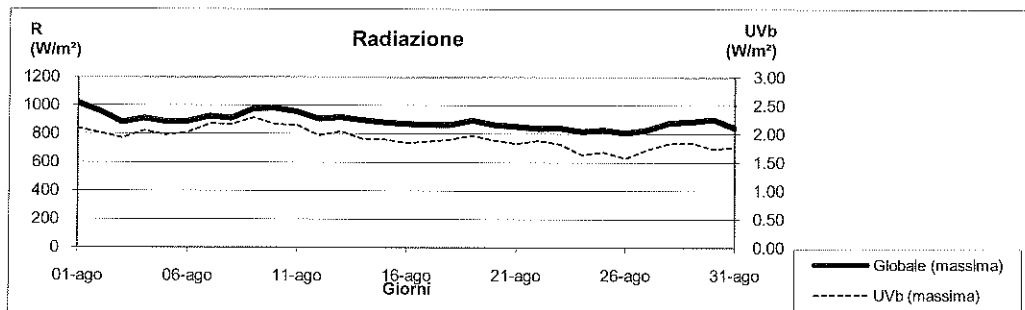
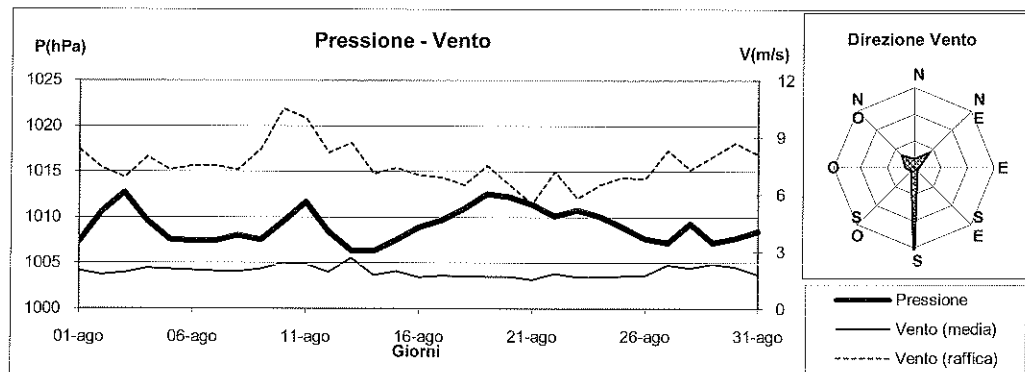
Max: 10.5 m/s il 10/8 alle ore 13.20

Radiazione totaleMax: 1015.5 W/m² il 1/8 alle ore 12.40**Radiazione UVb**Max: 2.280 W/m² il 9/8 alle ore 12.10

AGOSTO 2011

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
1/8/11	1007.3	315.0	2.0	330.4	0.567	1006.3	1009.5	8.4	1015.5	2.100
2/8/11	1010.6	315.0	1.8	309.2	0.554	1009.4	1012.6	7.4	960.6	2.020
3/8/11	1012.7	180.0	1.9	307.2	0.536	1011.4	1013.7	6.9	881.5	1.930
4/8/11	1009.7	180.0	2.1	309.1	0.559	1008.2	1012.0	8.0	910.0	2.050
5/8/11	1007.6	180.0	2.1	310.9	0.551	1006.4	1008.6	7.3	885.1	1.980
6/8/11	1007.4	180.0	2.0	316.2	0.567	1006.4	1008.2	7.5	890.2	2.030
7/8/11	1007.4	180.0	2.0	323.9	0.602	1006.9	1008.3	7.5	923.8	2.180
8/8/11	1008.0	180.0	2.0	317.4	0.598	1007.0	1008.5	7.3	910.4	2.170
9/8/11	1007.5	180.0	2.1	292.9	0.555	1007.0	1008.3	8.4	979.6	2.280
10/8/11	1009.5	45.0	2.4	270.1	0.487	1007.6	1013.2	10.5	981.9	2.170
11/8/11	1011.7	45.0	2.3	327.5	0.588	1009.8	1013.2	10.0	956.6	2.150
12/8/11	1008.4	45.0	1.9	307.7	0.538	1006.9	1010.8	8.2	905.2	1.970
13/8/11	1006.4	180.0	2.7	316.2	0.558	1005.7	1007.6	8.7	915.9	2.040
14/8/11	1006.3	45.0	1.8	306.8	0.522	1005.1	1007.6	7.1	895.7	1.910
15/8/11	1007.5	180.0	2.0	302.6	0.523	1006.4	1009.5	7.4	883.1	1.900
16/8/11	1008.9	180.0	1.7	297.1	0.513	1007.5	1010.1	7.0	871.6	1.840
17/8/11	1009.7	180.0	1.7	291.9	0.510	1008.2	1010.7	6.9	862.1	1.870
18/8/11	1010.9	180.0	1.7	297.9	0.529	1010.0	1012.6	6.5	864.1	1.900
19/8/11	1012.6	180.0	1.7	299.6	0.533	1011.9	1013.7	7.5	896.5	1.970
20/8/11	1012.2	180.0	1.7	285.9	0.496	1011.2	1013.1	6.5	862.1	1.880
21/8/11	1011.4	180.0	1.5	284.0	0.489	1009.6	1012.4	5.5	851.5	1.830
22/8/11	1010.1	0.0	1.8	280.4	0.492	1008.2	1011.4	7.2	839.2	1.880
23/8/11	1010.8	180.0	1.7	281.0	0.480	1010.1	1011.4	5.8	841.2	1.820
24/8/11	1010.1	180.0	1.6	269.3	0.436	1008.8	1011.4	6.5	818.2	1.630
25/8/11	1008.9	180.0	1.7	269.0	0.436	1007.0	1010.1	6.9	828.9	1.680
26/8/11	1007.7	180.0	1.7	260.0	0.423	1005.7	1008.9	6.8	807.2	1.570
27/8/11	1007.2	180.0	2.3	269.4	0.451	1006.4	1008.9	8.3	829.3	1.720
28/8/11	1009.3	180.0	2.1	288.7	0.479	1008.2	1010.1	7.3	876.8	1.830
29/8/11	1007.2	180.0	2.3	287.9	0.484	1008.0	1010.1	8.0	883.9	1.850
30/8/11	1007.7	270.0	2.2	245.0	0.416	1007.0	1009.0	8.7	902.5	1.730
31/8/11	1008.5	315.0	1.8	278.5	0.460	1007.6	1010.7	8.1	843.9	1.770



SETTEMBRE 2011

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)	Tmare (°C)
1/9/11	25.2	74.4	0.0	23.1	27.7	58.4	80.1	25.3
2/9/11	26.7	63.0	0.0	22.9	29.6	48.8	78.0	25.3
3/9/11	28.2	50.2	0.0	25.3	32.0	28.6	65.6	25.3
4/9/11	27.5	63.6	0.0	25.2	31.4	44.9	76.6	25.3
5/9/11	26.5	65.7	0.0	24.7	29.3	46.1	81.4	25.3
6/9/11	25.5	72.8	0.0	23.2	28.6	56.4	80.8	25.1
7/9/11	25.2	72.0	0.0	22.6	27.5	62.7	78.2	25.1
8/9/11	24.5	72.1	0.0	23.0	26.1	63.7	78.2	25.3
9/9/11	25.0	72.1	0.0	22.7	27.8	64.3	77.8	25.2
10/9/11	26.4	67.3	0.0	23.0	30.8	41.5	79.9	24.8
11/9/11	26.2	66.6	0.0	22.6	31.1	38.0	80.6	24.7
12/9/11	25.2	74.6	0.0	23.0	29.7	48.5	85.8	24.6
13/9/11	25.4	77.5	0.0	23.6	27.7	57.2	86.4	24.5
14/9/11	26.1	73.0	0.0	23.0	30.1	43.6	83.5	24.5
15/9/11	26.4	66.4	0.0	23.0	31.6	37.5	81.7	24.6
16/9/11	26.3	71.3	0.0	23.9	29.5	52.2	84.8	24.5
17/9/11	26.2	71.4	0.0	23.1	29.7	54.8	84.9	24.6
18/9/11	25.1	75.9	0.0	22.3	27.3	67.7	81.5	24.7
19/9/11	22.6	67.9	10.6	17.3	25.4	44.7	84.2	24.8
20/9/11	19.6	60.4	1.2	15.8	23.4	38.7	78.6	24.8
21/9/11	22.2	60.9	0.0	18.1	28.3	42.4	70.5	24.7
22/9/11	23.9	64.1	0.0	21.0	27.2	49.5	79.7	24.5
23/9/11	23.2	76.2	0.0	21.2	25.7	62.5	86.7	24.2
24/9/11	23.1	69.6	0.0	20.2	26.3	53.4	81.8	23.9
25/9/11	22.8	71.4	0.0	20.6	24.9	60.9	77.6	23.9
26/9/11	21.6	74.9	0.8	19.6	25.1	54.6	81.8	24.0
27/9/11	23.5	64.5	0.0	20.3	26.6	55.7	79.5	23.7
28/9/11	24.3	54.1	0.0	21.9	27.4	41.3	67.1	23.5
29/9/11	24.1	49.4	0.0	20.8	28.1	37.2	62.4	23.4
30/9/11	23.8	51.8	0.0	20.4	28.2	36.3	59.0	23.4

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**Temperatura**

Min: 15.8 °C il 20/9 alle ore 4.10

Max: 32.0 °C il 3/9 alle ore 10.40

Umidità

Min: 28.6 % il 3/9 alle ore 10.00

Max: 86.7 % il 23/9 alle ore 6.40

Pressione

Min: 965.3 hPa il 13/9 alle ore 14.20

Max: 1018.6 hPa il 30/9 alle ore 22.30

Velocità del vento

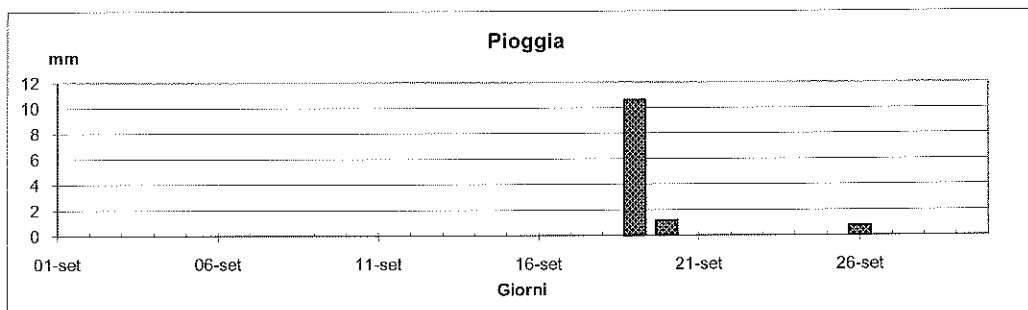
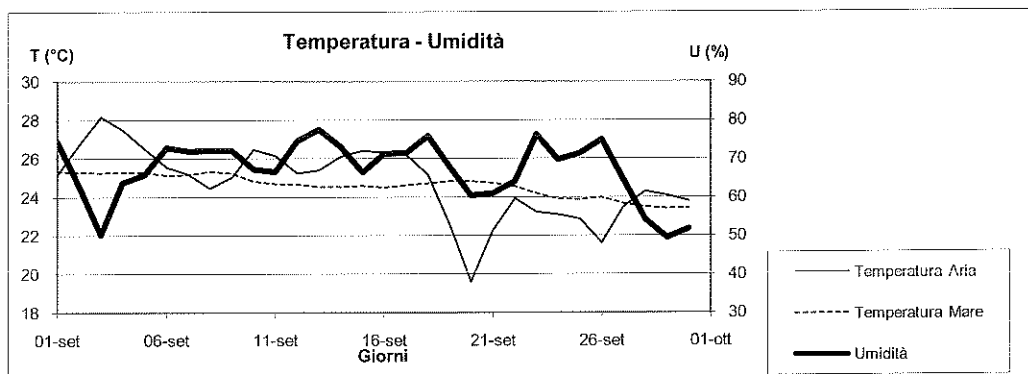
Max: 15.4 m/s il 19/9 alle ore 1.50

Radiazione totale

Max: 919.5 W/m² il 19/9 alle ore 11.10

Radiazione UVb

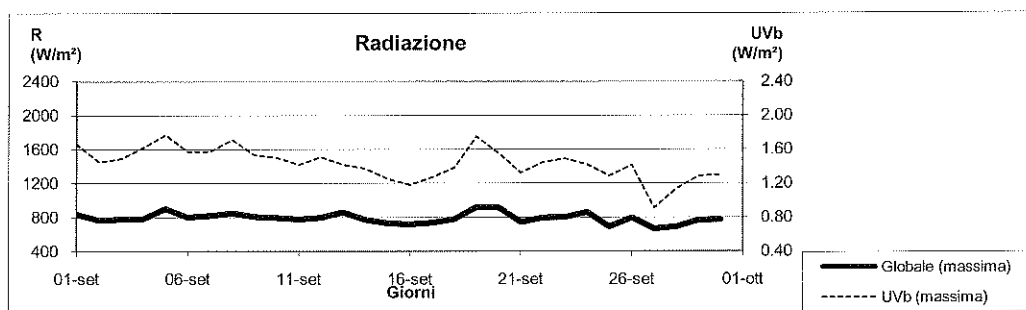
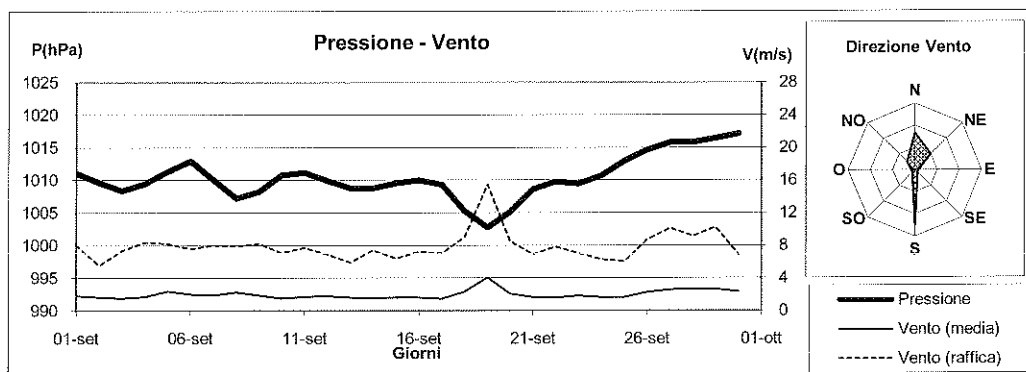
Max: 1.770 W/m² il 5/9 alle ore 12.20



SETTEMBRE 2011

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
1/9/11	1011.0	180.0	1.8	258.7	0.413	1010.1	1012.0	8.0	837.6	1.660
2/9/11	1009.6	180.0	1.6	248.1	0.381	1007.6	1011.3	5.5	766.1	1.450
3/9/11	1008.3	0.0	1.5	188.0	0.319	1007.1	1009.5	7.3	775.1	1.490
4/9/11	1009.4	180.0	1.7	225.9	0.386	1008.1	1010.7	8.4	782.7	1.620
5/9/11	1011.3	315.0	2.4	259.4	0.431	1008.9	1013.8	8.2	902.1	1.770
6/9/11	1012.9	180.0	2.0	263.0	0.402	1011.3	1013.7	7.6	803.2	1.570
7/9/11	1010.1	180.0	1.9	257.8	0.390	1008.2	1013.1	8.0	816.7	1.570
8/9/11	1007.2	180.0	2.2	256.8	0.418	1006.1	1008.4	7.9	850.3	1.710
9/9/11	1008.2	0.0	1.9	258.5	0.388	1006.5	1010.7	8.2	807.2	1.530
10/9/11	1010.8	0.0	1.5	252.7	0.384	1009.5	1012.0	7.1	794.5	1.500
11/9/11	1011.1	180.0	1.7	248.1	0.367	1009.4	1012.0	7.7	777.5	1.420
12/9/11	1009.9	45.0	1.8	238.5	0.370	1008.8	1010.7	6.9	794.9	1.510
13/9/11	1008.7	180.0	1.6	189.1	0.298	965.3	1010.1	5.9	861.7	1.420
14/9/11	1008.7	180.0	1.6	234.0	0.341	1007.6	1009.9	7.4	769.2	1.370
15/9/11	1009.5	180.0	1.6	224.4	0.317	1008.2	1010.8	6.4	731.3	1.250
16/9/11	1010.0	180.0	1.6	221.5	0.306	965.6	1011.3	7.2	717.8	1.180
17/9/11	1009.3	180.0	1.5	226.9	0.320	1007.7	1010.5	7.0	733.2	1.270
18/9/11	1005.3	180.0	2.3	235.0	0.343	1003.3	1008.2	9.0	774.4	1.380
19/9/11	1002.7	315.0	4.0	186.8	0.336	999.6	1004.6	15.4	919.5	1.750
20/9/11	1005.1	0.0	2.1	193.3	0.293	1003.2	1007.3	8.5	911.6	1.550
21/9/11	1008.6	0.0	1.6	87.7	0.109	1006.7	1011.0	6.9	740.0	1.320
22/9/11	1009.7	0.0	1.6	219.0	0.334	1008.4	1010.7	7.8	796.7	1.450
23/9/11	1009.5	45.0	1.8	238.0	0.363	1008.4	1010.3	7.0	799.9	1.490
24/9/11	1010.7	0.0	1.6	237.5	0.344	1009.6	1012.7	6.3	857.7	1.420
25/9/11	1013.0	180.0	1.7	158.7	0.268	1011.7	1014.4	6.0	688.2	1.290
26/9/11	1014.6	0.0	2.3	56.9	0.112	1013.3	1016.4	8.7	792.0	1.410
27/9/11	1015.8	45.0	2.6	111.7	0.188	1014.5	1017.0	10.1	662.4	0.910
28/9/11	1015.8	45.0	2.6	138.8	0.237	1014.6	1016.8	9.1	689.0	1.130
29/9/11	1016.4	45.0	2.7	208.1	0.296	1015.2	1017.6	10.2	762.3	1.280
30/9/11	1017.1	0.0	2.3	215.6	0.312	1016.4	1018.6	6.8	771.0	1.300



OTTOBRE 2011

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)	Tmare (°C)
1/10/11	23.6	49.1	0.0	20.3	27.5	36.2	57.9	23.5
2/10/11	23.9	48.4	0.0	20.8	28.2	35.6	59.2	23.5
3/10/11	23.8	44.6	0.0	20.3	27.8	30.5	58.2	23.4
4/10/11	23.2	55.0	0.0	19.7	27.2	35.3	70.6	23.4
5/10/11	22.4	66.7	0.0	19.7	24.9	52.2	82.3	23.4
6/10/11	21.7	78.4	0.0	19.0	23.9	72.1	84.5	23.4
7/10/11	21.5	75.6	10.8	18.2	24.0	66.7	83.4	23.3
8/10/11	18.7	49.3	1.0	16.4	21.8	33.2	78.3	23.0
9/10/11	14.6	52.7	0.0	11.8	17.7	38.3	61.2	22.8
10/10/11	16.3	46.7	0.0	12.4	20.6	33.8	57.8	22.4
11/10/11	20.7	46.3	0.0	15.2	26.6	34.5	64.8	21.8
12/10/11	20.3	72.2	0.0	17.4	23.0	53.5	81.5	21.5
13/10/11	21.0	76.5	0.0	19.6	22.5	68.2	83.3	21.4
14/10/11	17.5	62.5	21.8	14.9	20.4	47.4	73.4	21.3
15/10/11	15.9	47.4	0.0	13.6	18.3	38.4	54.6	21.0
16/10/11	15.3	49.1	0.0	13.2	18.8	40.0	58.1	20.4
17/10/11	15.3	44.8	0.0	12.1	18.8	29.7	57.4	20.0
18/10/11	16.3	63.9	0.0	12.6	18.4	49.0	76.8	20.0
19/10/11	18.5	73.3	0.0	17.1	19.5	65.2	79.4	19.8
20/10/11	19.1	78.4	17.8	15.7	20.2	72.4	83.8	19.5
21/10/11	18.7	75.7	0.2	15.9	20.8	63.7	84.9	19.7
22/10/11	17.1	74.6	2.8	14.4	19.6	62.7	82.4	19.9
23/10/11	17.7	63.2	0.0	14.8	21.8	42.7	79.7	19.9
24/10/11	16.9	74.1	3.8	15.2	19.2	63.1	83.2	19.9
25/10/11	18.4	72.8	0.0	14.7	21.8	59.2	84.4	19.8
26/10/11	18.8	85.9	27.2	17.2	20.6	71.1	92.4	19.7
27/10/11	18.2	84.8	0.2	15.6	21.1	73.2	92.5	19.8
28/10/11	19.7	73.2	0.0	17.3	23.1	58.6	84.4	19.9
29/10/11	19.2	69.7	0.0	17.1	22.5	54.6	78.7	20.1
30/10/11	18.3	67.1	0.0	15.5	22.3	53.5	78.5	20.2
31/10/11	18.5	60.8	0.0	15.8	22.4	45.2	74.9	20.2

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI

Temperatura

Min: 11.8 °C il 9/10 alle ore 22.00

Max: 28.2 °C il 2/10 alle ore 14.20

Umidità

Min: 29.7 % il 17/10 alle ore 13.40

Max: 92.5 % il 27/10 alle ore 7.00

Pressione

Min: 1001.6 hPa il 8/10 alle ore 14.20

Max: 1020.1 hPa il 19/10 alle ore 8.50

Velocità del vento

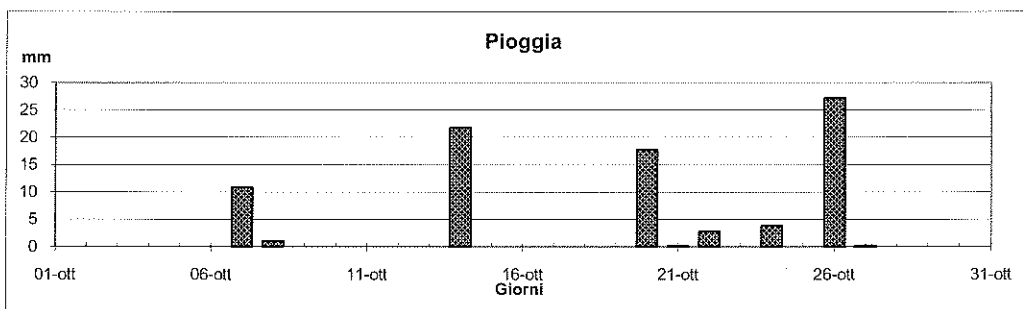
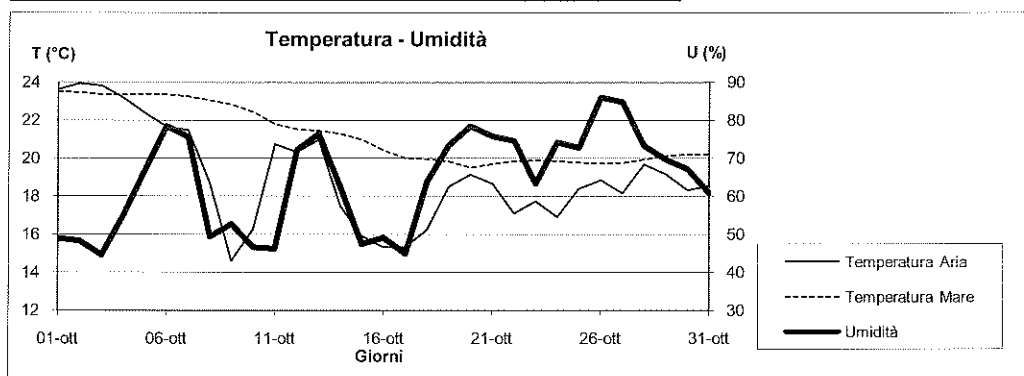
Max: 17.3 m/s il 15/10 alle ore 7.30

Radiazione totale

Max: 950.8 W/m² il 9/10 alle ore 11.20

Radiazione UVb

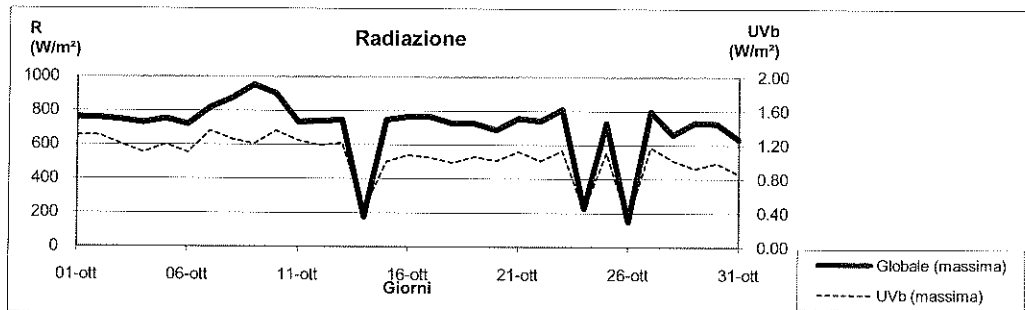
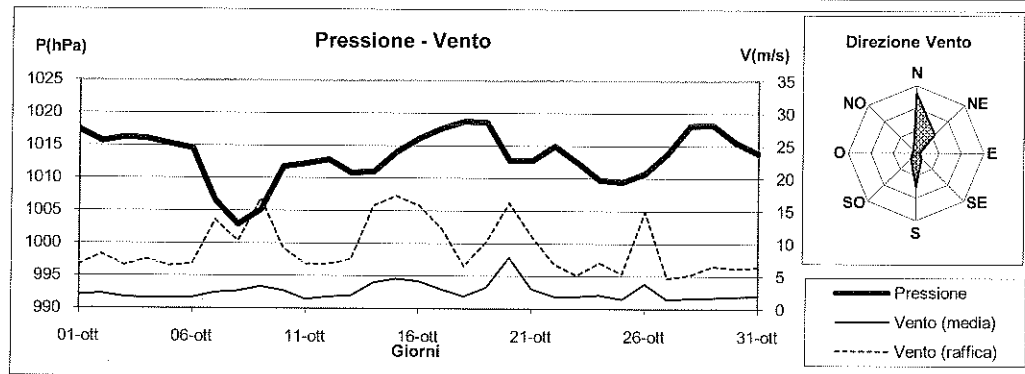
Max: 1.360 W/m² il 7/10 alle ore 12.00



OTTOBRE 2011

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
1/10/11	1017.4	0.0	2.0	223.7	0.322	1015.8	1018.5	6.7	761.1	1.310
2/10/11	1015.7	0.0	2.2	222.8	0.315	1013.6	1017.5	8.3	758.7	1.310
3/10/11	1016.2	0.0	1.8	215.7	0.285	1015.2	1017.1	6.6	746.4	1.200
4/10/11	1016.0	180.0	1.6	211.3	0.265	1014.0	1017.1	7.5	729.0	1.110
5/10/11	1015.2	45.0	1.6	214.6	0.280	1014.0	1015.8	6.5	751.2	1.200
6/10/11	1014.5	180.0	1.6	206.1	0.259	1012.7	1016.2	6.8	720.3	1.110
7/10/11	1006.6	225.0	2.4	123.8	0.207	1001.7	1012.7	13.6	818.1	1.360
8/10/11	1002.8	45.0	2.7	177.9	0.249	1001.6	1004.0	10.3	874.0	1.260
9/10/11	1005.1	0.0	3.4	144.7	0.186	1001.6	1009.6	16.8	950.8	1.210
10/10/11	1011.8	0.0	2.8	213.6	0.261	1009.6	1013.8	9.2	899.7	1.360
11/10/11	1012.2	0.0	1.5	206.4	0.286	1010.9	1013.4	6.8	734.9	1.250
12/10/11	1012.9	180.0	1.8	205.6	0.273	1012.1	1013.4	6.8	738.5	1.190
13/10/11	1010.9	180.0	2.0	182.5	0.260	1009.6	1012.8	7.5	746.8	1.220
14/10/11	1011.0	45.0	3.9	21.5	0.051	1008.8	1013.2	15.8	176.8	0.430
15/10/11	1014.0	45.0	4.6	198.8	0.230	1012.1	1015.8	17.3	746.0	1.000
16/10/11	1016.1	45.0	4.2	212.8	0.247	1014.6	1018.2	15.8	763.1	1.080
17/10/11	1017.6	45.0	3.0	211.6	0.241	1016.4	1018.8	12.3	763.9	1.050
18/10/11	1018.7	180.0	1.9	193.1	0.226	1017.6	1020.0	6.5	727.0	0.990
19/10/11	1018.6	180.0	3.3	165.3	0.219	1015.8	1020.1	10.3	725.4	1.060
20/10/11	1012.7	135.0	7.8	102.9	0.147	1010.3	1015.8	16.2	687.8	1.010
21/10/11	1012.7	180.0	3.0	176.1	0.229	1010.9	1015.1	11.1	756.7	1.120
22/10/11	1014.9	0.0	1.9	165.6	0.207	1014.3	1015.7	6.8	740.9	1.010
23/10/11	1012.5	0.0	1.9	169.3	0.211	1010.9	1014.5	5.1	809.0	1.130
24/10/11	1009.8	0.0	2.1	40.3	0.074	1009.0	1011.5	7.1	226.7	0.430
25/10/11	1009.4	0.0	1.5	163.8	0.213	1008.4	1010.9	5.4	730.2	1.110
26/10/11	1010.7	180.0	3.8	18.5	0.038	1009.0	1012.7	14.9	149.9	0.310
27/10/11	1013.9	0.0	1.4	138.7	0.188	1012.2	1015.7	4.7	795.9	1.170
28/10/11	1018.1	0.0	1.7	170.7	0.222	1015.7	1019.4	5.2	660.9	1.020
29/10/11	1018.2	0.0	1.8	168.9	0.202	1016.8	1019.4	6.5	730.6	0.920
30/10/11	1015.5	0.0	1.9	153.6	0.195	1014.5	1016.9	6.2	725.0	0.990
31/10/11	1013.9	0.0	2.0	164.6	0.190	1012.7	1015.1	6.4	633.1	0.860



NOVEMBRE 2011

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin(°C)	Tmax(°C)	Umin(%)	Umax(%)	Tmare(°C)
1/11/11	18.6	64.7	0.0	16.2	22.1	47.9	72.2	20.2
2/11/11	18.1	68.2	0.0	15.3	21.6	51.6	76.5	20.2
3/11/11	17.3	67.9	0.0	14.9	19.9	52.2	78.5	20.1
4/11/11	18.0	71.9	0.0	15.1	20.5	58.3	79.9	20.1
5/11/11	19.2	66.2	0.0	16.9	21.1	57.5	74.9	19.9
6/11/11	16.2	81.6	76.0	13.2	20.9	67.8	90.4	19.5
7/11/11	17.4	73.8	0.2	15.2	19.8	63.5	81.8	19.5
8/11/11	17.4	66.5	0.8	14.9	20.6	50.6	74.8	19.5
9/11/11	17.6	59.6	0.0	15.0	20.1	49.7	66.0	19.5
10/11/11	17.4	65.5	0.0	15.2	21.1	52.4	74.1	19.6
11/11/11	16.6	66.8	0.0	14.2	20.4	53.0	75.4	19.6
12/11/11	15.7	60.1	0.0	13.1	18.7	49.7	70.9	19.6
13/11/11	13.5	56.7	0.0	11.7	16.3	47.4	65.3	19.3
14/11/11	13.4	57.8	0.0	10.4	17.2	44.9	67.0	19.2
15/11/11	13.1	58.9	0.0	10.4	16.6	38.3	70.6	19.1
16/11/11	13.9	56.6	0.0	11.3	17.7	43.8	66.5	19.2
17/11/11	14.2	56.2	0.0	11.5	18.2	37.6	68.2	19.2
18/11/11	13.5	62.4	0.0	10.8	16.9	45.5	73.9	19.1
19/11/11	13.1	63.7	0.0	9.6	17.3	48.7	73.5	19.0
20/11/11	14.0	60.0	0.0	11.5	17.9	45.1	68.4	18.9
21/11/11	15.0	66.5	0.0	11.7	19.6	54.2	72.9	18.9
22/11/11	15.7	75.7	3.4	14.5	18.6	64.4	80.8	18.8
23/11/11	16.3	69.6	0.0	14.9	19.5	57.6	76.3	18.7
24/11/11	16.2	66.6	0.0	14.2	20.0	49.4	74.4	18.7
25/11/11	15.7	67.6	0.0	13.6	19.5	52.4	74.6	18.6
26/11/11	15.5	68.5	0.0	13.0	19.8	52.0	78.0	18.6
27/11/11	14.2	69.2	0.0	11.6	17.5	51.5	80.1	18.6
28/11/11	14.3	77.0	0.0	11.7	17.9	62.7	83.0	18.5
29/11/11	14.3	67.2	0.0	11.4	19.0	48.5	80.9	18.5
30/11/11	13.7	67.4	0.0	10.8	18.1	47.6	76.3	18.4

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**Temperatura**

Min: 9.6 °C il 19/11 alle ore 7.10

Max: 22.1 °C il 1/11 alle ore 11.50

Umidità

Min: 37.6 % il 17/11 alle ore 13.30

Max: 90.4 % il 6/11 alle ore 13.10

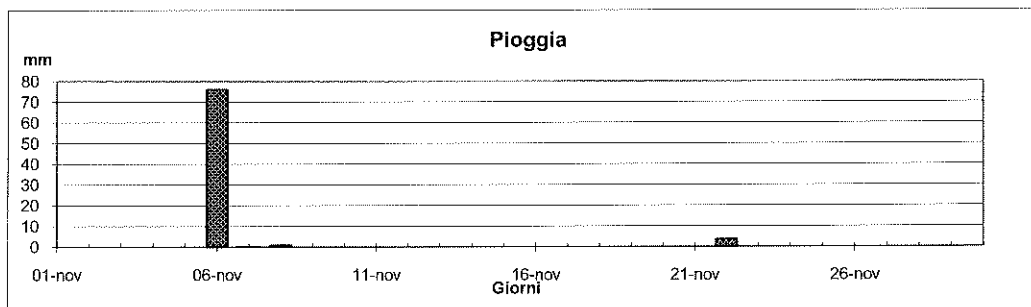
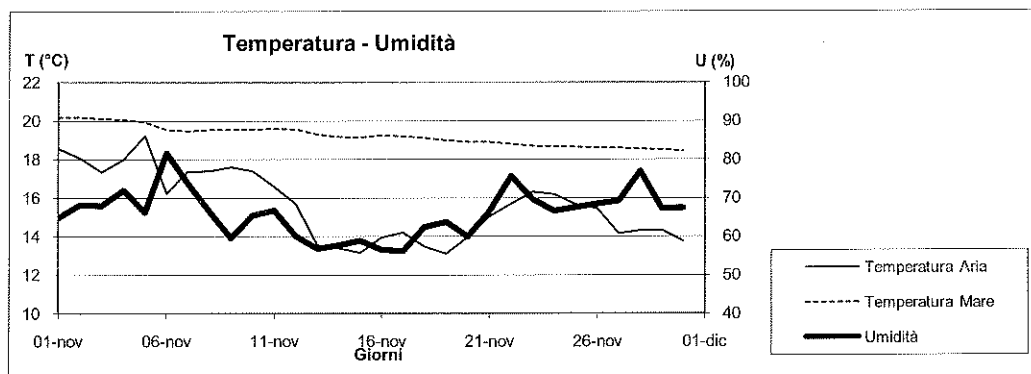
Pressione

Min: 1004.4 hPa il 6/11 alle ore 2.40

Max: 1023.6 hPa il 13/11 alle ore 9.20

Velocità del vento

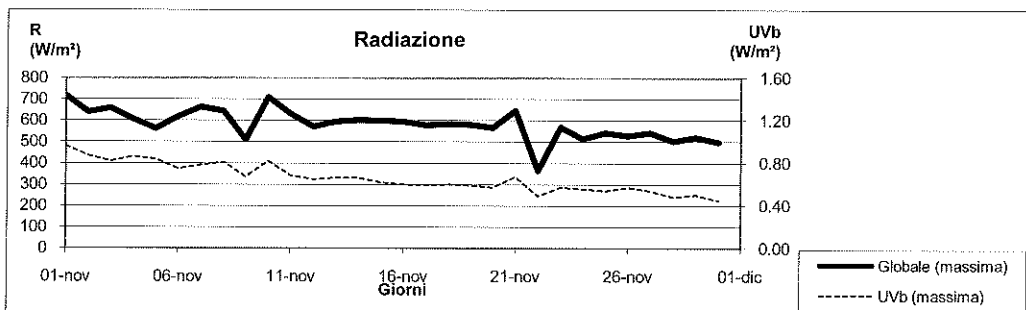
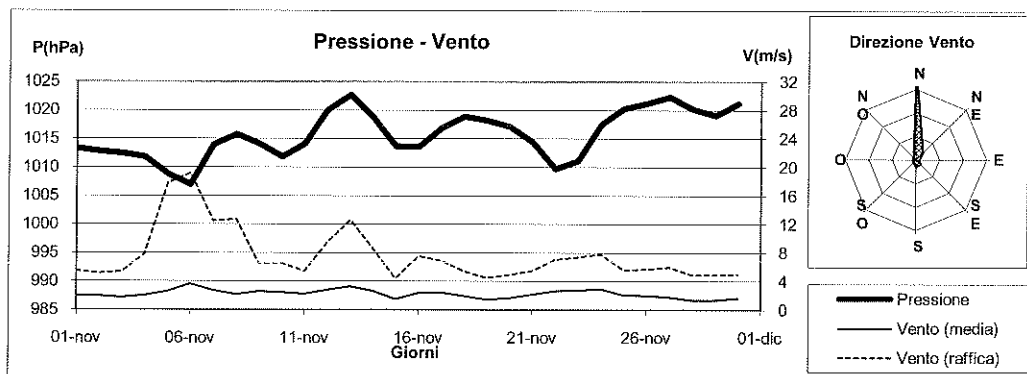
Max: 19.2 m/s il 6/11 alle ore 1.30

Radiazione totaleMax: 716.7 W/m² il 1/11 alle ore 11.50**Radiazione UVb**Max: 0.960 W/m² il 1/11 alle ore 11.50

NOVEMBRE 2011

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	P _{min} (hPa)	P _{max} (hPa)	VV _{max} (m/s)	R _{max} (W/m²)	UVb _{max} (W/m²)
1/11/11	1013.3	0.0	1.9	137.0	0.179	1012.4	1013.9	5.5	716.7	0.960
2/11/11	1012.8	0.0	1.9	155.8	0.181	1011.5	1013.9	5.1	639.5	0.870
3/11/11	1012.5	0.0	1.7	160.7	0.182	1011.5	1013.5	5.3	660.1	0.820
4/11/11	1011.8	0.0	2.0	145.0	0.181	1010.9	1012.8	7.8	605.8	0.860
5/11/11	1008.8	180.0	2.6	59.3	0.107	1005.8	1011.5	17.8	560.6	0.840
6/11/11	1006.9	0.0	3.7	61.7	0.062	1004.4	1010.9	19.2	619.3	0.750
7/11/11	1013.9	135.0	2.7	101.6	0.120	1010.9	1016.3	12.5	664.0	0.780
8/11/11	1015.8	0.0	2.2	93.3	0.109	1014.5	1016.8	12.7	645.8	0.810
9/11/11	1014.1	0.0	2.6	58.0	0.092	1012.7	1015.7	6.5	509.1	0.670
10/11/11	1011.8	0.0	2.4	120.7	0.140	1010.9	1013.3	6.5	709.2	0.820
11/11/11	1014.1	0.0	2.2	139.8	0.141	1011.5	1018.2	5.4	629.6	0.880
12/11/11	1020.1	45.0	2.8	144.1	0.139	1018.2	1022.4	9.4	572.1	0.650
13/11/11	1022.7	45.0	3.2	152.0	0.142	1021.9	1023.6	12.6	594.7	0.660
14/11/11	1018.7	0.0	2.6	151.6	0.138	1016.4	1022.0	8.6	602.2	0.660
15/11/11	1013.7	0.0	1.5	149.9	0.134	1012.2	1016.0	4.4	599.1	0.620
16/11/11	1013.5	0.0	2.4	146.2	0.124	1012.1	1015.8	7.5	595.9	0.600
17/11/11	1016.9	0.0	2.4	143.4	0.125	1015.2	1018.8	6.9	577.7	0.590
18/11/11	1018.8	0.0	1.9	142.2	0.126	1018.2	1020.0	5.4	583.2	0.600
19/11/11	1018.2	0.0	1.4	133.6	0.123	1017.0	1019.4	4.5	581.2	0.590
20/11/11	1017.1	0.0	1.7	140.2	0.121	1016.0	1018.2	4.9	565.8	0.570
21/11/11	1014.4	0.0	2.1	111.6	0.114	1012.2	1016.4	5.5	647.0	0.670
22/11/11	1009.7	0.0	2.6	34.8	0.052	1007.7	1012.2	7.0	363.8	0.490
23/11/11	1011.1	0.0	2.7	87.3	0.103	1009.0	1015.0	7.4	567.8	0.570
24/11/11	1017.4	0.0	2.9	126.4	0.117	1015.1	1020.0	7.8	515.1	0.560
25/11/11	1020.3	0.0	2.1	122.2	0.109	1019.4	1021.2	5.6	542.4	0.540
26/11/11	1021.2	0.0	2.0	128.3	0.113	1020.0	1023.0	5.7	527.8	0.570
27/11/11	1022.3	0.0	1.8	130.3	0.111	1021.2	1023.6	6.0	542.8	0.540
28/11/11	1020.2	0.0	1.3	114.9	0.097	1018.8	1021.2	4.9	502.0	0.480
29/11/11	1019.0	0.0	1.4	115.6	0.097	1017.7	1020.0	4.9	521.4	0.500
30/11/11	1021.2	0.0	1.7	119.1	0.096	1019.9	1023.0	5.0	496.5	0.450



DICEMBRE 2011

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	T _{min} (°C)	T _{max} (°C)	U _{min} (%)	U _{max} (%)	T _{mare} (°C)
1/12/11	13.6	72.6	0.0	10.4	16.9	59.3	77.7	18.4
2/12/11	13.9	80.7	1.0	12.4	15.6	73.1	88.3	18.3
3/12/11	15.2	84.7	7.0	13.1	16.9	75.7	89.8	18.1
4/12/11	15.9	80.0	8.4	13.6	18.1	64.5	87.8	18.0
5/12/11	17.3	79.6	6.2	15.1	18.1	74.3	82.6	18.0
6/12/11	16.1	64.9	4.0	13.8	18.1	52.2	82.5	18.1
7/12/11	14.7	63.9	0.0	12.3	16.9	50.4	75.6	18.1
8/12/11	14.9	74.8	0.0	12.2	17.7	66.1	82.7	18.0
9/12/11	15.0	74.3	0.0	11.8	17.6	67.1	78.0	18.0
10/12/11	16.8	76.3	3.8	15.9	17.5	72.5	81.9	17.9
11/12/11	17.0	79.1	2.4	15.5	17.8	72.0	83.8	17.6
12/12/11	16.9	78.3	3.8	15.3	18.3	71.5	82.7	17.7
13/12/11	15.2	64.2	0.2	13.0	16.8	50.5	81.2	17.8
14/12/11	15.8	78.7	1.4	13.0	17.2	71.4	84.0	17.8
15/12/11	16.4	79.2	8.4	14.4	17.6	65.2	86.9	17.8
16/12/11	15.8	71.2	3.0	13.7	17.0	60.1	82.4	17.7
17/12/11	13.5	58.2	1.4	8.8	16.9	45.7	82.6	17.6
18/12/11	9.4	66.5	5.6	8.2	11.6	52.6	79.3	17.6
19/12/11	8.8	70.0	3.0	6.1	11.8	57.0	81.5	17.4
20/12/11	8.0	55.3	0.0	5.7	10.3	39.7	68.2	17.4
21/12/11	8.4	53.7	0.0	7.0	10.2	39.0	65.0	17.1
22/12/11	8.8	57.4	0.0	6.7	10.9	48.2	69.3	16.9
23/12/11	10.3	51.3	0.0	7.0	13.7	39.6	61.7	16.8
24/12/11	11.4	66.6	18.2	7.1	15.1	48.4	84.9	16.6
25/12/11	10.8	67.9	1.0	9.1	12.8	51.0	88.1	16.4
26/12/11	10.6	52.7	0.0	8.9	13.1	41.5	61.0	16.0
27/12/11	10.8	56.1	0.0	8.0	14.8	44.4	64.8	16.5
28/12/11	10.7	62.3	0.0	7.7	14.8	43.3	72.5	16.5
29/12/11	10.3	66.6	0.0	6.8	14.1	53.5	74.1	16.5
30/12/11	9.8	74.8	4.4	8.4	11.4	66.2	84.0	16.4
31/12/11	10.1	54.4	0.0	7.8	13.0	32.9	82.7	16.4

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**Temperatura**

Min: 5.7 °C il 20/12 alle ore 6.10

Max: 18.3 °C il 12/12 alle ore 12.50

Umidità

Min: 32.9 % il 31/12 alle ore 13.10

Max: 89.8 % il 3/12 alle ore 8.00

Pressione

Min: 993.7 hPa il 17/12 alle ore 3.40

Max: 1028.8 hPa il 27/12 alle ore 10.00

Velocità del vento

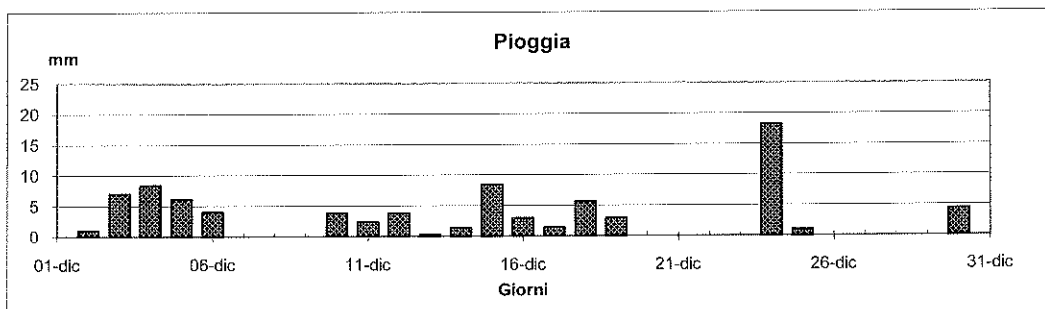
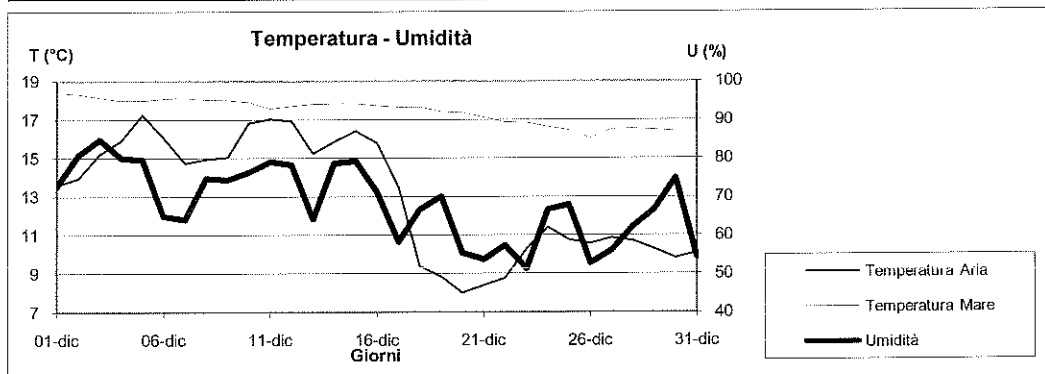
Max: 17.7 m/s il 17/12 alle ore 7.10

Radiazione totale

Max: 652.1 W/m² il 19/12 alle ore 11.20

Radiazione UVb

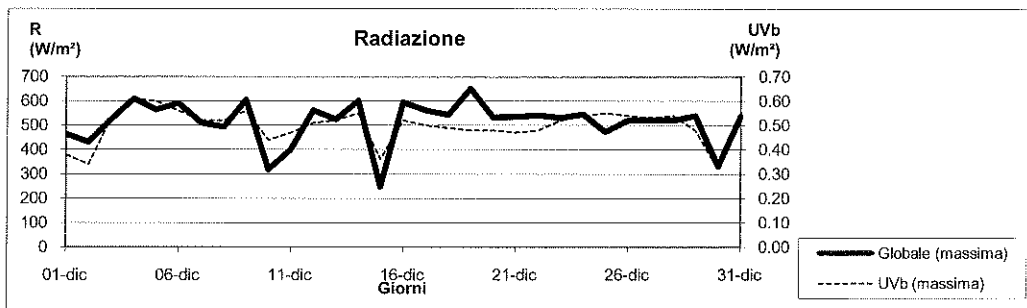
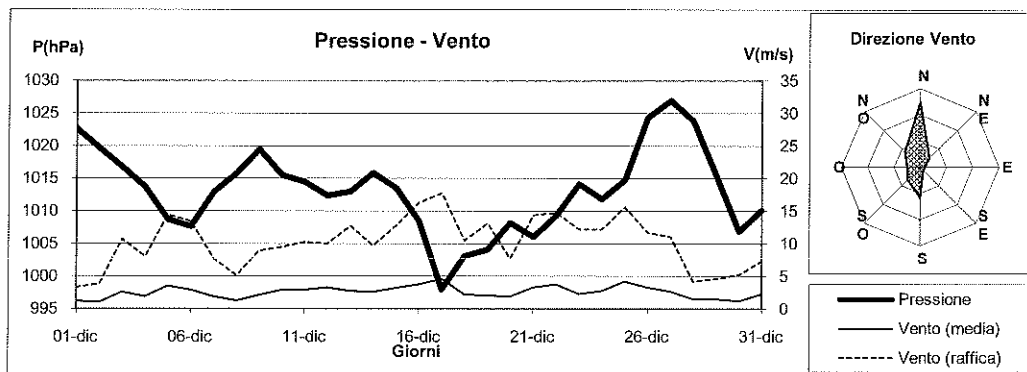
Max: 0.610 W/m² il 4/12 alle ore 11.30



DICEMBRE 2011

(medie giornaliere)

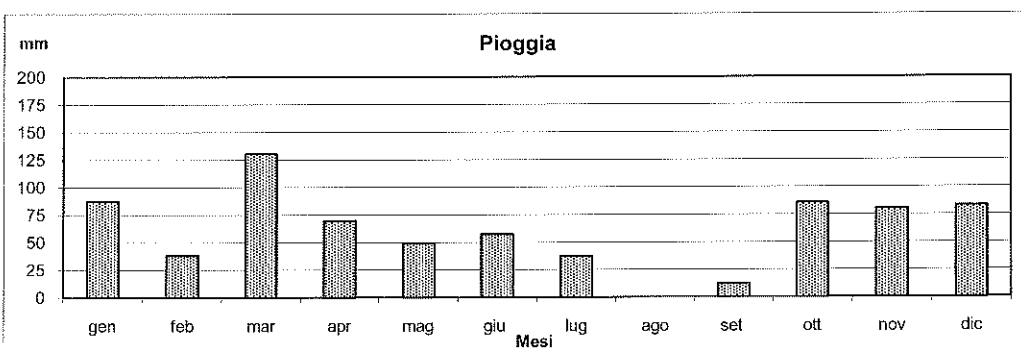
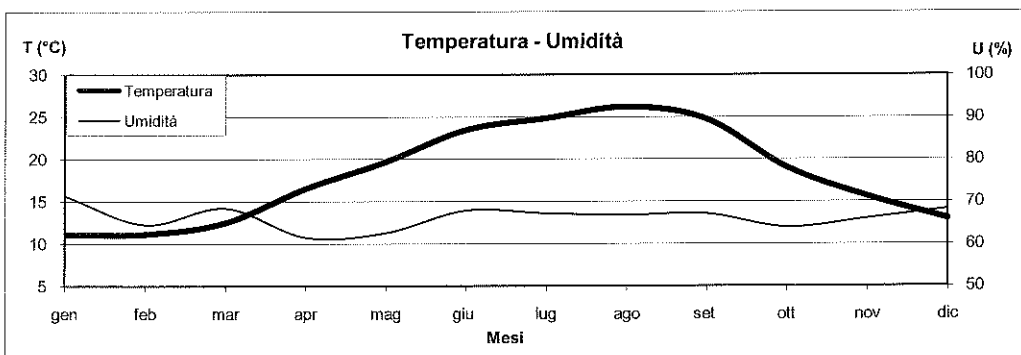
Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	P _{min} (hPa)	P _{max} (hPa)	VV _{max} (m/s)	R _{max} (W/m²)	UVb _{max} (W/m²)
1/12/11	1022.7	0.0	1.2	106.0	0.080	1021.8	1024.2	3.3	465.2	0.380
2/12/11	1019.6	0.0	1.1	38.7	0.041	1018.2	1021.8	3.8	430.3	0.340
3/12/11	1016.8	180.0	2.6	81.4	0.090	1014.9	1018.2	10.7	524.6	0.530
4/12/11	1013.7	270.0	1.9	89.7	0.103	1012.7	1015.1	8.0	610.9	0.610
5/12/11	1008.7	225.0	3.5	44.1	0.069	1005.9	1012.7	14.4	564.6	0.600
6/12/11	1007.6	270.0	2.9	98.6	0.104	981.5	1010.5	13.4	590.7	0.560
7/12/11	1012.9	315.0	1.9	123.3	0.105	1009.6	1015.1	7.7	510.7	0.520
8/12/11	1015.9	0.0	1.3	118.2	0.106	1012.7	1020.0	5.1	492.5	0.520
9/12/11	1019.5	180.0	2.1	109.3	0.098	1017.9	1021.2	8.9	606.6	0.560
10/12/11	1015.5	180.0	2.9	46.9	0.066	1014.4	1017.6	9.5	318.2	0.440
11/12/11	1014.4	180.0	2.9	61.9	0.080	1013.3	1015.3	10.2	402.6	0.470
12/12/11	1012.4	180.0	3.3	75.5	0.085	1010.3	1014.5	10.0	562.2	0.510
13/12/11	1013.0	315.0	2.7	117.8	0.103	1010.2	1016.3	12.7	523.8	0.520
14/12/11	1015.8	180.0	2.6	68.8	0.070	1014.5	1017.6	9.7	601.8	0.550
15/12/11	1013.5	225.0	3.2	34.6	0.052	1011.7	1015.1	12.8	248.1	0.360
16/12/11	1008.5	225.0	3.7	85.5	0.082	996.4	1013.9	16.3	594.7	0.520
17/12/11	998.0	315.0	4.6	89.9	0.083	993.7	1003.5	17.7	562.6	0.500
18/12/11	1003.1	0.0	2.2	66.9	0.066	1001.0	1004.7	10.5	544.0	0.490
19/12/11	1004.1	0.0	2.1	96.2	0.088	1002.2	1006.7	13.1	652.1	0.480
20/12/11	1008.2	0.0	1.9	123.9	0.097	1006.5	1010.3	7.7	532.1	0.480
21/12/11	1006.0	0.0	3.3	98.1	0.088	1003.6	1007.8	14.3	535.3	0.470
22/12/11	1009.2	0.0	3.8	115.8	0.090	1007.1	1012.1	14.7	540.4	0.480
23/12/11	1014.2	315.0	2.3	122.2	0.104	1012.1	1016.4	12.2	531.3	0.520
24/12/11	1011.8	0.0	2.8	113.3	0.099	1007.7	1015.7	12.2	545.2	0.540
25/12/11	1014.7	45.0	4.2	68.9	0.078	1007.2	1022.4	15.6	473.1	0.550
26/12/11	1024.3	45.0	3.3	122.1	0.109	1021.8	1026.1	11.7	520.6	0.540
27/12/11	1027.0	0.0	2.7	121.9	0.105	1026.0	1028.8	11.0	521.8	0.530
28/12/11	1023.8	0.0	1.5	121.3	0.104	1020.6	1026.7	4.2	519.8	0.540
29/12/11	1015.5	0.0	1.5	121.0	0.087	1011.5	1020.6	4.6	539.6	0.480
30/12/11	1006.9	0.0	1.2	40.5	0.045	1003.5	1011.5	5.2	331.7	0.320
31/12/11	1010.1	0.0	2.2	129.4	0.107	1003.4	1014.6	7.3	536.9	0.540

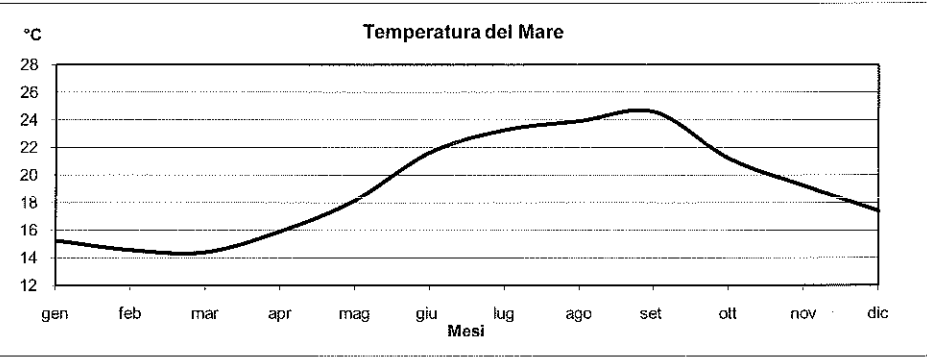
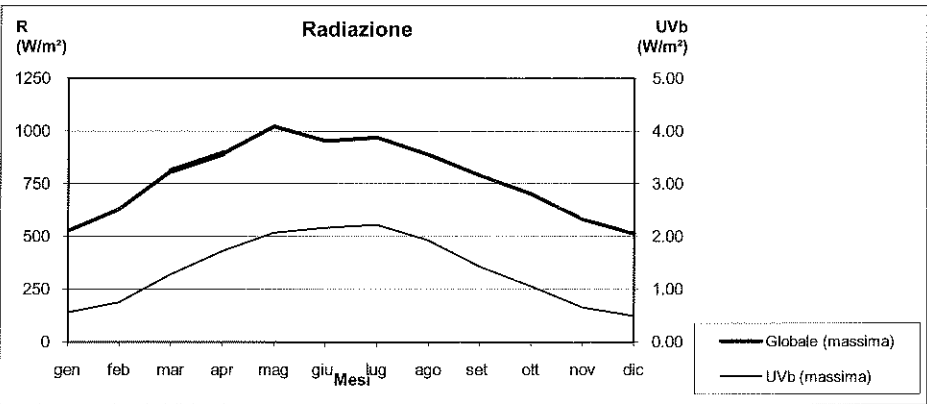
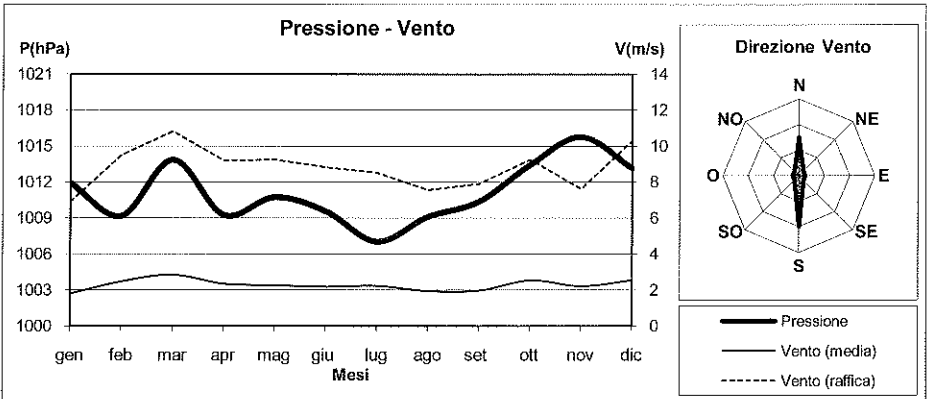


MEDIE MENSILI 2011

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	P(hPa)	DV("N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Tmare (°C)
Gennaio	11.1	71.4	87.6	1011.9	0.0	1.8	87.6	0.093	15.2
Febbraio	11.2	64.6	38.4	1009.2	0.0	2.5	132.6	0.143	14.6
Marzo	12.5	68.5	130.4	1013.8	180.0	2.9	177.8	0.245	14.4
Aprile	16.5	61.5	69.8	1009.2	180.0	2.4	244.0	0.396	15.9
Maggio	19.7	62.6	49.0	1010.7	180.0	2.3	291.5	0.489	18.2
Giugno	23.5	67.9	57.4	1009.5	180.0	2.2	298.7	0.551	21.6
Luglio	24.9	67.2	37.2	1007.0	180.0	2.2	303.8	0.563	23.3
Agosto	26.2	66.8	0.0	1009.1	180.0	1.9	294.6	0.514	23.9
Settembre	24.7	67.2	12.6	1010.3	180.0	2.0	211.3	0.325	24.6
Ottobre	19.1	64.0	85.6	1013.4	0.0	2.5	167.3	0.219	21.2
Novembre	15.6	66.0	80.4	1015.7	0.0	2.2	120.9	0.122	19.2
Dicembre	13.0	68.3	83.2	1013.1	0.0	2.5	92.0	0.087	17.4
ANNO	18.2	66.3	731.6	1011.1	180.0	2.3	201.8	0.312	19.1

Data	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
Gennaio	8.9	13.9	57.7	81.3	1010.0	1014.1	6.9	527.8	0.559
Febbraio	8.9	13.9	50.8	74.0	1007.3	1011.2	9.5	630.2	0.750
Marzo	10.1	15.1	54.7	79.7	1011.5	1016.4	10.8	811.2	1.290
Aprile	13.7	19.8	45.7	76.3	1007.4	1011.4	9.2	892.8	1.730
Maggio	16.7	23.2	44.5	78.4	1008.8	1012.9	9.2	1021.8	2.068
Giugno	20.9	26.6	51.5	80.0	1008.2	1011.2	8.8	953.1	2.169
Luglio	22.3	27.7	51.0	79.1	1005.1	1008.7	8.5	969.8	2.223
Agosto	23.4	30.0	46.4	80.3	1007.9	1010.5	7.6	889.5	1.924
Settembre	21.9	28.1	49.7	78.5	1006.0	1011.9	7.9	789.5	1.432
Ottobre	16.2	22.1	51.0	74.9	1011.7	1015.2	9.3	702.5	1.057
Novembre	13.1	19.1	51.5	74.9	1014.2	1017.6	7.6	581.9	0.659
Dicembre	10.6	15.2	56.4	79.0	1009.5	1016.0	10.3	514.0	0.498
ANNO	15.6	21.2	50.9	78.0	1009.0	1013.1	8.8	773.7	1.363





Riepilogo mensile delle precipitazioni

Mese	Pioggia Totale mm.	N. Totale giorni con pioggia	N. giorni con pioggia fino ad 1 mm	N. giorni con pioggia da 1.1 a 10 mm	N. giorni con pioggia da 10.1 a 20 mm	N. giorni con pioggia da 20.1 a 40 mm	N. giorni con pioggia da 40.1 a 60 mm	N. giorni con pioggia maggiore di 60 mm
Gennaio	87.6	13	3	7	2	1	0	0
Febbraio	38.4	7	2	3	2	0	0	0
Marzo	130.4	12	1	4	6	1	0	0
Aprile	69.8	8	3	4	0	0	1	0
Maggio	49.0	7	1	4	1	1	0	0
Giugno	57.4	7	2	3	1	1	0	0
Luglio	37.2	4	1	2	0	1	0	0
Agosto	0.0	0	0	0	0	0	0	0
Settembre	12.6	3	1	1	1	0	0	0
Ottobre	85.6	9	3	2	2	2	0	0
Novembre	80.4	4	2	1	0	0	0	1
Dicembre	83.2	18	3	14	1	0	0	0
Totali	731.6	92	22	45	16	7	1	1

Riepilogo mensile delle Tmax

Mese	N. giorni con Tmax > 10°C	N. giorni con Tmax > 20°C	N. giorni con Tmax > 30°C	N. giorni con Tmax > 35°C
------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------

Riepilogo mensile delle Tmin

Mese	N. giorni con Tmin ≤ 15°C	N. giorni con Tmin ≤ 10°C	N. giorni con Tmin ≤ 5°C	N. giorni con Tmin ≤ 0°C
------	---------------------------	---------------------------	--------------------------	--------------------------

Gennaio	29	0	0	0	Gennaio	31	22	2	0
Febbraio	26	0	0	0	Febbraio	28	21	2	0
Marzo	29	2	0	0	Marzo	31	16	3	0
Aprile	8	14	0	0	Aprile	25	1	0	0
Maggio	31	28	0	0	Maggio	8	0	0	0
Giugno	30	30	5	0	Giugno	0	0	0	0
Luglio	31	31	5	0	Luglio	0	0	0	0
Agosto	22	22	14	1	Agosto	0	0	0	0
Settembre	30	30	6	0	Settembre	0	0	0	0
Ottobre	31	23	0	0	Ottobre	10	0	0	0
Novembre	30	9	0	0	Novembre	24	1	0	0
Dicembre	31	0	0	0	Dicembre	27	15	0	0
Totali	328	189	30	1	Totali	184	76	7	0

ISTRUZIONI PER LA REALIZZAZIONE DEI DATTILOSCRITTI¹

Il *Rendiconto* pubblica le comunicazioni fatte dai soci in una delle adunanze ordinarie dell'Accademia. I soci possono presentare anche lavori di altri autori. In questo caso l'accettazione della *Nota* per la pubblicazione è condizionata al parere favorevole di una commissione designata dall'Accademia.

Le *Note* dovranno essere presentate su supporto cartaceo, in triplice copia, e su supporto magnetico (floppy disk o Cd-Rom) *esclusivamente in formato PDF*. La stesura dovrà essere conforme al modello che è riportato in *Appendice* al volume annuale: non sono ammesse modifiche al modello fornito. La trasformazione dei file nativi in formato PDF dovrà avvenire preferibilmente utilizzando Adobe Acrobat Distiller™, il file finale dovrà incorporare tutte i font utilizzati nel documento originario.

Le dimensioni della pagina sono così fissate: giustezza (lunghezza del rigo) mm 125, altezza della prima pagina (con esclusione della numerazione di pagina) mm 140, altezza delle pagine successive alla prima (con esclusione della numerazione di pagina) mm 190.

Ogni pagina, inclusa la prima, dovrà essere numerata progressivamente. I riferimenti bibliografici possono essere indicati nel testo numericamente, in ordine di citazione, o per autore, mantenendo lo stesso criterio di presentazione nella Sezione Riferimenti bibliografici (*References*). I riferimenti dovranno, in ogni caso, riportare nell'ordine: i nomi degli autori, l'anno di pubblicazione, il titolo completo, il titolo della rivista, il numero e la pagina di inizio e di fine lavoro.

La struttura del dattiloscritto, i caratteri da utilizzare, le loro dimensioni e le spaziature sono indicate negli esempi nelle pagine dell'*Appendice* che seguono.

¹ Una copia di queste istruzioni può essere scaricata all'indirizzo <http://www.liguori.it/areaautori/?c=normespeciali>, richieste di ulteriori informazioni possono essere inoltrate a helpdesk@liguori.it

I disegni di formule e grafici, contenuti in un rettangolo ideale del formato massimo di 125x190 mm comprendente la eventuale didascalia, non possono essere accettati se prodotti a mano libera, essi dovranno essere realizzati ad alto contrasto. Le fotografie, anche di grafici e disegni, devono essere riprodotte e incorporate nella pagina con una risoluzione minima di 300 dpi (punti per pollice). Le fotografie a mezzi toni e quelle a colori, devono rispondere a criteri di riproducibilità ed essere utilizzate solo se necessarie per la completezza dell'esposizione. Le intestazioni delle figure e le relative didascalie non devono confondersi col testo. È consentita la presentazione delle fotografie e dei disegni in formato digitale solo nel caso in cui la scansione sia effettuata ad alta risoluzione (min. 300 dpi), in caso contrario si dovranno fornire gli originali che saranno scansionati a cura dell'editore.

I dattiloscritti non conformi alle norme previste non potranno essere accettati per la pubblicazione.

Saranno forniti gratuitamente 50 estratti, senza copertina, di ciascuna *Nota*, anche nel caso in cui il numero degli autori dovesse essere superiore a uno. Ulteriori estratti e/o la richiesta di una copertina personalizzata saranno a carico degli autori che ne dovranno fare esplicita richiesta all'atto della presentazione del dattiloscritto, per opportuna comunicazione preventiva all'Editore che inoltrerà agli interessati un preventivo di spesa (<http://www.liguori.it/servizi/?c=preprint>).

Abstract - Abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified;

Al termine lasciare vuoto 1.5 righi

Riassunto - Scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato.

Al termine del secondo riassunto si lasciano vuoti 2 righi e si digita a sinistra in **grassetto maiuscolo con caratteri TNR 9** il titolo del primo paragrafo che deve essere Introduzione.

1 - INTRODUCTION

Si lascia 0.5 righi e si inizia la digitazione con caratteri **TNR 11 giustificato** indentando i capoversi di 0.6 cm.

Primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione.

.....

Ultimo capoverso dell'introduzione. Ricordarsi che i capoversi vanno indentati di 0.6 cm.

Dopo questa sezione, e fra la fine di una sezione e l'intestazione dell'altra, si lasciano vuoti due righi. Si usa il **grassetto maiuscolo TNR 9** per tutte le intestazioni che saranno separate dal corpo della rispettiva sezione di 0.5 righi e per il corpo delle sezioni si useranno caratteri **TNR 11**, come per la sezione INTRODUZIONE. L'ultima sezione deve essere sempre RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI (REFERENCES). Se esistono, mettere nell'ordine, le seguenti sezioni: 2 - MATERIALI E METODI (MATERIALS AND METHODS), 3 - RISULTATI (RESULTS), 4 - DISCUSSIONE (DISCUSSION), o CONCLUSIONI (CONCLUSIONS), 5 -RIFERIMENTI

APPENDICE

NORME PER LA STESURA DI UN DATTILOSCRITTO

Prima pagina.

Si lasciano vuoti quattro righi dall'alto.

Titolo: **Grassetto, Times New Roman (TNR) 13 con testo centrato.**

La Secca delle Formiche di Vivara (canale d'Ischia, Campania) Osservazioni Geomorfologico-strutturali e Faunistiche

A distanza di 1 rigo digitare gli autori della nota con **caratteri TNR 11:**

Nota di Vincenzo Rosso¹, Nicola Verde² e Pasquale Bianco^{1,*}

A distanza di 0.5 rigi digitare il nome del presentatore e la data dell'adunanza con **caratteri TNR 9:**

Presentata dal socio Michele Russo
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

A distanza di 1.5 rigi digitare in lingua inglese le Key words con **caratteri TNR 9** come indicato:

Key words: stratigraphy, island, DNA, proteinase, etc.

A distanza di 0.5 rigi digitare, come indicato, due riassunti con **caratteri TNR 9** di cui uno in italiano e l'altro in inglese:

Esempio di prima pagina

**Analisi sismologiche fatte
nella terra d'Otranto nel decennio 1970-1980**
Nota di Vincenzo Rosso¹, Nicola Verde² e Pasquale Bianco^{1*}

Presentata dal socio Michele Russo
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

Key words: : stratigraphy, Apulia, protein, hemoglobin etc.

Abstract - Abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified;

Riassunto - Scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano.

1 - INTRODUCTION

Primo capoverso dell'introduzione primo capoverso dell'introduzione,
primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo
capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo
capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione.

(Al termine della prima pagina, a piè pagina si inserisce)

^{1,2...} Indirizzi e le varie affiliazioni; tanti quanti necessari per i vari autori

* Author to whom correspondence should be addressed

(qui termina la nota a piè pagina e la pagina 1)

BIBLIOGRAFICI (REFERENCES). I riferimenti, di cui si forniscono esempi per periodici e libri, **vanno scritti in TNR 9 con i titoli in corsivo:**

Hudson, T.H. and Grillo, F.G. (1993) *Reactivation of an inactive human X chromosome*. Science, **230**, 157-163.

Abrahams, R. and Marsden, J. (1978) *Foundation of mechanics*. Benjamin, New York, NY

Eventuali Ringraziamenti (Acknowledgements) per finanziamenti o altro vanno inseriti a piè di pagina al termine di RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI usando **TMS 9**.

Es:

Acknowledgements: i contributi economici, i ringraziamenti per notizie, altro.

Ricordare che come note a piè pagina della prima pagina, dopo una linea di divisione, vanno inseriti in **Times New Roman 9** i richiami e le eventuali annotazioni riguardanti il titolo e gli autori come nell'esempio:

¹ Dipartimento 1, indirizzo 1; Dipartimento 2, indirizzo 2 e così per i vari numeri che nel titolo distinguono gli autori.

* Author to whom correspondence should be addressed (Autore a cui indirizzare la corrispondenza)

